La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Maria Emilia Amendola

Soluzioni di viscosità di equazioni ellittiche del secondo ordine

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 203–206.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_203_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 203-206

Soluzioni di viscosità di equazioni ellittiche del secondo ordine

MARIA EMILIA AMENDOLA

1. – Motivazioni.

Le equazioni differenziali ellittiche del secondo ordine in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ entrano in gioco in un gran numero di problemi fisici, per esempio in fluidodinamica ed in elettromagnetismo.

Nel caso di dati discontinui la teoria classica delle soluzioni di classe C^2 risulta insufficiente e si ricorre in generale alle soluzioni forti negli spazi di Sobolev $W^{2,p}$.

Negli ultimi decenni, anche sotto l'impulso dei problemi di controllo stocastico e dei giochi differenziali, si è sviluppata la teoria delle soluzioni di viscosità, che consente di considerare anche soluzioni scarsamente regolari.

È noto che, quando si indebolisce la regolarità delle soluzioni, si semplifica il problema dell'esistenza, ma si complica quello dell'unicità. Lo strumento chiave per affrontare i problemi di unicità per equazioni differenziali ellittiche del secondo ordine è senz'altro il Principio di Massimo (debole) secondo il quale

$$u \le 0 \qquad \text{su } \partial\Omega \ \Rightarrow \ u \le 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

Nel caso lineare tale principio fornisce immediatamente un Teorema di Confronto. Nel caso non lineare, invece, il confronto tra due soluzioni è in genere più complicato.

Il vantaggio della definizione di soluzione di viscosità sta proprio nel consentire, in modo naturale, di confrontare soprasoluzioni e sottosoluzioni.

2. – Operatori ellittici e soluzioni di viscosità.

Adesso e nel seguito indicheremo con S_n lo spazio delle matrici simmetriche, con Du e D^2u rispettivamente il gradiente e la matrice hessiana di u. Usiamo in S_n la relazione d'ordine parziale indotta dalle matrici semidefinite positive. Salvo avviso contrario supporremo l'operatore, F, continuo nei suoi argomenti.

Dato $M = (m_{ij}), N = (n_{ij}) \in S_n$, con $M \ge 0$ si intende che

$$\sum m_{ij}\eta_i\eta_j \ge 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^n$$

mentre $M \ge N$ significa $M - N \ge 0$.

DEFINIZIONE 2.1. – *Sia* $F : S_n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$. F *è un operatore* ellittico degenere *se* $M \le N \Rightarrow F(M, p, r, x) \le F(N, p, r, x)$.

DEFINIZIONE 2.2. – *F si dice* uniformemente ellittica, *con* costanti di ellitticità λ *e* Λ*, tali che* $0 < \lambda \leq \Lambda$*, per ogni* $M \in S_n$ *e per ogni* $(p, r, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega$ *se*

$$\lambda \|N\| \leq F(M + N, p, r, x) - F(M, p, r, x) \leq \Lambda \|N\| \qquad \forall N \geq 0.$$

In questo caso $\|N\|$ è la norma (L^2, L^2) di N, uguale al $\sup\{|Nx| \mid |x| = 1\}$ ossia al massimo dei moduli degli autovalori di N.

Notiamo che l'uniforme ellitticità implica la Lipschitzianità nonchè la crescenza di F rispetto alla variabile M.

Nella classe degli operatori ellittici ve ne sono due estremali, noti appunto rispettivamente come *Operatori Massimale e Minimale di Pucci*,

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = \Lambda \operatorname{tr}(X^+) - \lambda \operatorname{tr}(X^-), \tag{1}$$

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) = \lambda \operatorname{tr}(X^+) - \Lambda \operatorname{tr}(X^-), \tag{2}$$

dove X^+ ed X^- rappresentano la parte positiva e la parte negativa della matrice X, ricordando che ogni matrice simmetrica X si può decomporre in unico modo come $X = X^+ - X^-$ dove $X^+, X^- \geq 0$ e $X^+X^- = 0$.

Possiamo, infine, per completare questa panoramica generale, dare la seguente

DEFINIZIONE 2.3. – *Una* sottosoluzione di viscosità *dell'equazione* $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ *è una funzione* $u \in USC(\Omega)$ *tale che:*

$\forall x_0 \in \Omega$ *e* $\forall \phi$ *di classe* C^2*, tali che* $u - \phi$ *ha un massimo locale in* x_0*, risulta*

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), u(x_0), x_0) \geq 0.$$

Una soprasoluzione di viscosità *dell'equazione* $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ *è una funzione* $u \in LSC(\Omega)$ *tale che:*
$\forall x_0 \in \Omega$ *e* $\forall \phi$ *di classe* C^2*, tali che* $u - \phi$ *ha un minimo locale in* x_0*, risulta*

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), u(x_0), x_0) \leq 0.$$

Una funzione continua u *è* soluzione di viscosità *di* $F(D^2u, Du, u, x) = 0$ *se e solo se è sia sottosoluzione che soprasoluzione di viscosità.*

3. – Risultati fondamentali.

Sono stati considerati operatori ellittici del tipo $F(x, t, p, X) = f$, soddisfacenti le seguenti condizioni di struttura

$$F(x, t, p, X) \geq \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(X) - b(x)|p|^q, \tag{3}$$

$$F(x, t, p, X) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(X) + b(x)|p|^q, \tag{4}$$

dove $\mathcal{P}^{\pm}$ sono gli operatori estremali di Pucci, $b(x)$ è una funzione continua e l'esponente q varia in $[1, 2]$, in modo tale che il termine gradiente abbia una crescita superlineare, al massimo quadratica.

Per quanto riguarda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ imporremo che esso sia un dominio $\boldsymbol{wG}$, vedi [2] e [3], nel senso che deve essere verificata per ogni $y \in \Omega$ la seguente condizione (G_σ):

dato $0 < \sigma < 1$, *esiste una palla* $B = B(y)$ *tale che*

$$y \in B, \quad |B \backslash \Omega_y| \geq \sigma |B|, \tag{5}$$

dove Ω_y *è la componente connessa di* $B \backslash \partial\Omega$ *contenente* y.

Chiameremo domini di tipo cilindrico e conico rispettivamente i domini $\boldsymbol{wG}$ tali che $R(y) = O(1)$ ed $R(Y) = O(|y|)$ per $|y| \to +\infty$. Esempi del primo tipo sono i domini di misura finita, i cilindri, il complemento di un reticolo periodico di palle, mentre invece i coni e il complemento, nel piano, della spirale logaritmica sono esempi del secondo tipo.

Enunceremo ora i principali risultati ottenuti.

TEOREMA 3.1 (Principio del Massimo) ([1]). – *Siano* $\sigma < 1$ *un numero reale positivo e* $1 \leq q \leq 2$. *Siano fissati un dominio* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ed un sottoinsieme chiuso* $H \subset \mathbb{R}^n$ *tali che:*

- *se* $\Omega \backslash H \neq \emptyset$, *allora vale il Principio del Massimo in ogni componente connessa di* $\Omega \backslash H$;
- *per ogni* $y \in \Omega \cap H$ *esiste una palla* B *tale da soddisfare la condizione* $\boldsymbol{G}_\sigma$.

Sia data una soluzione di viscosità $w \in USC(\bar{\Omega})$ *di* $F(x, w, Dw, D^2w) \geq 0$ *e si supponga verificata la condizione di struttura* (4), *con* $b \in C(\bar{\Omega})$, *tale che* $b(x) = O(1/|x|^{2-q})$.

Se $w \leq 0$ *su* $\partial\Omega$ *e* $\sup w < +\infty$ *in* Ω, *allora* $w \leq 0$ *in* Ω.

Questo implica il Principio del Massimo in una classe più ampia dei domini $\boldsymbol{wG}$, come per esempio il piano tagliato.

Consideriamo adesso un dominio di forma parabolica Ω, soddisfacente la condizione $\boldsymbol{wG}$ con $R(y) = O(|y|^a)$. Basandosi sulle osservazioni fatte in [8], eventualmente passando ad un $r_y \leq R(y)$, si può supporre che la condzione G_σ si soddisfatta con $|B \setminus \Omega_y| = \sigma|B|$. Avremo così la seguente stima di Alexandroff-Bakelman-Pucci.

TEOREMA 3.2 (Stima di Alexandroff-Bakelmen-Pucci) ([1]). – *Sia* $0 < \sigma, \tau < 1$, $\tau' > 1$, $1 \leq q \leq 2$ *ed* $N > 0$. *Sia* Ω *un dominio* $\boldsymbol{wG}$ *di forma parabolica, tale che la condizione* G_σ *sia verificata per ogni* $y \in \Omega$, *con* $R(y) = O(|y|^a)$, $0 \leq a \leq 1$. *Assumiamo che il nostro operatore,* F, *soddisfi la condizione di struttura* (4) *con* $b, f \in C(\overline{\Omega})$. *Inoltre, supponiamo che*

$$b_0 := \sup_{\Omega} |b(x)\Big(1 + |x|^{a(2-q)}\Big) < +\infty.$$

Se $w \in USC(\overline{\Omega})$ è una soluzione di viscosità di $F(x, w, Dw, D^2w) \geq f$, nel senso della viscosità, tale che $w \leq N$ in Ω e $w \leq 0$ su $\partial\Omega$, allora

$$\sup_{\Omega} w \leq C \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{y \in \Omega; |y| \geq \varepsilon r_y} r_y \|f^-\|_{L^n(\Omega \cap B_{\tau\varepsilon r_y, \tau' r_y})}$$

dove C è una costante positiva dipendente da n, λ, Λ, $b_0 N^{q-1}$, σ, τ e τ'.

Questo risultato estende i risultati ottenuti in [5], [6], in riferimento alle equazioni completamente non lineari, nelle situazioni limite di domini cilindrici/conici e con termini graziente di tipo lineare/quadratico.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMENDOLA M. E., ROSSI L. and VITOLO A., *Harnack inequalities and ABP estimates for nonlinear second order elliptic equations in unbounded domains*, in corso di pubblicazione su Abstract and Applied Analysis.

[2] CABRÈ X., *On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and reversed Holder inequalities for solutions of elliptic and parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **48** (1995), 539-570.

[3] CAFAGNA V. and VITOLO A., *On the maximum principle for second-order elliptic operators in unbounded domains*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **334** (2002).

[4] CAFFARELLI L.A. and CABRÈ X., *Fully Nonlinear Elliptic Equations,* American Mathematical Society Colloquium Publications, **43** (1995).

[5] CAPUZZO DOLCETTA, I. and VITOLO A., *A Qualitative Phragmèn-Lindelöf Theorem for Fully Nonlinear Elliptic Equations* (2006) Preprint.

[6] CAPUZZO DOLCETTA I. and VITOLO A., *On the Maximum Principle for Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Elliptic Equations in General Domains* (2006) Preprint.

[7] VITOLO A., *On the maximum principle for complete second-order elliptic operators in general domains*, J. Differential Equations, **194** No. 1 (2003), 166-184.

[8] VITOLO A., *A Note on the Maximum Principle for Complete Second-Order Elliptic Operators in General Domains*, Acta Math. Sin., **23**, no. 11 (2007), 1955-1966.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno
e-mail: emamendola@unisa.it
Dottorato in Matematica
(sede amministrativa: Università di Salerno) - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Vitolo, Università degli Studi di Salerno