
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIETRO BALDI

Biforcazione di vibrazioni libere e forzate per equazioni nonlineari delle onde e di Kirchhoff tramite la teoria di Nash-Moser

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 215–218.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_215_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_215_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Biforcazione di vibrazioni libere e forzate per equazioni nonlineari delle onde e di Kirchhoff tramite la teoria di Nash-Moser

PIETRO BALDI

Questa Tesi riguarda l'esistenza di soluzioni periodiche e quasi-periodiche di equazioni nonlineari delle onde autonome ⁽¹⁾ e forzate

$$(1) \quad u_{tt} - u_{xx} = f(x, u), \quad \rho(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = f(x, t, u)$$

e di equazioni di Kirchhoff

$$(2) \quad u_{tt} - \Delta u \left(1 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) = g(x, t),$$

con condizioni al bordo sia di Dirichlet che periodiche nello spazio.

(1) e (2) sono equazioni nonlineari alle derivate parziali che hanno la struttura di un sistema dinamico hamiltoniano infinito-dimensionale; altre equazioni della fisica che presentano una tale struttura sono, per esempio, l'equazione nonlineare di Schrödinger, quella di Korteweg-de Vries e quella di Eulero per l'idrodinamica.

Stimolata dai lavori degli anni Settanta di Rabinowitz, Brezis, Coron, Nirenberg e altri sulle soluzioni periodiche dell'equazione delle onde, negli ultimi vent'anni si è andata sviluppando una vasta letteratura sull'analisi delle PDE viste come sistemi hamiltoniani in dimensione infinita, cominciata da Kuksin, Craig, Wayne, Pöschel, Bourgain, e seguita da Bambusi, Chierchia, Berti, Bolle, Procesi, Biasco, Iooss, Plotnikov, Toland, Eliasson e altri. ⁽²⁾ In questo approccio il punto di partenza naturale è la teoria dei sistemi dinamici in dimensione finita (teorema del centro di Lyapunov, teoremi di Weinstein, Moser, Fadell-Rabinowitz, teoria KAM), con l'obiettivo principale di estenderne i risultati ai sistemi infinito-dimensionali, e in particolare alle PDE hamiltoniane. I metodi seguiti e i risultati ottenuti nella Tesi si inseriscono in questo contesto.

La Tesi è suddivisa essenzialmente in due parti, corrispondenti alle due principali difficoltà che sorgono nello studio di queste equazioni.

Nella prima parte (lavori [1] e [3]) studiamo la biforcazione di soluzioni periodiche e quasi-periodiche per equazioni nonlineari delle onde autonome completamente risonanti. Dopo una decomposizione di Lyapunov-Schmidt, la difficoltà principale che affrontiamo risiede nell'analisi dell'equazione di biforcazione infinito-dimensionale.

⁽¹⁾ Autonome, o libere, è inteso rispetto al tempo.

⁽²⁾ Per una panoramica sulla storia e sullo stato attuale della ricerca in questo campo cfr. [6, 5].

Nella seconda parte (lavori [4] e [2]) studiamo equazioni nonlineari forzate delle onde e di Kirchhoff, e otteniamo risultati perturbativi per soluzioni periodiche. La difficoltà principale è la presenza di “piccoli divisori”, autovalori non nulli e arbitrariamente piccoli nello spettro dell’operatore di d’Alembert e delle sue perturbazioni, che impediscono l’applicazione del teorema classico della funzione implicita. Il problema viene affrontato con tecniche iterative in scale di spazi di Banach di tipo Nash-Moser.

L’equazione $u_{tt} - u_{xx} = f(x, u)$ con condizioni al bordo di Dirichlet $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ o periodiche $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$, con

$$(3) \quad f(x, 0) = \partial_u f(x, 0) = 0,$$

è detta completamente risonante perché l’equazione linearizzata in $u = 0$ è l’equazione omogenea di d’Alembert $u_{tt} - u_{xx} = 0$, le cui soluzioni sono tutte periodiche nel tempo con periodo comune 2π . Rispetto all’ipotesi di non-risonanza del teorema del centro di Lyapunov, questa è la situazione completamente opposta: tutti gli autovalori del sistema dinamico linearizzato sono in risonanza. A differenza del caso non-risonante, studiato a partire dai lavori di Kuksin, Craig e Wayne dei primi anni Novanta, nel caso (3) l’equazione di biforcazione ha dimensione infinita.

Risultati di biforcazione di soluzioni periodiche per questo tipo di problemi rappresentano un’estensione infinito-dimensionale dei teoremi di Weinstein, Moser e Fadell-Rabinowitz per sistemi risonanti. Tra questi nominiamo i lavori di Lidski-Schulman e Bambusi-Paleari per nonlinearità cubiche, Gentile-Mastropietro-Procesi con serie di Lindstedt, Berti-Bolle per nonlinearità generali e insiemi di frequenze di misura positiva con metodi variazionali e di tipo Nash-Moser (Adv. Math. 2008).

In [1] proviamo la biforcazione di soluzioni *quasi-periodiche* a due frequenze per il problema completamente risonante

$$(4) \quad u_{tt} - u_{xx} = -u^3 + O(u^4)$$

con condizioni al bordo periodiche. Troviamo soluzioni di piccola ampiezza che, al prim’ordine, sono la sovrapposizione di un’onda viaggiante e di una modulazione, dipendente solo dal tempo, di periodo molto lungo. In questo modo generalizziamo e troviamo altre soluzioni rispetto ad un lavoro di M. Procesi (Discr. Cont. Dyn. Syst. 2005), che è il primo risultato di esistenza per soluzioni quasi-periodiche di equazioni completamente risonanti.

Il problema dei piccoli divisori nell’equazione ausiliaria viene evitato restringendo le frequenze ad un insieme di cardinalità continua e misura di Lebesgue nulla⁽³⁾. L’equazione di biforcazione contiene il problema infinito-dimensionale di stabilire da quale delle infinite soluzioni (periodiche) dell’equazione omogenea pos-

(³) Insiemi di questo tipo hanno la struttura dell’insieme di Cantor, e la loro costruzione rimanda alla teoria dell’approssimazione diofantea dei numeri irrazionali tramite razionali e a quella delle frazioni continue. In letteratura sono stati utilizzati, per esempio, da Bambusi e De La Llave.

sano biforcare delle soluzioni quasi-periodiche. Il punto più delicato nella dimostrazione è la verifica di una condizione di non-degenerazione, necessaria per applicare il teorema della funzione implicita. La dimostrazione è puramente analitica (non fa uso di calcoli al computer), ed è basata sull'analisi delle funzioni ellittiche di Jacobi.

In [3] le tecniche sviluppate in [1] sono utilizzate per estendere a nuove non-linearità alcuni risultati di biforcazione di soluzioni periodiche per equazioni completamente risonanti provati di recente da Berti e Bolle (Duke J. 2006).

In [4] studiamo le vibrazioni periodiche forzate di una corda non omogenea

$$(5) \quad \rho(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x = \mu f(x, t, u)$$

con estremi fissati $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, dove $\rho(x)$ è la densità di massa, $p(x)$ il modulo di elasticità, μ un parametro di ampiezza ed f una forzante nonlineare in u , periodica nel tempo con frequenza ω .

Soluzioni periodiche del problema (5) sono state studiate da Rabinowitz, Brezis-Coron-Nirenberg e Berti-Biasco per $\rho = p = 1$ e ω razionale⁽⁴⁾; da Acquistapace per $\rho = 1$, μ piccolo, ω in un insieme di misura nulla; da Plotnikov e Yungerman per f monotona in u , $\rho = p = 1$, μ piccolo, ω in un insieme di misura positiva; da Fokam per f cubica, $\rho = p = 1$ e ω grande.

In [4] proviamo esistenza e regolarità di soluzioni periodiche di (5) per ogni $\rho(x), p(x)$ positivi, per non-linearità f generali (non assumiamo cioè condizioni di monotonia), per parametri (μ, ω) in un insieme di Cantor di misura relativa grande, con rapporto μ/ω piccolo. In questo modo includiamo sia il caso di forzante debole (μ piccolo) che quello di forzante rapida (ω grande). Le soluzioni trovate sono la somma di un equilibrio statico $v(x)$ e un'oscillazione $w(x, t)$ di media temporale nulla e ampiezza di ordine $O(\mu/\omega)$. L'inversione degli operatori linearizzati che si presentano a ciascun passo del metodo iterativo, la parte fondamentale del metodo di Nash-Moser, è compiuta escludendo piccoli intornoi dei valori dei parametri corrispondenti ai piccoli divisori.

In [2] studiamo l'equazione di Kirchhoff⁽⁵⁾ (2) per vibrazioni forzate di corpi n -dimensionali, sia con condizioni al bordo di Dirichlet, quando cioè $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è un dominio limitato con frontiera regolare, che periodiche, cioè $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$. La forzante esterna g è una funzione assegnata, periodica di frequenza ω e ampiezza piccola ε . Data la presenza del termine integrale come coefficiente del laplaciano, si tratta di un problema *non locale* con non-linearità *quasi-lineare*.

L'equazione di Kirchhoff è stata studiata dal punto di vista del problema di Cauchy.

⁽⁴⁾ In generale, dello spettro dell'operatore $\rho(x)\partial_{tt} - \partial_x(p(x)\partial_x)$ è noto solo l'andamento asintotico. Di conseguenza per l'equazione (5) non è possibile un'analisi per frequenze razionali come quella di Rabinowitz, e il problema dei piccoli divisori, in generale, non può essere evitato.

⁽⁵⁾ Il modello fu proposto da Kirchhoff (1876), e poi riscoperto indipendentemente da Carrier e Narasimha, per includere, al prim'ordine di approssimazione, la dipendenza della tensione di un corpo elastico vibrante dalla sua deformazione (una corda se $n = 1$, una membrana se $n = 2$).

Risultati di esistenza sia locale $t \leq T$ che globale $t \rightarrow +\infty$, per dati con regolarità sia analitiche che di Sobolev, sono stati provati da Bernstein, Pohozaev, J.L. Lions, Spagnolo, Arosio, D'Ancona, Panizzi, Manfrin e altri (sebbene l'esistenza globale in classi di Sobolev rimanga tuttora una questione aperta). D'altro canto per soluzioni periodiche sembra che fino all'anno scorso non ci fossero risultati, eccetto l'esistenza dei modi normali per $g = 0$, nota già a Kirchhoff e dovuta alla speciale struttura "naturalmente diagonalizzata" del problema nonlineare non forzato. In presenza di un termine forzante, al contrario, si rompe tale simmetria, e l'equazione (2) diventa equivalente ad un sistema di infinite ODE accoppiate nonlinearmente.

In [2] proviamo esistenza e regolarità di soluzioni periodiche di (2) di ampiezza $O(\varepsilon)$ e frequenza ω , per parametri (ω, ε) in un insieme di Cantor di misura relativa grande, asintoticamente piena. Grazie a una versione modificata, molto recente [5] del metodo di Nash-Moser, il risultato vale in classi di regolarità sia analitica che di Sobolev. In classe di Sobolev si tratta del primo esempio di soluzioni non solo periodiche, ma più in generale globali di equazioni di Kirchhoff forzate (eccetto casi speciali come $\Omega = \mathbb{R}^n$).

La struttura così peculiare della nonlinearità di Kirchhoff gioca un ruolo essenziale nella dimostrazione, in particolare nell'inversione degli operatori linearizzati. In assenza di una tale struttura, infatti, sarebbe impossibile, allo stato attuale della ricerca, un simile controllo dei piccoli divisori per un'equazione, come è (2), in dimensione qualsiasi (difficoltà legate all'andamento asintotico subquadratico degli autovalori del laplaciano) e che contiene delle derivate nella nonlinearità. A questo proposito osserviamo che le altre due tecniche per l'analisi dei piccoli divisori, cioè la teoria KAM infinito-dimensionale e le serie di Lindstedt, non sembrano potersi applicare al problema (2) a causa della presenza di derivate nella nonlinearità, mostrando la buona versatilità dei metodi di tipo Nash-Moser.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDI P., *Quasi-periodic solutions of the equation $v_{tt} - v_{xx} + v^3 = f(v)$* , Discr. Cont. Dyn. Syst. **15** (2006), 883-903.
- [2] BALDI P., *Periodic solutions of forced Kirchhoff equations*, inviato a Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5).
- [3] BALDI P. and BERTI M., *Periodic solutions of wave equations for asymptotically full measure sets of frequencies*, Rend. Lincei Mat. Appl., **17** (2006), 257-277.
- [4] BALDI P. and BERTI M., *Forced vibrations of a nonhomogeneous string*, SIAM J. Math. Anal., **40** (2008), 382-412.
- [5] BERTI M., *Nonlinear oscillations of Hamiltonian PDEs*, Progress in nonlin. differ. eqs. and their appl., **74**, Ed. H. Brezis, Birkhäuser, Boston, 2008.
- [6] CRAIG W., *Problèmes de petits diviseurs dans les équations aux dérivées partielles*, Panoramas et Synthèses, **9**, Soc. Math. de France, Paris, 2000.

Department of Mathematical Sciences, University of Bath, U.K.

e-mail: P.Baldi@bath.ac.uk

Dottorato in Analisi Matematica (sede amministrativa: SISSA, Trieste) - Ciclo XIX

Direttori di ricerca: Prof. Antonio Ambrosetti (SISSA) e Prof. Massimiliano Berti (Università "Federico II" di Napoli)