
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SUSANNA ANSALONI

Analisi spettrale di un problema di Sturm-Liouville dipendente da un parametro

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 207–210.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_207_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_207_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Analisi spettrale di un problema di Sturm-Liouville dipendente da un parametro

SUSANNA ANSALONI

Introduzione al problema.

È noto che la funzione zeta di Riemann (denotata da $\zeta = \zeta(s)$) è strettamente connessa alla funzione zeta spettrale dell'oscillatore armonico $H = -\frac{\partial^2}{2} + \frac{x^2}{2}$. Infatti, se denotiamo con $\zeta_H = \zeta_H(s)$ la funzione zeta spettrale di H , cioè

$$\zeta_H(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^s}, \quad \lambda_n \text{ autovalori di } H, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1,$$

si ha $\zeta_H(s) = (2^s - 1)\zeta(s)$. In questo senso si può dire che ζ_H sia una “deformazione” di ζ . Allo scopo di analizzare un'altra possibile deformazione di $\zeta(s)$, abbiamo studiato lo spettro dell'operatore P_L , definito da:

$$P_L : D(P_L) \rightarrow L^2(-\pi L, \pi L), \quad P_L f = -\frac{1}{2}f'' + V_L f,$$

$$V_L(x) = \frac{L^2}{2} \sin^2\left(\frac{x}{2L}\right), \quad D(P_L) = H_0^1(-\pi L, \pi L) \cap H^2(-\pi L, \pi L).$$

In particolare abbiamo studiato il comportamento degli autovalori di P_L quando $L \rightarrow +\infty$. L'operatore P_L può essere visto come un “modello” di H siccome V_L tende, nel senso delle distribuzioni temperate, al potenziale armonico (quando $L \rightarrow +\infty$). Seguiamo le idee presenti in [4].

La dipendenza da L nell'intervallo $(-\pi L, \pi L)$ si elimina tramite una normalizzazione, ottenendo in questo modo il seguente problema *semi-classico* equivalente

$$(1) \quad P(h)f = \mu f, \quad \mu \in \mathbb{C},$$

con

$$P = P(h) : H_0^1(-\pi, \pi) \cap H^2(-\pi, \pi) \rightarrow L^2(-\pi, \pi),$$

$$(2) \quad P(h)f(x) = -\frac{h}{2}f''(x) + \frac{1}{2h} \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)f(x) = \mu f(x), \quad h := 1/L^2 \rightarrow 0^+.$$

L'operatore P è autoaggiunto con spettro discreto. Lo spettro di P è una successione illimitata di numeri reali $0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots$. Gli autovalori di P sono semplici. Le autofunzioni di P sono a valori reali; ciascuna autofunzione è una funzione pari o dispari.

Caratterizzazione degli autovalori

Sviluppiamo le autofunzioni di P rispetto alla seguente base ortonormale

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin((m+1)x); \quad n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tutti i risultati enunciati d'ora in poi, riguardanti gli autovalori associati ad autofunzioni pari, hanno un analogo nel caso delle autofunzioni dispari (ometteremo questi risultati per brevità).

PROPOSIZIONE 1. – Sia $v^+ \in D(P)$ una funzione pari, con sviluppo di Fourier

$$(3) \quad v^+(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n^+}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right), \quad v_n^+ = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^+(x)}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) dx.$$

Supponiamo che v^+ sia un'autofunzione di P associata a μ (si veda (1)). Sia, per definizione, $v_{-1}^+ := 0$ e

$$(4) \quad \begin{cases} \delta_0^+ = \delta_0^+(\mu) := h^2 + 1 - 8\mu h \\ \delta_n^+ = \delta_n^+(\mu) := (2n+1)^2 h^2 + 2 - 8\mu h, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Allora i coefficienti di Fourier v_n^+ verificano la seguente relazione di ricorrenza:

$$(5) \quad v_{-1}^+ = 0, \quad v_{n+1}^+ = \delta_n^+(\mu) v_n^+ - v_{n-1}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nel seguito indicheremo con $\{v_n^+\}_n$ una generica soluzione di (5), dipendente da $\mu \in \mathbb{R}$; **non** supporremo che μ sia un autovalore di P . Per (5) esiste n_0 tale che

$$(6) \quad v_n^+ = v_{n_0+2}^+ \prod_{j=n_0+1}^{n-2} \delta_{j+1}^+ z_n, \quad \text{dove } z_0 := 1 - \frac{1}{\delta_0^+ \delta_1^+}, \quad z_n := 1 - \frac{\frac{1}{\delta_n^+ \delta_{n+1}^+}}{z_{n-1}}, \quad n > 0.$$

Per l'equazione (6) si ha che $\{z_n\}_n$ è una successione di coda per la frazione continua $K_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-\frac{1}{\delta_n^+ \delta_{n+1}^+}}{-1} \right)$ (usiamo la notazione standard), la quale è limite 1-periodica, di tipo loxodromico. Quindi $\{z_n\}_n$ converge a 0 oppure a 1. Da qui si ottiene il seguente

TEOREMA 1. – Sia $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\delta_n^+(\mu) \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e sia $\{v_n^+\}_n$ una soluzione di (5).

a) Se μ verifica

$$(7) \quad \delta_1^+ - \frac{1}{\delta_0^+} = \frac{1}{\delta_2^+ - \frac{1}{\delta_3^+}} = K_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{-\delta_n^+} \right)$$

allora μ è autovalore di P e v_n^+ sono i coefficienti di Fourier dell'autofunzione associata; inoltre $v_n^+ \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow +\infty$, più velocemente di qualunque potenza negativa di n ;

b) se μ non verifica (7) allora μ non è autovalore di P e $|v_n^+| \rightarrow +\infty$, quando $n \rightarrow +\infty$, più velocemente di qualunque potenza di n .

Si può dimostrare un risultato analogo nel caso in cui $\delta_m^+(\mu) = 0$ per $m \in \mathbb{N}$.

Stime per gli autovalori.

Nelle prossime argomentazioni seguiremo alcune idee presenti in [3]. Per (5) si ha che $\{v_n^+\}_{n \geq -1} = \{v_n^+(\mu)\}_{n \geq -1}$ è una successione di **polinomi ortogonali** in μ . Ogni v_n^+ ha n zeri reali e distinti, che indicheremo con $r_{n,1} \leq r_{n,2} \leq \dots \leq r_{n,n}$. Sia per definizione $r_{n,0} = -\infty$ e $r_{n,n+1} = +\infty$, è noto che $r_{n-1,i-1} < r_{n,i} < r_{n-1,i}$, per $i = 1, 2, \dots, n$, e per ogni $n \geq 1$, quindi $\{r_{n,i}\}_n$ è monotona decrescente. Definiamo $\Theta_n = v_n^+ - v_{n-1}^+$, e denotiamo con $\rho_{n,1} < \rho_{n,2} < \dots < \rho_{n,n}$, gli zeri reali e distinti di Θ_n .

Per la (4) esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che $|\delta_{n+1}^+(\mu)| > 2$ per ogni $\mu < r_{n,i}$ e per ogni $n \geq n_i$. Allora, se $n \geq n_i$ si ha $r_{n+1,i} \in [\rho_{n,i}, r_{n,i})$, e $\rho_{n+1,i} > \rho_{n,i}$, quindi $\{\rho_{n,i}\}_n$ è monotona decrescente, per $n \geq n_i$. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{n,i} = \mu_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_{n,i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Inoltre l'insieme $\{\mu_i, i > 0\}$ contiene tutti e soli gli autovalori di P . Quindi le successioni $\{r_{n,i}\}_n, \{\rho_{n,i}\}_n$ convergono all' i -simo autovalore di P , la prima dall'alto e la seconda dal basso.

Applicando il seguente Teorema a (5) si ottengono stime sugli autovalori “grandi” di P (esponiamo le stime relative al caso delle autofunzioni pari, tralasciando per brevità il caso analogo delle autofunzioni dispari).

TEOREMA 2 [Worpitzky]. – Sia $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$. Se $|a_n| \leq 1/4$ per ogni $n \geq 1$, allora $f = K_{n=1}^{+\infty}(a_n/1)$ converge. Inoltre, tutti gli approssimanti f_n di f soddisfano $|f_n| < 1/2$ e quindi $|f| \leq 1/2$.

TEOREMA 3 (Worpitzky). – Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n_0 \geq \frac{1}{2h^2} - 1$. Denotiamo $\text{spec}_+(P)$ l'insieme degli autovalori di P associati ad autofunzioni pari. Siano

$$\begin{cases} C_n = \frac{4(n+1)^2+1}{8}h + \frac{1}{4h} - \frac{\sqrt{4(n+1)^2h^4-1}}{4h} \\ D_n = \frac{4(n+1)^2+1}{8}h + \frac{1}{4h} + \frac{\sqrt{4(n+1)^2h^4-1}}{4h} \end{cases} \quad \begin{cases} E_n = \frac{(4n^2+1)}{8}h + \frac{1}{4h} + \frac{\sqrt{4n^2h^4+1}}{4h} \\ F_n = \frac{4(n+1)^2+1}{8}h + \frac{1}{4h} + \frac{\sqrt{4(n+1)^2h^4-1}}{4h}. \end{cases}$$

Allora, per ogni $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq \max\left\{n_0 + 1, \frac{1}{8h^4} - \frac{1}{2}\right\}$, si ha

$$\text{spec}_+(P) \cap [C_{n_0}, +\infty) \subset \left\{ \bigcup_{n=n_0}^{n_1-1} (D_n, C_{n+1}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{n=n_1}^{+\infty} (F_n, E_{n+1}) \right\}.$$

Si osservi che gli intervalli $(D_n, C_{n+1}), (F_n, E_{n+1})$ sono a due a due disgiunti, inoltre $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E_{n+1} - F_n) = 0$.

Un teorema analogo determina una successione di intervalli (la lunghezza dei quali tende a 0) la cui unione contiene gli autovalori relativi ad autofunzioni dispari; inoltre, a meno di un numero finito, questi intervalli e quelli determinati dal Teorema

7 sono a due a due disgiunti. Queste stime sono più precise dell'asintotica classica nota per un generico problema di Sturm-Liouville.

Osservazioni sull'autovalore minimo.

Applicando un teorema di Helffer e Sjöstrand (si veda [2], pp. 39 e 41) al nostro problema otteniamo uno sviluppo asintotico degli autovalori di P .

TEOREMA 4 [Helffer-Sjöstrand]. – Sia $\tilde{P} := 2hP$ (si veda (2)). Sia $\tilde{P}_0$ l'oscillatore armonico $(\tilde{P}_0(h)f)(x) = -h^2 f''(x) + \frac{1}{4} x^2 f(x)$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\{E_n\}_n := \left\{ \frac{2n+1}{2} \right\}_n$ la successione di autovalori di $\tilde{P}_0(1)$. Si fissi $0 < C_0 \notin \{E_0, E_1, \dots\}$ e sia $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che $E_{N_0-1} < C_0 < E_{N_0}$. Allora esiste $h_0 > 0$ tale che, per $0 < h \leq h_0$, $\tilde{P}$ ha precisamente N_0 autovalori, $0 < \tilde{\lambda}_0(h) \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_{N_0-1}(h)$, in $[0, C_0 h]$. Inoltre $\tilde{\lambda}_n$ ammette lo sviluppo asintotico

$$(8) \quad \tilde{\lambda}_n(h) \sim h(E_n + a_1 h + a_2 h^2 + \dots), \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad h \rightarrow 0^+.$$

È interessante chiedersi se questa particolare applicazione del teorema più generale sopra citato possa essere dimostrata nel nostro caso utilizzando tecniche più semplici.

Diamo una risposta parziale a questa domanda, analizzando il caso dell'autovalore minimo di $\tilde{P}$, che indicheremo con $\tilde{\mu}_0$. In particolare si ottiene che $\tilde{\mu}_0(h)$ è **monotona in h , quindi esiste $\lim_{h \rightarrow 0^+} \tilde{\mu}_0(h)$** . Si noti che il limite $h \rightarrow 0^+$ non è un limite perturbativo per il problema, quindi non si possono usare direttamente i risultati classici della Teoria delle Perturbazioni.

Gli strumenti fondamentali utilizzati per ottenere la monotonia di $\tilde{\mu}_0(h)$ sono stati la Teoria delle Perturbazioni (usando come parametro perturbativo $|h - h_0|$) le frazioni continue e l'identità di Picone sulle soluzioni di equazioni differenziali di secondo ordine. Per una descrizione più dettagliata di questi argomenti si veda [1].

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANSALONI S., *On the spectrum of a parameter-dependent Sturm-Liouville problem*, Kyushu J. Math., in pubblicazione.
- [2] DIMASSI M. and SJÖSTRAND J., *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math. Society Lecture Notes, **268** (1999), Cambridge University Press.
- [3] NEVES A. G. M., *Upper and lower bounds on Mathieu characteristic numbers of integer orders*, Commun. Pure Appl. Anal., **3** (2004), 447-464.
- [4] PARMEGGIANI A. and WAKAYAMA M., *Non-commutative harmonic oscillators-I*, Forum Mathematicum, **14** (2002), 539-604.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

e-mail: orizzontedeglieventi@yahoo.it

Dottorato in Matematica

(sede amministrativa: Università di Bologna) - Ciclo XIX

Relatore di tesi: Prof. Alberto Parmeggiani, Università di Bologna