# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Fabrizio Catanese

## Matematica: scienza, gioco od arte?

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **1** (2008), n.1, p. 1–21.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_1_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Aprile 2008, 1-21

# Matematica: scienza, gioco od arte?

FABRIZIO CATANESE

Raccogliendo il suggerimento dei colleghi Marco Andreatta ed Alberto Valli del Comitato Direttivo del C.I.R.M. , ho accettato qui (1) la sfida di discutere l'arduo tema del rapporto tra matematica e società, tema che da alcuni anni è di interesse centrale per la nuova serie del Bollettino della Unione Matematica Italiana.

Questo tema mi sta particolarmente a cuore, e non sono in questo isolato; ad esempio il Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi della Scuola Normale di Pisa ha scelto come suo motto: "why should anybody but mathematicians care about the standing of mathematics in the world?" (se non sta a cuore ai matematici il ruolo della matematica nella società, a chi allora?).

D'altra parte sia la matematica che la società si evolvono a ritmi vertiginosi, ed ogni discussione ed interrogativo sul futuro della scienza non può prescindere da analoghe domande sul futuro della umanità: moralità ed etica nella scienza sono profondamente influenzate dalle tendenze della nostra vita civile a stimolare la competizione oltre limiti accettabili, e questa competizione a livello internazionale e planetario ci fa temere che nonostante tutto il nostro sviluppo scientifico possiamo stare correndo verso un nuovo Medio Evo (che fu tra l'altro caratterizzato da un impetuoso sviluppo della tecnologia e da una relativa stagnazione dello sviluppo scientifico).

(1) Questo articolo è una rielaborazione di una conferenza di carattere generale sulla matematica, rivolta anche a non matematici, tenuta, in qualità di direttore del C.I.R.M. di Trento, in occasione della giornata matematica del C.I.R.M. del 3 ottobre 2006.

Voglio però lasciar perdere domande allarmate come: saranno gli scienziati i nuovi monaci del nuovo medio evo, od i nuovi proletari del nuovo mondo globalizzato?

Infatti, per quanto interessanti tali domande siano, un collega inglese ([2]) giustamente all'inizio di un suo lavoro cita William Shakespeare, che nella commedia 'The taming of the shrew' (la bisbetica domata), dice

"No profit grows where is no pleasure taken" (il profitto cresce solo se è accompagnato dal piacere).

Il piacere nasce sì dalla soddisfazione di conoscere, ma è anche legato in modo indissolubile colla facoltà di giocare e con le nostre tendenze e soddisfazioni estetiche ed artistiche.

Il motivo principale del mio assunto è il seguente: la matematica è una componente essenziale e primaria di tutta la nostra cultura, come è stato affermato già da Galileo nei suoi Dialoghi quando scriveva che il libro della natura è scritto in caratteri matematici. Oggigiorno la matematica è divenuta anche una grande opera ed impresa intellettuale di carattere più collettivo che individuale. Il suo edificio complesso, al pari dell'edificio della società, abbisogna di molteplici competenze e risorse intellettuali, che spaziano da un livello di raffinatezza artigianale a quello di pura genialità creativa ed artistica, e di una struttura organizzativa portante, che richiede una ricerca ed una riflessione profonda ed innovativa: ma queste energie non possono essere messe in moto senza una partecipazione ricca di remunerazioni, come il gioco ad esempio può dare.

I legami fra matematica, arte e gioco sono tra l'altro stati evidenziati dalla bella Mostra Matetrentino, organizzata da alcuni docenti del Dipartimento di Matematica della Università di Trento e 'benedetta' (sponsorizzata) dal C.I.R.M.

Essa, partendo dall'immagine pregnante delle colonne 'annodate' della Cattedrale di Trento, ci conduce attraverso i molteplici legami coll'arte figurativa:

([2]) Miles Reid

Fig. 1. – Le colonne ‘annodate’ della Cattedrale di Trento. Fotografia tratta dall’archivio immagini del Centro *matematita* - Unità Città Studi - Dipartimento di Matematica, Università di Milano (http://www.matematita.it/materiale) e gentilmente messa a disposizione dal dr. Domenico Luminati.

• la geometria degli ornamenti nella arte greca, islamica e rinascimentale (**l’arte è matematica, e se non ne siete convinti ancora, pensate alla musica ed a come è scritta in linguaggio matematico**)

• la doppia valenza di artisti e scienziati di personalità come Piero della Francesca (autore di un saggio geometrico sui solidi Platonici), e Leon Battista Alberti, autore di saggi sulla teoria della Prospettiva, che sarebbe poi stata centrale per gli sviluppi successivi di nuove geometrie non Euclidee

• il ritorno prorompente della matematica come creatrice di nuova arte, si vedano le riletture in chiave grafica di Escher dei paradossi della matematica astratta, e la sua ornamentazione calligrafica delle meravigliose immagini che provengono dalle pavimentazioni regolari del piano iperbolico (**la matematica è arte**)

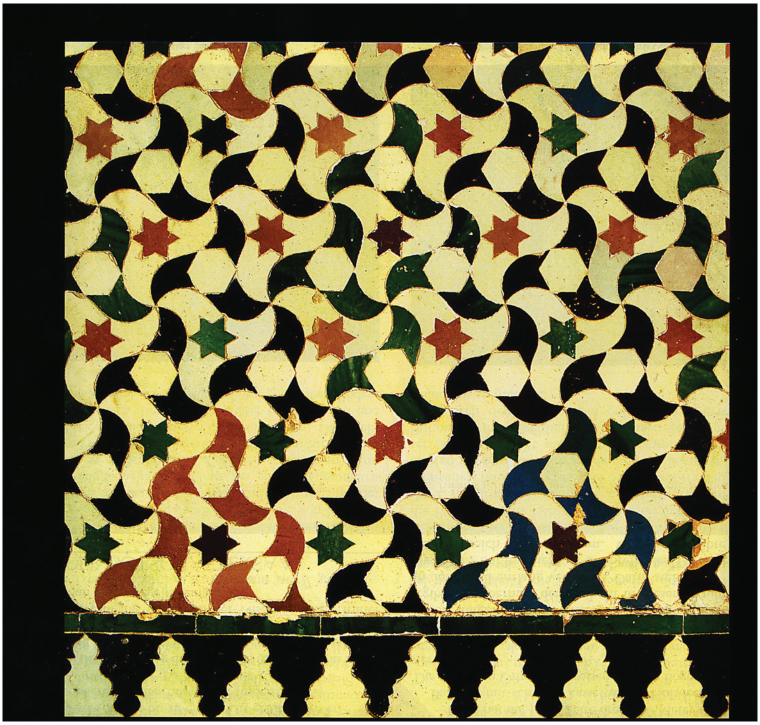

Fig. 2. – Un mosaico dell'Alhambra di Granada.

- la diretta commercializzazione del prodotto matematico come oggetto di affascinante bellezza, come nel caso degli oggetti frattali sia di tipo Julia -Fatou che di tipo Mandelbrot (vedi il libro edito da Boringhieri 'La bellezza dei frattali')
- la intrinsica bellezza delle superficie di ordine superiore scoperte negli ultimi due secoli.

Un difetto che abbiamo noi matematici è il nostro tono apologetico, nel cercare di mostrare che la matematica è bella ed utile. Ci crediamo obbligati a spiegare che cosa è la matematica ad un uditorio che spesso o si lamenta della propria inettitudine al calcolo, o si vanta della propria ignoranza. Qualcuno però ci riesce, come Richard Courant nel suo libro, scritto ormai più di 50 anni fa insieme a Robbins, ed intitolato 'Che cos'è la matematica?'.

Nessuno odia il calcio perché non è un campione, o perché quando ha

Fig. 3. – Pesci nel piano iperbolico secondo Escher. M.C. Escher's "Circle Limit III" 

giocato la prima partita la sconfitta è stata assai pesante. È vero che una buona metà della popolazione si chiede ancora cosa fanno "quei 22 cretini che corrono dietro ad un pallone", ma l'altra metà ritiene che il calcio sia un'arte, e crede perlopiù di essere esperta e sapiente sull'argomento, e ne discute con accanimento il lunedì ed anche gli altri giorni della settimana. Gli uomini si divertono, ma ci soffrono anche.

Provate a chiedere ad un tifoso di spiegare che cosa è il calcio: se siete maschio vi prenderà per un rammollito, se siete donna, avrà un beffardo sorriso di commiserazione. Se voi insistete ad avere una definizione del gioco del calcio, ed il tifoso non è nè un matematico nè un filosofo, egli sarà presto in grande difficoltà, e l'unica cosa sensata che farà sarà di portarvi a vedere una partita o dal vivo a alla televisione.

Poiché la matematica non ha molto spazio nella nostra televisione, proviamo allora a dare un esempio elementare di matematica dal vivo,

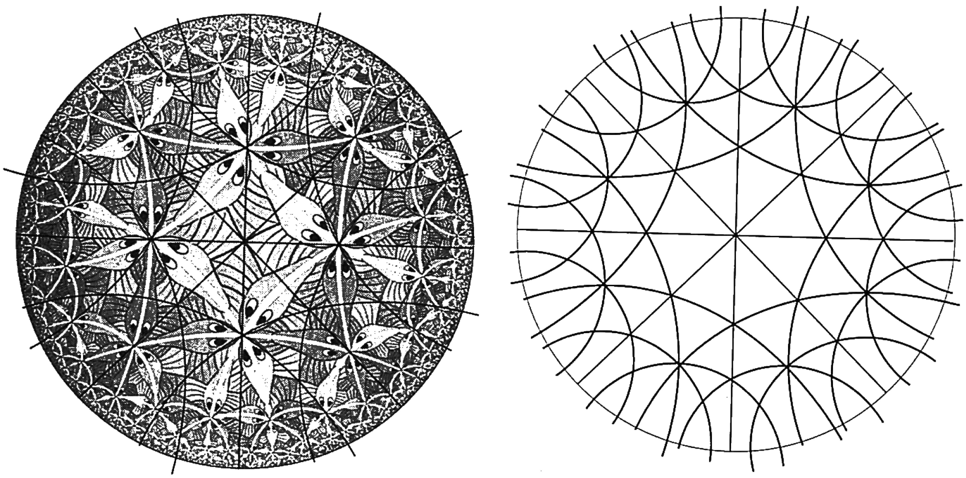

Fig. 4. – John Hubbard ci fa vedere come Escher ha realizzato il disegno dei pesci nel piano iperbolico partendo da una pavimentazione del piano iperbolico con triangoli di angoli $\pi/4, \pi/3, \pi/3$, da: John Hubbard, *Teichmüller Theory*, Matrix Edition, Ithaca (NY), 2006, pag. 101. Per gentile concessione John Hubbard e Matrix Edition.

ed attraverso il gioco. Anche il calcio ha le sue geometrie e le sue tattiche ed algoritmi (tra l'altro difficili da matematizzare proprio per l'influenza di molti fattori esterni, quali amori, eccessi e debolezze umane degli atleti), ma i motivi del suo successo risiedono in parte nel fatto che è un gioco, e per di più assai competitivo.

Il desiderio di successo è una molla primaria anche in tenera età, e se volete sensibilizzare i bambini al pensare logico, il gioco è lo strumento ideale. Il gioco logico è il migliore allenamento per il nostro cervello, che al pari dei nostri muscoli ha bisogno di esercizio continuo. Ve ne darò ora un esempio concreto, il gioco delle 8 carte che ha questa estate avvinto le mie piccole bimbe Isabella e Daria, di 5 e 7 anni rispettivamente.

Il gioco, assai conosciuto in Germania, si svolge così: io chiedo ad una seconda persona di scegliere in segreto una carta da un mazzo di 8. Gli mostro poi per tre volte le 8 carte, in due gruppi da 4, e gli chiedo ogni volta se la carta prescelta stia nel primo o nel secondo gruppo di 4 carte. Alla fine faccio finta di essere un mago (le mie bimbe ancora di più) e poi sono in grado di dire quale è la carta prescelta.

Per una persona che riflette, tipo Sherlock Holmes, il fatto non è poi così sconvolgente: è chiaro che ci sono 8 carte, dopo la prima risposta 4 sono da scartare, e se le potessi effettivamente scartare, il gioco sarebbe facilissimo: la seconda volta dividerei in due mazzi da due le due carte rimanenti, poi alla fine sarei ridotto con solo due carte in mano, e la terza risposta mi direbbe quale è la carta prescelta.

Da un punto di visto teorico, è chiaro che il gioco funziona perché ho tre domande ed ho $8 = 2 \times 2 \times 2$ carte. Se avessi più di 8 carte, il gioco non funzionerebbe sicuramente, perché dividendo tre volte a metà il mazzo potrei restare con più di una carta.

L'aspetto più interessante, almeno per chi è dotato di curiosità, è l'aspetto algoritmico, cioè come il gioco effettivamente funziona senza mai buttare via le carte ormai dichiarate come non prescelte. Si fa così: si mettono le carte in ordine, e si chiede se la carta prescelta stia fra le prime 4. In caso che la risposta sia negativa, si scambiano le ultime 4 carte (mantenendo l'ordine relativo) con le prime 4. Poi si rivoltano le carte simultaneamente, e si mette una carta a sinistra, una a destra, e così via , fino ad avere un nuovo ordine delle carte. Si ripete l'operazione tre volte, ed alla fine **automaticamente** la carta prescelta è al terzo posto fra le prime 4.

Anche se mi distraggo e continuo a fare domande (presupposto che il mio interlocutore non mi imbrogli), la carta prescelta rimane sempre a quel posto. Se la curiosità di sapere come si fa il 'gioco magico' è esaudita, rimane ancora la curiosità intellettuale: perché il gioco funziona? La domanda non è solo fine a se stessa: se voglio continuare a stupire devo essere capace di fare il gioco con 16 carte, 32 o 64 carte. Quale è la risposta allora?

Quel che trovo interessante è che il metodo che porta alla soluzione è geometrico, ma la formula matematica che mi dà la soluzione generale per $2^n$ carte è algebrica e basata sul sistema binario. La soluzione generale è in effetti data dalle sequenze binarie 0, 01, 010, 0101, 01010, e così via.

Innanzitutto bisogna capire la trasformazione che si effettua sulle otto carte quando si rivoltano e si smazzano. Suppongo di essere al passo successivo al primissimo, in cui ho eventualmente permutato i due insiemi di quattro carte e so dunque che la carta prescelta sta tra le prime quattro.

Adesso, la trasformazione effettuata, alla sequenza

$$1, 2, 3, 4; \quad 5, 6, 7, 8$$

sostituisce la sequenza

$$8, 6, 4, 2; \quad 7, 5, 3, 1.$$

Quindi le carte 'buone' sono nella seconda metà di ciascuna delle due quaterne ($4, 2$ e $3, 1$). Utilizzando la seconda informazione e permutando se necessario le due quaterne, ottengo che le due carte ancora 'buone' sono quelle della seconda metà della prima quaterna.

La seconda trasformazione me le porta ai rispettivi terzi posti delle due quaterne, e la terza risposta e la successiva eventuale permutazione delle due quaterne porta la carta 'buona' al terzo posto della prima quaterna.

Per meglio esemplificare, supponiamo che la carta prescelta sia la carta 3. Allora, dopo la prima trasformazione ottenuta rovesciando e smazzando le carte, devo permutare le due quaterne ottenendo la sequenza

$$7, 5, 3, 1; \quad 8, 6, 4, 2.$$

Questo mostra quindi che, una volta che la carta prescelta raggiunge la posizione terza, poi vi rimane, ed il gioco è quindi stabile (a fare più domande del necessario non si perde la soluzione).

Nel caso generale con $2^n$ carte, posso pensare ad un intervallo di lunghezza 1 diviso in $2^n$ intervalli uguali. Dopo la prima risposta e conseguente permutazione dei due gruppi di $2^{n-1}$ carte, ottengo che la carta prescelta sta nella prima metà dell'intervallo. Dopo la trasformazione, questa metà si trasforma nelle due seconde metà dei rispettivi mezzi intervalli, e dopo ulteriore risposta ed eventuale permutazione so che la carta prescelta sta nella seconda metà della prima metà dell'intervallo. È facile ora vedere come si continua, cioè adesso dopo la terza risposta e conseguente permutazione la carta prescelta sta nella prima metà della seconda metà della prima metà dell'intervallo. A questo punto, per evitare di confonderci, vediamo i punti dell'intervallo come numeri reali espressi in sistema binario. Quindi la prima metà consiste dei punti con prima cifra binaria (dopo la virgola) 0, la seconda metà consiste dei punti con prima cifra binaria 1. Per i punti della seconda metà della prima metà dell'intervallo le prime due cifre sono allora 01, per la prima metà della seconda metà della prima metà dell'intervallo le prime tre cifre sono allora 010 e così via il processo geometrico contrae gli intervalli ottenuti tendendo al punto $0,01010101...$ Supponiamo di avere $2^n$ carte: dunque mi arresto al passo $n$, quando ho raggiunto l'intervallo dei punti con prime $n$ cifre data da una sequenza alternata di 0 ed 1,cioé $0,01010101...$ Siccome però voglio indicare la posizione della carta vincente con un numerale (un numero intero), moltiplico questo numero razionale per $2^n$, ottenendo, al variare di $n$, i numeri 0, 01, 010, 0101. Adesso mi ricordo però che voglio contare nel sistema decimale, ed anche che il numero 0 è quello che sta nella prima posizione. Quindi, al variare di $n = 1, 2, 3, 4, 5..$, la carta prescelta sta nella posizione vincente dopo almeno $n$ risposte, e la posizione vincente è la posizione $1, 2, 3, 6, 11...$

L'aspetto più affascinante a mio avviso consiste nel legame di questo semplice gioco con il metodo utilizzato da Georg Cantor (il fondatore della teoria degli insiemi, verso la fine dell'ottocento) per costruire iterativamente, partendo da raggruppamenti in più di due gruppi, ed utilizzando anche risposte a più valori, di insiemi complicatissimi, detti **oggetti frattali** proprio perché non hanno dimensione 0 come i punti, o 1 come le curve, o 2 come le superficie, ma hanno una dimensione data da numeri intermedi (2/3 ad esempio). Come è noto infatti l'insieme di Cantor si ottiene dividendo un intervallo in tre parti uguali, e poi scegliendo i due intervalli esterni chiusi, e ripetendo poi l'operazione iterativamente per ogni intervallo chiuso che si ottiene. Anche qui si ha una caratterizzazione aritmetica tramite il sistema ternario che utilizza le cifre $0, 1, 2$: l'insieme di Cantor è l'insieme dei numeri reali che stanno nell'intervallo $[0, 1]$ e che si possono scrivere nel sistema ternario utilizzando solo le cifre 0 e 2. Risulta evidente come molti insiemi simili si possano allora considerare utilizzando ad esempio il sistema quaternario, settenario, ..

L'interesse per la tematica degli oggetti frattali nasce dal fatto che la natura opera in questo modo per processi iterativi (si pensi alle gocce che cadendo formano stalattiti e stalagmiti nelle splen-


Fig. 5. – Non lo pensano solo Peitgen e Richter che gli oggetti frattali realizzano livelli altissimi di estrema bellezza, da [Pr87]. Per gentile concessione Heinz-Otto Peitgen.

dide Grotte di Nettuno vicino a Capo Caccia), e la nostra difficoltà di conoscere la natura nasce proprio dal fatto che in genere le nostre teorie sono solo delle approssimazioni tramite processi finiti di processi iterativi di lunghezza così grande da poterla ritenere quasi infinita.

In effetti la teoria dei processi dinamici e dei processi economici porta spesso alla considerazione di ‘giochi’ e puzzle matematici che sono dei veri rompicapo anche per le menti più brillanti ([3]). La teoria dei giochi, i cui fondamenti sono esposti ad esempio nel classico libro di McKinsey, è solo un piccolo ramo della matematica, che si è però assai sviluppato nel secolo scorso, anche per finalità militari e per ottimizzare la produzione delle risorse (e qui il ruolo del matematico è proprio quello del risolutore di problemi assai complicati).

I rami della matematica sono ormai tanti, che l’ex Presidente della Società matematica Europea Sir John Kingman parla di “Un oceano di

Fig. 6. – Altri insiemi frattali, da [Pr87], pag. 78. Per gentile concessione Heinz-Otto Peitgen.

([3]) Il nostro commosso ricordo va qui al compianto Adrien Douady matematica". Una metafora ancora più pregnante è quella del compianto Armand Borel nel suo saggio "Sul ruolo della matematica nella cultura": la matematica è come un iceberg, di cui ormai anche i matematici professionisti sono in grado di vedere solo una minima parte.

Una riflessione si impone oggi più che mai. Un tempo gli artisti crescevano alle botteghe dei maestri (e quindi i vari Taddeo Gaddi continuavano a dipingere come aveva loro insegnato Giotto), ed ancora oggi non esistono alternative valide all'imparare l'arte vedendola eseguita dal vivo dai maestri. Le grandi scuole matematiche del secolo scorso hanno portato ad incredibili successi, e difficoltà che apparivano insormontabili sono state superate da virtuosi dell'arte matematica. Nel cercare di identificare i grossi problemi del futuro si impone però una ampia discussione su cosa riteniamo sia importante nella matematica.

Scrive Sir Michael Atiyah nella breve nota "Mathematics: art and science".

'Noi tutti sappiamo quello che ci piace nella musica, nella pittura o nella poesia, ma è più difficile spiegare perché. Lo stesso capita nella matematica, che è, in parte, una forma di arte. Possiamo identificare una lista di qualità desiderabili: bellezza, eleganza, importanza, originalità, utilità, profondità, ampiezza di orizzonte, brevità, semplicità, chiarezza. Ma molte di queste qualità sono tra loro incompatibili. .. Ma questa varietà di aspetti forma la vitalità del mondo matematico. .. La matematica si può distinguere tra matematica pura (arte?) ed applicata (scienza?), .. ma in fondo ciò che rende una cattedrale stupenda è la fusione di una imponente struttura architettonica con la dovizia e ricchezza degli ornamenti prodotti da una larga schiera di artisti ed artigiani.'

Un messaggio è chiaro: la matematica ha bisogno sì di grandi architetti, che guidino la costruzione di grossi edifici scientifici, ma per la realizzazione di tali progetti si ha anche bisogno di una moltitudine di scienziati che portino avanti l'immensa mole di lavoro di scoperta che questi progetti richiedono.

D' altra parte, come gli architetti avevano bisogno dei loro Mecenati, gli scienziati leader hanno oggi bisogno del sostegno dei loro interlocutori politici.

Di fronte a costoro, certo la matematica e la scienza si possono gloriare di avere contributo in modo determinante ad elevare la qualità ed il livello della vita. Non si tratta solo di elencare l'impiego diretto della matematica (si pensi allo sviluppo dell'informatica, nata come Minerva dalla metà della testa di matematici come Turing e von Neumann, si pensi ai CD, alla dipendenza della nostra sicurezza dai sistemi di criptazione e decriptazione,..) ma si può affermare con Renè Thom che il progresso delle varie discipline scientifiche si misura col loro tasso di matematizzazione (in testa dunque ancora la fisica, coi suoi calcoli esatti che portano i satelliti a centrare agganci planetari quanto mai difficili).

Ciò però non basta, se non si afferma con Borel la necessità di libertà della comunità scientifica nello scegliere (certo con dibattito ampio ed accanito, in via della opinabilità che anche Atiyah riconosceva) i propri obiettivi prioritari.

Non si possono dimenticare al riguardo precedenti illuminanti:

1) la teoria delle sezioni coniche (ottenute cioè tagliando un cono circolare retto con un piano), sviluppata da Apollonio nel periodo Ellenistico, è stata una delle grandi teorie geometriche dell'antichità, ma la prima importantissima applicazione è venuta solo nel 1600. Kepler, esperto studioso di teorie geometriche, trovandosi a dovere interpretare le misurazioni planetarie di Tycho Brache, non potè fare a meno di osservare che le orbite dei pianeti non descrivevano dei cerchi, come predetto dalla fisica Aristotelica. Usando le proprie conoscenze matematiche egli fece la importante scoperta che tali orbite erano delle ellissi (le sezioni coniche di lunghezza finita).

A questo punto la teoria delle coniche, più di 1400 anni dopo, ha portato alla formulazione delle tre leggi di Keplero, cioè che:

- i pianeti si muovono su ellissi di cui il sole occupa uno dei due fuochi,
- le aree descritte dal raggio vettore che congiunge il sole al pianeta si evolvono con velocità costante,
- infine il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della lunghezza del semiasse maggiore.

2) Così pure la teoria della curvatura intrinseca delle superficie (che Gauss considerava come il proprio 'Theorema egregium'), sviluppata poi da Riemann, Levi Civita e molti altri, ha portato molti decenni dopo alla teoria della relatività generale di Einstein. Minkowski aveva

messo in piena evidenza il legame profondo tra le nuove geometrie ed il concetto di spazio-tempo, ed Einstein, dopo avere ascoltato con relativa attenzione le lezioni di Hermann Weyl a Zurigo, si era però accorto che le risposte che egli cercava per la descrizione del mondo fisico macroscopico erano già scritte nel linguaggio geometrico.

3) La teoria dei numeri, la 'Regina della matematica', così nominata ancora da Gauss, è stata, fino ai tempi di Hilbert ed Hardy, cioè per oltre 150 anni, ritenuta come una disciplina priva di applicazioni. Disciplina stupenda, i cui adepti Kronecker (4) paragonava ai lotofagi, che dopo avere assaporato questo nettare celeste non intendevano toccare altro cibo. Ancor prima dei risultati supefacenti di Serre, Frey e Wiles, che hanno portato alla soluzione del teorema di Fermat (un problema che è rimasto aperto per circa 350 anni ed ha giuocato un ruolo primario nello sviluppo della teoria della fattorizazione dei numeri algebrici), questa opinione è stata completamente smentita: oggigiorno le scoperte in questo campo sono ad esempio oggetto di interesse top secret da parte dei servizi segreti di tutte le maggiori potenze.

Parimenti la geometria dei numeri sviluppata da Minkowski alla fine dell'800 viene oggi riscoperta e posta al centro delle applicazioni della teoria odierna della ottimizzazione discreta.

4) Così pure per la logica : dai paradossi del mentitore "Chi dice : io sto mentendo, dice la verità oppure no? "(dunque se dice la verità sta mentendo, mentre se sta mentendo, non è vero che sta mentendo, e quindi dice la verità) si è arrivati alla discussione dei sistemi sintattici, ed al lambda calcolo che è oggi di centrale importanza nella informatica teorica.

Mi limito a questi pochi esempi: fatto è che l'edificio nascosto nell'iceberg della matematica è assai complesso, e, come osservava Atiyah, vi si alternano tante attività essenziali.

Come il cinema ha un suo linguaggio individuale e conciso (una dissolvenza od un montaggio analogico ci raccontano in un attimo che cosa è successo), così il linguaggio conciso e preciso è uno degli strumenti principe della ricerca matematica.

(4) cfr. [Hilb23], pag. 6

La chiarezza occupa un ruolo centrale, e la bellezza e la originalità degli enunziati è la cartina di tornasole della loro validità.

Anche nella arte moderna la ricerca sulla forma e sul linguaggio aveva assunto un ruolo primario.

Ma nella matematica questo linguaggio è un veicolo verso una conoscenza che si accumula nella sapienza collettiva (per gli scienziati religiosi, un tentativo di ascesa alla sapienza di Dio). Rovesciando la metafora dell'iceberg, possiamo pensare ad una gigantesca torre che cresce, e si vuole evitare che diventi una torre di Babele. Il primo problema è quello dell'alluvione di pubblicazioni e scoperte scientifiche (qualcosa di simile all'"inquinamento acustico" delle metropoli odierne), che viene nella matematica affrontato in modo assai sentito tramite il sistema del cosiddetto referaggio, cioè di una valutazione attenta, da parte di garanti, della validità ed importanza delle teorie e dei risultati scoperti od annunziati. Il problema non è un problema isolato della matematica: un saggio famoso di Walter Benjamin si intitola "L'opera d'arte nell'epoca della sua riproducibilità tecnica", e certo nella matematica oggidì è possibile comporre della letteratura scientifica tramite una pura operazione di collage di frammenti scientifici già esistenti.

Il secondo problema, della crescita oggettiva della quantità di sapere, viene affrontato tramite una continua rielaborazione e semplificazione delle teorie esistenti. Un ruolo primario gioca qui l'ambiente accademico, ove creazione e diffusione del sapere vanno di conserva. A mio avviso la differenza fra un ciclo di lezioni avanzate ed un seminario di ricerca per esperti sta quasi unicamente nel fatto che nel primo caso si ha molto più tempo a disposizione per spiegare le cose. È vero che spesso nel caso di un ciclo di lezioni si esaspera la tendenza della esposizione matematica di invertire l'ordine cronologico rispetto a quello della scoperta ed invenzione (scoperta la verità particolare è facile generalizzarla, ma gli studenti devono sempre compiere il percorso opposto, di discendere dal generale al particolare): ma questa tendenza la considero più un tentativo di nascondere i processi cognitivi, per generare nell'uditorio, invece di comprensione, ammirazione e stupore. Nella matematica (e qui mi schiero con Hilbert) le cose sono semplici, e quasi sempre è la nostra ignoranza o stupidità a farcele apparire complicate.

Quando cerchiamo di spiegare ad altri, cercando la semplicità al suo massimo, capita spesso che campi tra loro apparentemente diversi e lontani si mostrino tra loro intimamente correlati, e questo porta a ripensamenti critici periodici riguardo alla trasmissione del sapere matematico. Cosa è che è indispensabile ed assolutamente da salvare? La risposta è soggettiva, ad esempio alcune importanti teorie come la citata teoria delle sezioni coniche vengono prima ridotte ad esercizi, e poi da molti dimenticate. Ma qualche volta le cose sono dimenticate per potere essere poi riscoperte: paradossalmente mi è capitato di vedere che alcuni problemi di ricerca affrontati in qualche centro I.B.M. erano in realtà già stati risolti, e, dopo essere stati ridotti ad esercizi per studenti e 'lettori interessati', erano stati poi dimenticati.

Fig. 7. – La superficie quintica con 31 nodi scoperta da Eugenio Togliatti verso il 1940. Per gentile concessione di Stephan Endrass e Oliver Labs.

Il problema più grosso rimane certo quello delle fondamentali scelte di indirizzo, in cui giocano un ruolo rilevante le élite, sia che queste siano formalmente inquadrate in Accademie Nazionali, o Istituzioni e Università di prestigio storico (tipo la Scuola Normale in Italia, Harvard e Princeton negli USA, ..), sia che siano gruppi elitari autoselezionati (si pensi al Seminario Bourbaki in Francia). Funziona meglio la matematica con la oligarchia o con la democrazia? Uno dei miei maestri, Aldo Andreotti, paventava assai il momento in cui la validità dei teoremi sarebbe stata decisa per alzata di mano.

D'altra parte però ho l'impressione che il mondo matematico, pur rispettando le gerarchie dei valori scientifici, debba orientarsi in direzione meno feudale. Ormai si ha bisogno di dibattiti assai ampi, e poche sono le menti che riescano ad avere una visione abbastanza globale del firmamento matematico.

Ogni processo di democratizzazione è d'altronde collegato col tema della moralità scientifica, non parlo solo dell'onestà intellettuale nel valutare la importanza dei vari campi di ricerca, ma anche, se vogliamo tornare ad un paragone sportivo, al fair play nella competizione e la imparzialità degli arbitraggi. Questo aspetto è stato recentemente messo in primo piano dalla denunzia da parte di Grigori Perelmann quando ha rifiutato la scorsa estate la medaglia Fields a lui data per la risoluzione della congettura topologica di Poincarè nella terza dimensione, l'unica ancora mancante, e la più difficile.

Il calcio piace poiché coniuga il virtuosismo artistico con una rivisitazione dell'inconscio (conscio?) collettivo della guerra tribale: e putacaso il vincitore assomiglia più all'astuto Ulisse che all'apollineo Achille.

Anche il mondo della matematica è in qualche misura Omerico: gli eroi si sfidano a singolar tenzone e si sfidano di fronte ad un pubblico attento che decreta il successo di una nuova teoria o la sua secondarietà. Esempi di questo modo di vedere la matematica sono ad esempio la storia della matematica di E.T. Bell ed in qualche misura il recente libro di Sylvia Nasar, "A beautiful mind", dedicato alla vita ed opera di John Nash Jr.

Insomma, nella più razionale delle scienze si scontrano elementi di razionalità e di irrazionalità altrettanto forti.

La irrazionalità è del tutto comprensibile, in fondo il mondo matematico, con le sue sfide codificate, i suoi "Millennium problems" della

Clay Foundation, ed ancor prima le Olimpiadi matematiche e le competizioni al 'Problem solving', sviluppano una aura di competizione sportiva che stimola l'impegno individuale oltre ogni limite immaginabile : ed allora il riconoscimento del risultato individuale assume, per il singolo matematico che si cimenta con problemi ardui come un alpinista che rischia tutto di sè per conseguire una vetta non ancora conquistata, un significato imprescindibile.

Andrè Weil riteneva invece che certe questioni di priorità, insomma le regole del gioco al di là della qualità del gioco, avessero una importanza secondaria, l'importante per lui era solo che il sapere matematico andasse avanti, ed il ricoscimento dei contributi individuali era una questione secondaria, più attinente alla storia o meglio alla cronaca della disciplina, che non al suo essere e divenire globale.

Un episodio sicuramente illuminante al riguardo è stato quello della dimostrazione del teorema di uniformizzazione delle superficie di Riemann, che ha visto una furibonda competizione, per più di 30 anni, tra Klein e Poincarè. Klein, re della matematica alla fine dell'800 , ha dovuto cedere lo scettro a Poincarè, ed ha potuto solo continuare la sfida con l'appoggio di Hilbert. Il teorema di uniformizzazione, oggi comunemente chiamato teorema di Koebe e Poincarè, ed ottenuto verso il 1904, ha stimolato una chiarificazione concettuale che si è protratta fino al 1963, quando Ahlfors ne ha esposto una dimostrazione assai comprensibile. Addirittura, nuovi punti di vista, dovuti ad Hamilton, hanno portato a nuove dimostrazioni che hanno infine aperto la strada alla soluzione della congettura di Poincarè in dimensione maggiore (strettamente) di 2.

Per Weil insomma la attività di una istituzione culturale differisce da una attività sportiva di tipo agonistico per il fatto che il risultato è più importante dello sforzo individuale che ha portato alla scoperta. Inutile dire che questa posizione è stata assai criticata, per esempio molto aspramente da Serge Lang, che è stato uno dei più forti fautori della necessità di una assoluta cristallina limpidezza nella attribuzione di meriti e scoperte (Lang si è sempre schierato contro il 'conformismo del matematico comune' criticato anche da Perelmann).

Weil ha in qualche modo ragione, se siamo tifosi del calcio è meno importante una equa attribuzione del primato del più grande calciatore mai esistito fra Pelè o Maradona di quanto lo sia la sopravvivenza del gioco del calcio od il suo fiorire.

Ha anche ragione Procesi quando diceva che il mondo del calcio è più ragionevole del mondo della matematica, perché non si è mai sognato di pensare che Diego Maradona potesse ragionevolmente amministrare la società calcistica napoletana.

Resta però in ambo i campi il quesito se la politica di espansione possa essere condotta da un presidente che non ha mai giocato a calcio, o non piuttosto da un ex calciatore, condizionato quanto voi volete, ma che ha le idee chiare su quello che è un gioco di livello superiore e che sa riconoscere le star fin dall'esordio.

Chi sono i politici oggi che decideranno del futuro sviluppo scientifico? E perché dovrebbero decidere per uno sviluppo e non per contrazioni e tagli?

Alcuni amici e colleghi cominciano però di nuovo a sperare in sviluppi positivi. Ricordano come lo Sputnik, la Rand Corporation e la corsa al primato stellare e militare hanno giocato un ruolo primario nell'impetuoso sviluppo scientifico degli anni '50, '60 e '70, e ritengono che così oggi la minaccia della sfida tecnologica posta da paesi emergenti come la Cina e l'India causeranno un dietro front riguardo alla politica europea ed occidentale riguardo agli investimenti nella ricerca scientifica.

Mancano oggi, persino in Francia, personalità come Borel, Painlevé e Poincarè che guidino anche la politica generale nazionale. Vogliamo però essere ottimisti.

Su quale base?

È difficile dire, da una parte potrei citare "l'ottimismo della volontà" di Gramsciana memoria, ma d' altra parte devo sicuramente porre in primo piano la crescente coscienza nel mondo matematico dell'importanza dei rapporti di forza politici tra produzione del sapere e sua fruizione. Per il momento l'attenzione è concentrata sul problema delle pubblicazioni scientifiche, ormai prodotte per quasi integrità dallo scienziato ma spesso a lui alienate dal processo di copyright ed a causa della riduzione delle risorse per investimenti in biblioteche appropriate. Una risposta politica vede i matematici fautori di pubblicazioni low cost, e della detenzione diretta del copyright delle loro pubblicazioni (la questione ha già ad esempio investito in Germania la Deutsche Forschungs Gemeinschaft, la Max Planck Gesellschaft e la Alexander von Humboldt Stiftung). Parimenti non si può sottovalutare l'importanza della collaborazione scientifica che si è ormai estesa a macchia d'olio a livello planetario e rende il matematico veramente un cittadino del mondo.

Per finire, mi piace sottolineare come tale collaborazione non sia spesso solo un business che permette di ottenere risultati più vasti e profondi attraverso il mettere in azione congiunta esperienze e capacità diverse (cosiddetta 'cross-fertilization'). Nella matematica la discussione, direi quasi di stampo Socratico, gioca un ruolo trainante nella creazione, e porta ad amicizie scientifiche e matematiche molto intense e spesso stabili.

Ho qui in particolare in mente l'opera scientifica di David Hilbert, e la sua amicizia, durata una vita intera, con Hermann Minkowski ed Adolf Hurwitz. Questa amicizia, nata a Koenigsberg quando due dei tre non erano ancora ventenni, li ha accomunati in una ricerca accanita e globale su tutti gli sviluppi più importanti della matematica a livello mondiale per tutta la vita. Finché i tre amici sono stati in vita, la creatività di Hilbert è stata massima, e lo ha condotto ad un ottimismo positivista globale che credo si debba ancora condividere.

E voglio qui concludere allora colla esortazione con cui egli ha finito il suo famoso discorso di Koenigsberg:

"Wir müssen wissen, wir werden wissen!" (Dobbiamo sapere, riusciremo a sapere !).

Sicuramente siamo impegnati anche noi per questo nobile scopo.

**Nota.** Ci sarebbero molti altri temi che avrei voluto e dovuto sviluppare, ma, per dirla con Kundera, ho questa volta cercato di inseguire la 'leggerezza'. La brevissima bibliografia che segue dà comunque indicazioni e spunti anche in altre direzioni.

Vorrei infine ringraziare Stefan Endrass, John Hubbard, Oliver Labs, Hans Otto Peitgen, Springer Italia e Bollati Boringhieri Editore per avere permesso la riproduzione delle immagini.

# BIBLIOGRAFIA


[At05] MICHAEL ATIYAH, *Mathematics: art and science*, Bulletin of the Amer. Math.Soc. vol. **43**, N. 1 (2005), 87-88.

[Ben00] WALTER BENJAMIN, *L'opera d'arte nell'epoca della sua riproducibilità tecnica*, trad. italiana, Einaudi, Torino (2000).

[Bor94] ARMAND BOREL, *On the Place of Mathematics in Culture*, in *Duration and Change*. Fifty years at Oberwolfach, M. Artin, H. Kraft, R. Remmert, editors. Springer Verlag (1994), 139-158.

[Gray94] JEREMY GRAY, *On the history of the Riemann mapping theorem*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo Serie II, Suppl. **34** (1994), 47-94.

[Hilb23] DAVID HILBERT, *Wissen und mathematisches Denken*, Vorlesung Wintersemester 1922/23, ausgearbeitet von W. Ackermann, Mathematisches Institut Göttingen (1988).

[Ki03] JOHN KINGMAN, EMS President, *Editorial: An Ocean of Mathematics*, European Mathematical Society Newsletter, (March 2003), 3.

[LT06] DOMENICO LUMINATI - ITALO TAMANINI, *MATEtrentino percorsi matematici a Trento e dintorni*, Springer Italia (2006).

[McK52] J. MCKINSEY, *Introduction to the Theory of Games*, the RAND Series ([5]), McGraw Hill, New York, Toronto, London (1952).

[Ped59] DAN PEDOE, *The gentle art of mathematics*, *Dover* (1973), reprint of the 1959 Macmillan Edition.

[PR87] HANS OTTO PEITGEN - PETER H. RICHTER, *La bellezza dei frattali*, Bollati Boringhieri (1987).



Prof. Fabrizio Catanese: Lehrstuhl Mathematik VIII
Universität Bayreuth, NWII
D-95440 Bayreuth, Germany
e-mail: Fabrizio.Catanese@uni-bayreuth.de


([5]) La RAND Corporation, “a non profit organization, chartered to further and promote scientific, educational, and charitable purposes, all for the public welfare and security of the United States of America”, pubblica in questa serie vari libri dai titoli 'The operational code of the Politburo', “Air war and emotional stress: psychological studies of bombing and civilian defense”, 'Soviet attitudes towards authority', ' A study of Bolshevik Strategy and Tactics',...