*La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Annamaria Barbagallo

# Risultati di regolarità per disequazioni variazionali e quasi-variazionali di evoluzione e applicazioni a problemi di equilibrio dinamici

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 219–222.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_219_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 219-222

# Risultati di regolarità per disequazioni variazionali e quasi-variazionali di evoluzione e applicazioni a problemi di equilibrio dinamici

ANNAMARIA BARBAGALLO

L'oggetto della tesi è lo studio della regolarità delle soluzioni delle disequazioni variazionali e quasi-variazionali di evoluzione. La ricerca è motivata dallo studio del problema aperto di provare se, nella sola ipotesi di continuità sui dati, le soluzioni delle disequazioni variationali e quasi-variazionali di evoluzione risultano continue e di ingagare se tali risultati, applicati ai problemi di equilibrio dinamici, permettano di sviluppare dei metodi numerici risolutivi. In letteratura, si conoscono solo metodi di risoluzione numerica per i problemi di equilibrio statici.

La proprietà di convergenza degli insiemi chiusi e convessi introdotta da U. Mosco nel 1969 ha avuto un importante ruolo nella dimostrazione dei risultati di regolarità per le disequazioni variazionali e quasi-variazionali fortemente monotoni. In seguito, attraverso un procedimento di regolarizzazione si è pervenuti alla continuità delle soluzioni delle disequazioni variazionali e quasi-variazionali degeneri e strettamente monotoni. L'applicazione dei nostri risultati di regolarità ai problemi di equilibrio dinamici e alle disequazioni variazionali associate (vedi [3] e [4]), permette di discretizzare l'intervallo temporale $[0, T]$ e quindi ridurre la procedura computazionale a problemi finito-dimensionali, cioé a problemi di equilibrio statici. Quindi usando una procedura di interpolazione, determiniamo le approssimazioni delle soluzioni di equilibrio dinamiche (vedi [1] e [2]), studiando anche l'analisi di convergenza di questi metodi e la relativa complessità computazionale.

## 1. – Risultati di regolarità per disequazioni variazionali e quasi-variationali di evoluzione.

Sia $\boldsymbol{K}$ un insieme soddisfacente la seguente ipotesi

(M) $\boldsymbol{K} \subseteq L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ è un insieme non vuoto, convesso e chiuso, tale che la successione degli insiemi $\{\boldsymbol{K}(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\boldsymbol{K}(t) = \{f(t) : f \in \boldsymbol{K}\}$ nel senso di Mosco, per ogni $t \in [0, T]$, ed essendo $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, T]$ una successione tale che $t_n \to t$, per $n \to +\infty$.

Consideriamo la disequazione variazionale di evoluzione

$$(1) \qquad H \in \boldsymbol{K} : \langle C(t, H(t)), F(t) - H(t) \rangle \geq 0, \ \forall F(t) \in \boldsymbol{K}(t), \{\text{in } [0, \text{T}],$$

vale il seguente teorema di regolarità.

TEOREMA 1 ([5]). – *Sia* $C \in C([0,T] \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^m_+)$ *un operatore soddisfacente le condizioni*

$$\|C(t,F(t))\|_m \leq A(t)\|F(t)\|_m + B(t),$$

*con* $B \in C([0,T], \mathbb{R}_+)$ *e* $A \in C([0,T], \mathbb{R}_+)$ *e*

$$\langle C(t,H(t)) - C(t,F(t)), H(t) - F(t)\rangle \geq v\|H(t) - F(t)\|^2_m.$$

*Sia* $\boldsymbol{K}$ *un insieme soddisfacente l'ipotesi (M). Allora, la disequazione variazionale di evoluzione* (1) *ammette un'unica soluzione* $H \in \boldsymbol{K}$ *tale che* $H \in C([0,T], \mathbb{R}^m_+)$.

Tale risultato è stato esteso alle disequazioni variazionali di evoluzione associate a operatori degeneri, ovvero $C$ soddisfa la condizione

$$\langle C(t,H(t)) - C(t,F(t)), H(t) - F(t)\rangle \geq v(t)\|H(t) - F(t)\|^2_m,$$

dove $v \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^+_0)$ è tale che $\nexists I \subseteq [0,T],\ \mu(I) > 0 :\ v(t) = 0$, q.o. in $I$ ed infine, a operatori strettamente monotoni, cioé

$$\langle C(t,H(t)) - C(t,F(t)), H(t) - F(t)\rangle > 0, \quad \forall H(t), F(t) \in \boldsymbol{K}(t),\ H(t) \neq F(t).$$

Consideriamo, adesso, la disequazione quasi-variazionale di evoluzione

$$(2) \qquad H \in \boldsymbol{K}(H) :\ \langle C(t,H(t)), F(t) - H(t)\rangle \geq 0, \quad \forall F(t) \in \boldsymbol{K}(t,H), \{\text{in } [0,\text{T}],$$

dove $\boldsymbol{K} : D \to 2^{L^2([0,T],\mathbb{R}^m)}$ è una multifunzione definita in $D$ sottoinsieme non vuoto, compatto, convesso di $L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ e soddisfacente la seguente ipotesi

(MM) $\boldsymbol{K}$ è chiusa e s.c.i. con $\boldsymbol{K}(H)$, per ogni $H \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$, sottoinsieme non vuoto, convesso, chiuso di $L^2([0,T], \boldsymbol{R}^m)$ tale che la successione $\{\boldsymbol{K}(t_n, H)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converga a $\boldsymbol{K}(t,H)$ nel senso di Mosco, per ogni successione $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,T]$, con $t_n \to t$, per $n \to +\infty$.

Vale il seguente teorema di regolarità.

TEOREMA 2 ([5]). – *Sia* $C \in C([0,T] \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^m_+)$ *un operatore soddisfacente le condizioni*

$$\exists \gamma \in C([0,T], \mathbb{R}_+) :\ \|C(t,F(t))\|_m \leq \gamma(t) + \|F(t)\|_m,$$

$$\langle C(t,H(t)) - C(t,F(t)), H(t) - F(t)\rangle \geq v\|H(t) - F(t)\|^2_m.$$

*Sia* $\boldsymbol{K} : D \to 2^{L^2([0,T],\mathbb{R}^m_+)}$ *una multifunzione soddisfacente l'ipotesi (MM). Allora, la disequazione quasi-variazionale di evoluzione* (2) *ammette una soluzione* $H \in \boldsymbol{K}(H)$ *tale che* $H \in C([0,T], \mathbb{R}^m_+)$.

Siamo riusciti ad ottenere un analogo risultato di continuità per le disequazioni quasi-variazionali associate a operatori degeneri e strettamente monotoni.

## 2. – Applicazione ai problemi di equilibrio dinamici,

Sia $\mathcal{N}$ una rete di traffico rappresentata, sia $W$ l'insieme delle coppie origine-destinazione (O/D) della forma $w_j$, $j = 1, 2, \dots, l$, sia $\mathcal{R}_j$ l'insieme dei percorsi $R_r$, $r = 1, 2, \dots, m$, congiungenti la coppia O/D $w_j$. La geometria della rete è fissata assegnando la matrice di incidenza percorsi-coppie $\Phi$ tale che $\varphi_{jr} = 1$ se $R_r \in \mathcal{R}_j$ e $\varphi_{jr} = 0$ altrove. Sia assegnata $C \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^m_+)$ la funzione costo di percorrenza sui percorsi, $\rho \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^m_+, \mathbb{R}^l_+)$ la funzione richiesta di traffico e $\lambda, \mu \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m_+)$, con $\lambda(t) < \mu(t)$ q.o. in $[0, T]$, i vincoli di capacità. Una distribuzione $H \in \boldsymbol{K}$, dove $\boldsymbol{K} = \{F \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) : \lambda(t) \leq F(t) \leq \mu(t),\ \Phi F(t) = \rho(t), \{\text{q.o. in } [0, \mathrm{T}]\}$, è detta di equilibrio del traffico dal punto di vista dell'utente se $\forall w_j \in \mathcal{W}, \forall R_q, R_s \in \mathcal{R}_j$ e q.o. in $[0, T]$ risulta $C_q(t, H(t)) > C_s(t, H(t)) \Longrightarrow H_q(t) = \lambda_q(t)$ o $H_s(t) = \mu_s(t)$. Il flusso di equilibrio dal punto di vista dell'utente è caratterizzato dalla seguente disequazione variazionale di evoluzione

$$H \in \boldsymbol{K} : \int_0^T \langle C(t, H(t)), F(t) - H(t) \rangle dt \geq 0,\ \forall F \in \boldsymbol{K}. \tag{3}$$

Si dimostra che (3) è equivalente alla seguente disequazione variazionale scritta in forma puntuale:

$$H \in \boldsymbol{K} :\ \langle C(t, H(t)), F(t) - H(t) \rangle \geq 0,\ \forall F(t) \in \boldsymbol{K}(t), \{\text{q.o. in } [0, \mathrm{T}], \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{K}(t) = \{F(t) \in \mathbb{R}^m) : \lambda(t) \leq F(t) \leq \mu(t),\ \Phi F(t) = \rho(t)\}$.

Vale il seguente risultato

LEMMA 1 (vedi [3]). – *Siano $\lambda, \mu \in C([0, T], \mathbb{R}^m_+)$, sia $\rho \in C([0, T], \mathbb{R}^l_+)$ e sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $t_n \to t \in [0, T]$, per $n \to +\infty$. Allora, la successione degli insiemi $\boldsymbol{K}(t_n) = \{F(t_n) \in \mathbb{R}^m) : \lambda(t_n) \leq F(t_n) \leq \mu(t_n),\ \Phi F(t_n) = \rho(t_n)\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, converge a $\boldsymbol{K}(t)$, per $n \to +\infty$, nel senso di Mosco.*

Quest'ultimo ci permette di applicare i risultati di regolarità al problema di equilibrio del traffico dinamico sotto le ipotesi di continuità e di monotonia della funzione costo.

## 3. – Procedura di discretizzazione.

Consideriamo la disequazione variazionale di evoluzione (4) che modella il problema dell'equilibrio del traffico dinamico e supponiamo che le ipotesi prima stabilite siano soddisfatte, quindi la soluzione $H \in C([0, T], \mathbb{R}^m_+)$. Consequentemente, (4) vale per ogni $t \in [0, T]$, ovvero

$$H \in \boldsymbol{K} : \langle C(t, H(t)), F(t) - H(t) \rangle \geq 0,\ \forall F(t) \in \boldsymbol{K}(t),\ \forall t \in [0, T]. \tag{5}$$

Questo ci consente di introdurre una partizione di $[0,T]$, tale che $0=t_0<\ldots<t_i<\ldots<t_N=T$ e, per ogni punto della griglia $t_i$, $i=0,\ldots,N$, ottenere una disequazione variazionale statica

$$\langle C(t_i,H(t_i)),F(t_i)-H(t_i)\rangle \geq 0,\ \forall F(t_i)\in \boldsymbol{K}(t_i), \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{K}(t_i)=\left\{F(t_i)\in\mathbb{R}^m_+:\ \lambda(t_i)\leq F(t_i)\leq \mu(t_i),\ \Phi F(t_i)=\rho(t_i)\right\}$, che si risolve con un metodo di proiezione o di discesa. Dopo la procedura iterativa, possiamo costruire la soluzione di equilibrio di (5) interpolando le soluzioni di (6) per $i=0,\ldots,N$. La complessità degli algoritmi presentati è $O(Nm^3)$.

Sia $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di capisaldi della decomposizione dell'intervallo temporale $[0,T]$ (non necessariamente equidistanti) tale che $\pi_n=(t_n^0,t_n^1,\ldots,t_n^{N_n})$, dove $0=t_n^0<t_n^1<\ldots<t_n^{N_n}=T$, e supponiamo che $k_n:=\max\{t_n^r-t_n^{r-1}|\ r=1,2,\ldots,N_n\}$, tende a zero per $n\to+\infty$. Dalla teoria dell'interpolazione sappiamo che se costruiamo la soluzione di (5) mediante il polinomio di Hermite, con le soluzioni di (6), la succesione converge uniformemente alla soluzione esatta. Abbiamo, inoltre, provato che la successione delle soluzioni di (5) costruita mediante funzioni costanti a tratti $H_n(t)=\sum_{r=1}^{N_n}H(t_n^r)\chi_{[t_n^{r-1},t_n^r[}(t)$, dove $u(t_n^r)$ è la soluzione della disequazione variazionale finito-dimensionale (6) converge in $L^1$ alla soluzione di (5).

## BIBLIOGRAFIA


[1] BARBAGALLO A., *Degenerate time-dependent variational inequalities with applications to traffic equilibrium problems*, Compt. Meth. Appl. Math., **6** (2006), 117-133.

[2] BARBAGALLO A., *Existence of continuous solutions to time-dependent variational inequalities*, J. Nonlinear Convex Anal., **7** (2006), 343-354.

[3] BARBAGALLO A., *Regularity results for time-dependent variational and quasi-variational inequalities and application to calculation of dynamic traffic network*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (2007), 277-304.

[4] BARBAGALLO A., *Dynamic spatial price equilibrium problem: regularity results and computational procedures*, Communications to SIMAI Congress, **2** (2007), 1-10.

[5] BARBAGALLO A., *Regularity results for evolutionary nonlinear variational and quasi-variational inequalities with applications to dynamic equilibrium problems*, J. Global Optim., **40** (2008), 29-30.



Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Catania
e-mail: barbagallo@dmi.unict.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche (sede amministrativa: Università di Napoli "Federico II") - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Antonino Maugeri, Università degli Studi di Catania