La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERT J. AUMANN

Essere d'accordo di non essere d'accordo

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.1, p. 87–91.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_87_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Aprile 2008, 87-91

Essere d'accordo di non essere d'accordo (*)

ROBERT J. AUMANN

Se due persone hanno la stessa distribuzione di probabilità iniziale e le loro distribuzioni di probabilità a posteriori per un evento A sono conoscenza comune, allora queste distribuzioni devono essere uguali. Questo vale anche se esse basano la loro valutazione a posteriori su informazioni molto diverse. In poche parole, persone con la stessa distribuzione iniziale *non possono essere d'accordo di non essere d'accordo.*

Pubblichiamo questo risultato con una certa riluttanza perché, una volta costruita la struttura giusta, esso è matematicamente banale. Intuitivamente, tuttavia, il risultato non è così ovvio; e si rivela di un certo interesse in aree in cui le opinioni delle persone sulle opinioni delle altre persone sono importanti, come nella teoria dei giochi ([1]) e nell'economia dell'informazione ([2]). Un esempio "concreto" che può chiarire la questione (e che può essere letto a questo punto) si trova alla fine dell'articolo.

Il concetto chiave è quello di "conoscenza comune." Indichiamo con 1 e 2 due individui. Quando diciamo che un evento è "conoscenza comune" intendiamo di più del semplice fatto che sia 1 sia 2 ne siano al

(*) Questo articolo è la traduzione in lingua italiana del lavoro di Robert J. Aumann, "Agreeing to disagree", *The Annals of Statistics,* vol. 4, n. 6:1236-1239 (1976). Si ringraziano gli Annals of Statistics per averci concesso il diritto di traduzione e riproduzione. Traduzione di M. Cristina Molinari.

([1]) Cfr. Harsanyi (1967-68); anche Aumann (1974), specialmente Section 9j (pagina 92) in cui la domanda a cui si risponde qui è stata sollevata la prima volta.

([2]) Cfr., per esempio, Radner (1968) e (1972); anche la rassegna di Grossman e Stiglitz (1976) e i lavori ivi citati.

corrente; chiediamo anche che 1 sappia che 2 lo conosce, che 2 sappia che 1 lo conosce, che 1 sappia che 2 sa che 1 lo conosce e così via. Per esempio, se 1 e 2 sono entrambi presenti quando l'evento accade e ciascuno vede l'altro, allora l'evento diventa conoscenza comune. Nel nostro caso, se 1 e 2 si dicono qual è la loro distribuzione a posteriori e si fidano uno dell'altro, allora le due distribuzioni sono conoscenza comune. Il risultato non è vero se assumiamo semplicemente che le persone conoscano la distribuzione a posteriori di ciascuno.

Formalmente, sia $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ uno spazio di probabilità, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ partizioni di Ω il cui *join* (3) $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ consiste di eventi non nulli. (4) Interpretiamo $(\Omega, \mathcal{B})$ come lo spazio degli stati del mondo, p come la distribuzione di probabilità iniziale di 1 e 2, e $\mathcal{P}_i$ come la partizione dell'informazione di i; cioè, se il vero stato del mondo è ω, allora i è informato dell'elemento $\boldsymbol{P}_i(\omega)$ di $\mathcal{P}_i$ che contiene ω. Dato $\omega \in \Omega$, un evento E si dice *conoscenza comune in* ω se E include l'elemento del *meet* (5) $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ che contiene ω. Mostreremo in seguito che questa definizione è equivalente a quella informale data sopra.

Sia A un evento; indichiamo con $\boldsymbol{q}_i$ la distribuzione di probabilità a posteriori $p(A|\mathcal{P}_i)$ di A data l'informazione di i; cioè, se $\omega \in \Omega$, allora $\boldsymbol{q}_i(\omega) = p(A \cap \boldsymbol{P}_i(\omega))/p(\boldsymbol{P}_i(\omega))$.

Proposizione. *Siano* $\omega \in \Omega$ *e* q_1 *e* q_2 *due numeri. Se è conoscenza comune in* ω *che* $\boldsymbol{q}_1 = q_1$ *e* $\boldsymbol{q}_2 = q_2$, *allora* $q_1 = q_2$.

Dimostrazione. Sia P l'elemento di $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ che contiene ω. Scriviamo $P = \bigcup_j P^j$, dove P^j sono elementi disgiunti di $\mathcal{P}_1$. Poiché $\boldsymbol{q}_i = q_1$ su tutto P, abbiamo $p(A \cap P^j)/p(P^j) = q_1$ per tutti i j; quindi $p(A \cap P^j) = q_1 p(P^j)$. Sommando su tutti i j otteniamo $p(A \cap P) = q_1 p(P)$. In modo analogo $p(A \cap P) = q_2 p(P)$, e quindi $q_1 = q_2$. Questo completa la dimostrazione.

Per vedere che la definizione formale di "conoscenza comune" è

(3) La partizione meno fine che contiene $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.
(4) Eventi la cui probabilità (iniziale) non si annulla.
(5) La più fine partizione contenuta in $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

equivalente alla descrizione informale, dato $\omega \in \Omega$, diciamo che un membro ω' di Ω è *raggiungibile da* ω se esiste una sequenza $P^1, P^2, \ldots, P^k$ tale che $\omega \in P^1$, $\omega' \in P^k$, e i P^j consecutivi si intersecano e appartengono alternativamente a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Supponiamo che ω sia il vero stato del mondo, $P^1 = \boldsymbol{P}_1(\omega)$ ed E sia un evento. Dire che 1 "conosce" E significa che E include P^1. Dire che 1 sa che 2 conosce E significa che E include tutti i P^2 in $\mathcal{P}_2$ che intersecano P^1. Dire che 1 sa che 2 sa che 1 conosce E significa che E include tutti i P^3 in $\mathcal{P}_1$ che intersecano i P^2 in $\mathcal{P}_2$ che intersecano P^1. E così via. Così tutte le frasi della forma "i sa che i' sa che i sa $\ldots E$" (dove $i' = 3 - i$) sono vere se e solo se E contiene tutti gli ω' raggiungibili da ω. Ma l'insieme di tutti gli ω' raggiungibili da ω è un membro di $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$; pertanto l'equivalenza desiderata è dimostrata.

Il risultato non vale quando le persone conoscono semplicemente le distribuzioni a posteriori degli altri. Si supponga che Ω abbia quattro elementi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ con uguale probabilità (iniziale), $\mathcal{P}_1 = \{\alpha\beta, \gamma\delta\}$, $\mathcal{P}_2 = \{\alpha\beta\gamma, \delta\}, A = \alpha\delta$ e $\omega = \alpha$. Allora 1 sa che $\boldsymbol{q}_2$ è $\dfrac{1}{3}$ e 2 sa che $\boldsymbol{q}_1$ è $\dfrac{1}{2}$; ma 2 pensa che 1 possa non sapere quanto è $\boldsymbol{q}_2$ $\left(\dfrac{1}{3} \text{ o } 1\right)$.

Degna di nota è l'assunzione implicita che le partizioni stesse $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ siano conoscenza comune. In realtà, questo non costituisce una perdita di generalità. Inclusa nella descrizione completa di uno stato ω del mondo è il modo in cui l'informazione viene comunicata ai due individui. Questo implica che gli insiemi di informazione $\boldsymbol{P}_1(\omega)$ e $\boldsymbol{P}_2(\omega)$ siano effettivamente definiti in modo non ambiguo come funzioni di ω e che queste funzioni siano conosciute da entrambi i giocatori.

Consideriamo ora l'ipotesi di distribuzioni iniziali di probabilità uguali per individui diversi. John Harsanyi (1968) ha sostenuto in modo eloquente che differenze nelle probabilità soggettive dovrebbero essere fatte risalire unicamente a differenze nell'informazione–non ci sono motivi razionali per persone che hanno ricevuto esattamente la stessa informazione di avere probabilità soggettive differenti. Questo, ovviamente, è equivalente all'ipotesi di distribuzioni di probabilità iniziali identiche. Il risultato di questo lavoro potrebbe essere considerato come un argomento contrario, poiché ci sono persone che rispettano le opinioni degli altri e tuttavia dissentono profondamente sulle probabilità soggettive. Ma ciò non è sufficiente: anche persone che rispettano l'intelligenza dell'altro possono attribuire le differenze agli errori dell'altro nel calcolare le distribuzioni a posteriori. Naturalmente non intendiamo semplicemente errori di aritmetica ma piuttosto sviste sistematiche come quelle discusse da Tversky e Kahnemann (1974). In una conversazione privata, Tversky ha suggerito che le persone possono sbagliare con regolarità anche a causa di fattori psicologici che possono far loro trascurare le informazioni spiacevoli o quelle che non corrispondono alle opinioni formate precedentemente.

C'è una letteratura notevole sul raggiungimento di un accordo circa le probabilità soggettive; un lavoro recente è DeGroot (1974) dove si può trovare una bibliografia sull'argomento. Un metodo "pratico" è la tecnica di Delphi (si veda, per esempio, Dalkey (1972)). Mi sembra che la dottrina di Harsanyi sia implicita in molta di questa letteratura; riconciliare le probabilità soggettive ha senso se si tratta di scambiare implicitamente informazioni ma non se stiamo parlando di differenze "innate" nelle probabilità iniziali. Il risultato di questo articolo può essere considerato un fondamento teorico per la riconciliazione delle probabilità soggettive.

Come illustrazione, supponiamo che 1 e 2 abbiano una distribuzione iniziale uniforme sul parametro di una moneta e che A sia l'evento che nel prossimo lancio della moneta esca T (testa). Supponiamo che 1 e 2 possano fare un lancio ciascuno prima dell'esperimento e che i due lanci risultino in T e C (croce) rispettivamente. Se l'informazione di ciascuna persona consiste solo nell'esito del proprio lancio, allora le probabilità a posteriori per A saranno rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Se ciascuno informa l'altro della sua distribuzione finale, allora entrambi concluderanno che i lanci precedenti sono stati una volta T e una volta C e le due probabilità finali saranno riviste e corrette in $\frac{1}{2}$.

Supponiamo ora che ogni persona possa fare più lanci prima dell'esperimento ma che nessuno sappia quanti lanci può fare l'altra persona. Per esempio, entrambi potrebbero fare quattro lanci, ottenendo $TTTC$ per 1 e $TCCC$ per 2. Dopo i lanci, ciascuno informa l'altro che le probabilità a posteriori sono rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$. Ora queste distribuzioni finali possono derivare da una singola osservazione, da quattro osservazioni o di più. Poiché non si sa su quali osservazioni si basa la distribuzione finale, uno potrebbe essere propenso a dare più peso alle proprie osservazioni. Qualche revisione sarebbe certamente opportuna anche in questo caso; ma non è detto che essa porti necessariamente a distribuzioni finali uguali.

Probabilmente la revisione sarebbe basata sulla distribuzione iniziale che ciascun individuo ha sul numero di lanci a propria disposizione e su quello a disposizione dell'altro individuo. Per ipotesi queste due distribuzioni iniziali sono uguali, ma ciascuna persona ottiene informazioni private addizionali — vale a dire il numero effettivo di lanci a lui concessi. Usando la distribuzione iniziale e l'informazione che le probabilità a posteriori sono, rispettivamente, $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$, si possono calcolare due nuove distribuzioni finali. Se ciascun giocatore informa l'altro di questa nuova distribuzione finale, potrebbe essere necessaria una nuova revisione. Il nostro risultato implica che il processo di scambiarsi informazioni sulle distribuzioni a posteriori di A continuerà fino a quando le distribuzioni finali saranno uguali.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. J. Aumann, *Subjectivity and correlation in randomized strategies*. J. Math. Econom., **1** (1974), 67-96.

[2] N. C. Dalkey, *Studies in the Quality of Life.* Lexington Books, Lexington, Mass. 1972.

[3] M. H. DeGroot, *Reaching a consensus*. J. Amer. Statist. Assoc., **69** (1959), 118-121.

[4] S. J. Grossman - J. E. Stiglitz, *Information and competitive price systems*. Amer. Econom. Rev., **46** (1976), 246-253.

[5] J. Harsanyi, *Games of incomplete information played by Bayesian players, Parts I-III*. Management Sci., **14** (1967-1968), 159-182, 320-334, 486-502.

[6] R. Radner, *Competitive equilibrium under uncertainty*. Econometrica, **36** (1968), 21-58.

[7] R. Radner, *Existence of equilibrium plans, prices, and price expectations in a sequence of markets*. Econometrica, **40** (1972), 289-304.

[8] A. Tversky - D. Kahneman, *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Science, **185** (1974), 1124-1131.

Robert J. Aumann,
Center for the Study of Rationality
and Department of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
E-mail: nobel@huji.ac.il.