La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Salomon Ofman

Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Filosofia e continuità

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.1, p. 165–192.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_165_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Aprile 2008, 165-192

Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Filosofia e continuità

SALOMON OFMAN

> *«Motion consists merely in the fact that bodies are sometimes in one place and sometimes in another, and that they are at intermediate places at intermediate times. Only those who have waded through the quagmire of philosophic speculation on this subject can realise what a liberation from antique prejudices is involved in this simple and straightforward commonplace»* (B. Russell, *Mathematics and Metaphysicians*, p. 66).

Questo testo trae origine da conferenze fatte nel quadro di un programma di filomatica, un programma cioè trans-disciplinare tra matematica, storia delle scienze, fisica e filosofia. Il movimento, ma anche il calcolo infinitesimale, che sono all'intersezione di queste discipline, sembrano un buon esempio per capire alcune questioni fondamentali in storia delle scienze, i concetti che la attraversano, e più generalmente il quadro filosofico nel quale queste ricerche si collocano.

In questo primo lavoro, presentiamo i fondamenti generali necessari a questo studio, in particolare il suo contesto filosofico. Se il problema principale è quello dell'uno e del multiplo, la sua trattazione passa per uno studio del discreto e del continuo, sotto il duplice aspetto matematico e filosofico. Questo lavoro è condotto attraverso due autori cronologicamente agli estremi, Platone e Poincaré.

Questo approccio porterà in un secondo testo ([OFM2]), ad interpretare, in modo un po' diverso dai punti di vista classici, il rapporto tra teorizzazione del movimento e calcolo infinitesimale, così come la situazione storica nella quale si sono sviluppati.

Questi due articoli riassumono un lavoro che sarà pubblicato prossimamente (vedere [OFM3]). Il lettore vi troverà vari sviluppi qui soppressi per motivi editoriali.

Il riferimento ai testi di Galileo rinvia al tomo ed alla pagina della Edizione Nazionale ([GAL]).

I. Introduzione.

«οὐ λόγους, ἀλλ᾽ ὅ ὑμεῖς τιμᾶτε [ὦ ἄνδρες Ἀθηνῖοι], ἔργα» («non parole, ma ciò che voi [Ateniesi] stimate di più, atti») (Platone, *Apologia di Socrate*, 32a4-5).

Attraverso la teorizzazione del movimento e del calcolo infinitesimale, si tratta di capire l'articolazione tra il flusso continuo della conoscenza e la rottura della scoperta nelle scienze, ma anche la diversità delle controversie al loro riguardo. Tali questioni saranno considerate sotto un quadruplice aspetto.

Innanzi tutto vorremmo mostrare che la molteplicità delle interpretazioni riguardo al movimento ed agli infinitesimali, ha origine in grandi correnti del pensiero le quali, lungi dal limitarsi alla storia delle idee o anche alle cosiddette discipline classiche, attraversano tutto il campo scientifico, sia in fisica che in biologia o in paleontologia o, più sorprendentemente ancora, anche in matematica. Queste varie correnti si possono dividere in due posizioni estreme che si riassumono in un'alternativa concernente la concezione della storia e della filosofia delle scienze. Questa alternativa, a sua volta, appare, come niente di meno che una scelta tra due concezioni del mondo.

Questa riflessione sul pensiero scientifico e la sua storia si basa su un approccio filosofico, dove per «filosofia» si intende un percorso unificatore sufficientemente ampio, in qualche modo una universalizzazione che necessariamente sorpassa i confini usuali tra le discipline. Trattandosi di una ricerca sulle origini, bisogna riferirsi agli scritti più antichi, le opere della Grecia antica, principalmente quelli di Platone e di Aristotele, che confronteremo con testi più recenti, principalmente quelli di Poincaré.

Consideriamo quindi come il nostro argomento e i vari approcci degli storici e dei filosofi delle scienze s'inseriscano in questa problematica generale.

In [OFM2], iniziamo con l'analizzare le nozioni di Aristotele sul movimento, in quanto esse saranno predominanti fino a Galileo. Lo studio dei testi di Platone, Aristotele e soprattutto Euclide ci conduce a una critica di alcune interpretazioni usuali. Studiamo quindi l'esposizione di Galileo della scienza del movimento. È nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* che si possono apprezzare le difficoltà con le quali il suo autore ha dovuto misurarsi per costruire questa scienza.

L'ultima parte di [OFM2] riguarda le conseguenze di questa nuova scienza e la sua relazione con gli infinitesimi. In conclusione ci proponiamo di capire l'impatto della teoria degli infinitesimi sulla concezione del movimento e le cause che hanno potuto impedire ai matematici/fisici anteriori di elaborare una teoria del movimento, nel senso in cui l'intendiamo noi.

II. Presentazione.

1. *Sul calcolo infinitesimale e il movimento.*

Il calcolo infinitesimale ha portato cambiamenti fondamentali non solo in tutti i rami della matematica, ma anche nella maggior parte dei campi della scienza. È «una delle più formidabili realizzazioni dello spirito umano» ([BOY], prefazione), «uno strumento così potente, [che] ha cambiato il volto della matematica pura ed applicata» ([COU], p. 201), «lo strumento più efficace per lo studio che la matematica abbia mai prodotto» (Carl Boyer, *Encyclopædia Britannica*, voce *Calculus*), «il metodo più potente che le matematiche abbiano mai inventato» ([SEI]).

Qui ci interesseremo al calcolo infinitesimale in relazione allo studio del movimento e della velocità. Movimento e velocità non sono solo oggetti della fisica, ma anche sia delle scienze naturali o storiche che della filosofia. Siamo quindi condotti agli inizi della fisica moderna, che nasce con la teoria matematica di Galileo, presentato come il «padre della scienza moderna» ([CLA], prefazione). Nello stesso modo in cui l'introduzione degli infinitesimali ha sconvolto tutta la matematica, la fisica di Galileo ha cambiato la fisica ed è andata ben oltre (vedere per esempio [KOY], p. 166). Questo studio si conclude in [OFM2] con il calcolo infinitesimale, collegandolo storicamente con la questione del movimento/velocità.

Una delle difficoltà risiede nelle parole stesse, quelle di «movimento», «velocità» e anche nei termini da usare per indicare quanto è definito dalla matematica. In effetti, è con la scienza galileiana che la velocità acquisisce un (nuovo) senso, da cui la necessità di evitare le trappole del linguaggio, spesso tramandate dagli storici.

La questione del movimento è stato uno dei problemi più complessi e più studiati. Per gli antichi Greci è una questione centrale e presenta immediatamente un paradosso al pensiero. Un movimento è movimento di qualcosa, ma questo qualcosa, per essere, deve, almeno in qualche modo, essere in riposo. Per Platone, il movimento è un punto cruciale per unificare due mondi, uno eterno ed immobile, l'altro temporale e sempre diverso. Esso ed il riposo sono due dei cinque generi fondamentali dell'essere (*Sofista*, 254d4-5). Per Aristotele, che propone una soluzione ai paradossi di Zenone, la natura, concepita come ciò che è soggetto al movimento, è definita proprio tramite il movimento. Si tratta quindi dell'oggetto essenziale di ogni scienza fisica (*Fisica*, II, 192b14) e, come tale, si trova ancora nel cuore stesso della filosofia.

2. *A proposito di una questione di terminologie.*

In modo molto generale, gli approcci alla delicata questione delle origini sono estremamente diversi. Si collocano tra due posizioni che superano, e di molto, la sola storia delle scienze. Così gli esempi attuali più importanti si trovano in geologia. Queste posizioni, a loro volta, sono l'espressione di due partiti filosofici antagonisti, ognuno presentando il proprio campione, Aristotele per l'uno, Galileo per l'altro.

Il modo moderno di pensare il movimento e la velocità dipende dalla dinamica; questa segna la nascita della fisica moderna, alla fine del pensiero scolastico, carico di filosofia aristotelica (o almeno delle interpretazioni che esso ne dà).

Per noi, la questione fondamentale della teorizzazione aristotelica del movimento, essenzialmente nella *Fisica*, è il suo rapporto col concetto moderno di movimento. Questo pone immediatamente il problema della velocità e quindi della suddivisione istantanea del tempo. Ne consegue che il punto di vista moderno sulla velocità non avrebbe potuto concettualmente avere senso finché la velocità non fosse stata definita fisicamente come oggetto di misura.

Molte analisi si rilevano allora infondate perché, in un modo o nell'altro, procedono con una certa confusione tra vari significati (moderni) della velocità. Per evitare questa confusione, useremo il termine di «celerità», per tutto quanto precede la fisica galileiana. È lo stesso per M. Caveing che tuttavia utilizza un altro termine (cfr. [CAV], p. 168).

La fisica di Aristotele appare allora come il risultato delle conoscenze fisico-matematiche dell'antica Grecia e non come una specie di elaborazione puramente empirica la cui principale conseguenza sarebbe stata il rallentamento del progresso scientifico.

I lavori realizzati nel Medio-Evo in matematica riguardanti calcoli, che in termini moderni si potrebbero qualificare integrali o differenziali, portano alcuni storici ad interrogarsi sul momento in cui nasce questa scienza moderna (perché Galileo?), o ad interrogarsi sui motivi del «ritardo» che avrebbe avuto ad emergere. Un'unica risposta sembra imporsi: la necessità di una «velocità» misurabile. Ma in definitiva, la difficoltà di pensare «*la* velocità» è quella di pensare la sua unità. Da qui il ruolo dei lavori di Galileo sulla caduta dei corpi, il cui risultato, essenziale e paradossale, è stato di misurare qualcosa che non esisteva. Quanto è misurato può allora giustamente essere chiamato velocità. Questa «velocità», in mano ai matematici, doveva aprire la via alla formalizzazione del calcolo infinitesimale.

3. *La posizione del problema.*

Dall'antichità, i filosofi, i fisici o i metafisici si sono confrontati con il movimento. Ma erano d'accordo sul senso di questo termine o questo nascondeva un equivoco? Era veramente la medesima cosa ad essere definita?

Il calcolo infinitesimale, anche se non pone la stessa questione d'unicità di definizione, presenta comunque un problema di origine. Questa origine ha dato luogo ad una delle più lunghe polemiche per determinare chi fosse stato il primo a formalizzare la sua definizione. Uno storico ha persino potuto intitolare un libro sulla lite tra Newton e Leibniz su questa questione: «Filosofi in guerra» (*Philosophers at war*) ([HAL]). Questa lite non è senza interesse perché chiarisce certi aspetti riguardanti la comunità degli scienziati, matematici o fisici, la loro psicologia e quella delle nazioni (per esempio, [WES], cap. 14). In qualche misura, la ritroviamo a proposito della relatività. Ma essa è estranea alla presente ricerca.

Tuttavia questa problematica nosconde una questione importante, tuttora molto controversa. I concetti matematici sono endogeni, derivano essenzialmente dai problemi che i matematici si pongono, oppure le loro origini sono esterne alla matematica? D'altra parte, è legittimo collegare il movimento e il calcolo infinitesimale?

Il nostro approccio al movimento rivela una dualità all'opera nella storia delle scienze, e anche nelle teorie scientifiche stesse, che si chiude su uno dei maggiori conflitti del pensiero, una «lotta di giganti» di cui parla Platone (vedere §III.4).

Per il filosofo ateniese, è essenziale sorpassare questa alternativa tradizionale (eterna?). È quanto cercheremo di fare qui e non ci si stupirà che le nostre conclusioni possano sembrare paradossali, approdando ad una doppia riabilitazione, quella di Aristotele (soprattutto) e quella di Galileo (che ne ha meno bisogno), e quindi ad una certa unificazione delle problematiche di questi due autori.

Quando una teoria sconvolge il modo stesso di concepire alcune questioni fondamentali, due domande vengono naturali: «come ci siamo arrivati?», ma anche la sua simmetrica, «perché non ci siamo arrivati prima?». Le risposte possono, ancora una volta, essere ordinate come variazioni tra due concezioni estreme. La più comune considera qualche blocco «psicologico» e/o «sociologico»; l'altra, più caritatevole, si basa sulla mancanza di alcuni strumenti tecnici, tralasciando la caratterizzazione di quanto era assente.

Nello studio di questi problemi seguiremo un percorso di crescente generalità. Secondo noi, le posizioni precedenti illustrano due modi di pensare radicalmente diversi, che hanno le loro fondamenta nelle parole stesse ([1]). La valutazione degli ateniesi che l'atto abbia la meglio sulla parola, non è necessariamente quella giusta.

III. Due sistemi di pensiero.

1. *Catastrofismo versus Evoluzionismo.*

Riguardo alla storia dei concetti, due interpretazioni si affrontano. Una insiste sulle novità radicali, nate in un intervallo di tempo estremamente corto. L'altra al contrario mette l'accento sul suo aspetto progressivo, la cui velocità dipende dai periodi considerati. Ma quello che sembra di primo acchito una rivoluzione violenta, è solo un'apparenza, il lavoro reale, sotterraneo e invisibile, essendo stato fatto ben prima.

Seguendo questa analisi (cfr. per esempio Pierre Duhem), l'opera di Galileo appare come una continuazione di quella dei pensatori medievali, tanto degli «Oxfordiani» o dei «Mertoniani» (del *Merton College*) quali Swineshead o Heytesbury, quanto dei «Parigini» quale Nicole Oresme intorno al tredicesimo, quattordicesimo secolo, quindi tre secoli prima di Galileo.

Secondo l'altra analisi, al contrario (cfr. Alexandre Koyré), bisogna insistere sulla rottura col passato rappresentata da Galileo, precisamente perché è all'origine della fisica moderna ([KOY], p. 172).

Si potrebbe pensare che questa divisione è ristretta alle analisi **sulle** scienze, in quanto la determinazione delle cause e degli autori di scoperte o invenzioni è sempre delicata. Però la ritroviamo all'interno stesso delle scienze (naturali). Così è centrale in cosmologia, nella lite tra «creazionisti» (che si appoggiano sul «Big Bang») e gli evoluzionisti per i quali l'universo non ha un inizio (e forse neanche una fine).

Questa divisione compare con una forza nuova, in biologia, paleontologia e geologia, in un dibattito, sito all'intersezione di queste tre scienze e ripreso all'infinito: «la scomparsa dei dinosauri». Dopo vari

([1]) Contrariamente alla libertà totale delle definizioni secondo Pascal ([PAS], sect. 1, p. 577).

capovolgimenti, c'è attualmente un consenso per attribuire questa scomparsa alla caduta di un meteorite gigante (teoria di Alvarez), siglando la vittoria della discontinuità sulla continuità (cfr. [BUF], p. 102). Ma niente garantisce che sia stata detta l'ultima parola. Questa alternativa che troviamo in quasi tutte le scienze, così come nella loro storia, nasconde un'opposizione più ampia, che chiameremo i punti di vista «*evoluzionista*» e «*catastrofista*». Tuttavia la matematica pone un problema specifico.

2. *Una seconda alternativa.*

È possibile che le polemiche nelle scienze della natura e nella loro storia siano dovute a imprecisioni riguardo all'oggetto di cui si occupano, trattandosi generalmente di oggetti o eventi lontani, sia in modo fisico che temporale. È ben noto che le questioni sulle origini si prestano sempre a controversie, e non solo nelle scienze. Così le *Storie* di Erodoto si aprono sulla «responsabilità della lite [tra Persi e Fenici]» ([ERO], I, 1-2, Prefazione).

La conoscenza del passato è indiretta e parziale. Ma i movimenti pendolari delle teorie standard sono difficilmente conciliabili con un'immutabilità della conoscenza, come in matematica, se come afferma Hermann Hankel, contrariamente alle altre scienze, è «solo in matematica che ogni generazione costruisce una nuova storia su una struttura antica».

Certo le discordie riguardanti le origini di teoremi (come il terorema di Pitagora), le opere di Teeteto, i libri di Euclide, sono vive quanto nelle altre scienze. Tuttavia la considerazione della storia o la filosofia della matematica non permette alcuna conclusione per queste ultime. Perché queste discussioni hanno per oggetto la matematica o eventualmente i matematici. Concordano in questo con le storie delle altre discipline, e queste discussioni rientrano nel campo della problematica considerata precedentemente.

Ma esse non riguardano gli **oggetti** della matematica (o dei matematici). In quanto unico campo dove la mente «è assolutamente padrona», dove è contemporaneamente sia «lo strumento che le sue creazioni», gli oggetti della matematica sembrano al di fuori del tempo, dipendenti esclusivamente dall'intelletto dei matematici i quali «possono tessere a loro piacere il proprio universo del discorso» ([ATK]). Così alcuni commentatori possono ritenere che il calcolo infinitesimale o integrale fosse già presente (potenzialmente) nei lavori di Archimede.

La difficoltà risiede nella relazione tra oggetti reali e oggetti matematici. Infatti, a seconda della concezione adottata, li si potrà pensare in modi molto differenti. Per esempio, sia come una specie di formalizzazione «logica», nella quale i risultati si susseguono in modo meccanico, sia, al contrario, come una costruzione architettonica, nella quale la libertà di creazione è illimitata. Come ricorda C. Boyer, questo è, contrariamente a quello di Russell, l'atteggiamento adottato da Poincaré per il quale «se i matematici fossero stati in preda alla logica astratta, non sarebbero mai andati al di là della teoria dei numeri e dei postulati della geometria» («Poincaré has said that had mathematicians been left the prey of abstract logic, they would never have gotten beyond the theory of numbers and the postulates of geometry») ([BOY], p. 13).

Pertanto l'esistenza di varie correnti quali quelle intuizionistiche, logicistiche o ancora «platonistiche» ([2]), che a seconda dei casi potrebbero essere classificate come «evoluzionistiche» o «catastrofistiche», non permette di trarre conclusioni per la matematica. Infatti questi correnti riguardano meno la matematica che le discipline che se ne occupano, storia o filosofia. Se una medesima alternativa è possibile per la matematica e le altre scienze, sarà diversa da quelle che abbiamo considerate. Ma potrebbe esserne una generalizzazione.

3. *Il discreto e il continuo.*

Se la maggior parte di questo studio riguardante la concezione antica del movimento si basa sull'opera di Aristotele, l'opposizione tra discreto e continuo, riconosciuta come problema «filosofico» fondamentale, si può leggere in un testo più «arcaico», almeno stando allo Stagirita, la

([2]) Nel senso della tradizione platonica in matematica.

fonte principale degli errori di Platone essendo il suo modo *arcaico* di porre i problemi («τὸ ἀπορῆσαι ἀρχαιχῶς») ([ARI], N, 1089a1).

> «*Gli oggetti, feci io, che non sollecitano l'intelligenza sono quelli che non suscitano simultaneamente una sensazione opposta; quelli che la producono , li considero oggetti che la invitano ad agire, tutte le volte che, venendo da vicino o da lontano, la sensazione indichi indifferentemente un oggetto o l'opposto (...) Ecco queste, diciamo, sono tre dita (...) l'anima dei più non è costretta a chiedere all'intelligenza che cosa mai è un dito, perché mai la vista le ha presentato contemporaneamente il caso di un dito che sia l'opposto di un dito (...) è naturale che un simile caso non inviti ad agire e non risvegli l'intelligenza (...) E la vista vede forse bene la loro grandezza e piccolezza? O le è forse indifferente che una delle dita sia mediana o estrema? E così il tatto sente bene la grossezza e la sottigliezza o la mollezza e la durezza? (...) In simili casi, all'opposto di prima, ripresi, l'anima non è per forza perplessa (...)? Per la sensazione del leggero e del pesante , non si domanda forse che cosa siano per essa il leggero e il pesante, se indica il pesante come leggero e il leggero come pesante* ?» ([PLA1], VII, 523b-524a; traduzione un poco modificata; siamo noi a sottolineare) ([3]).

Paradossalmente Socrate si schiera qui con il continuo contro il discreto, per la quantità contro il numero o ancora per la concezione geometrica contro la concezione aritmetica. In effetti, mentre numerare (con numeri naturali (non nulli)) è un atto puramente spontaneo nel quale l'intelligenza ha poco a che fare, la misura di quanto è grande o piccolo, spesso o sottile, molle o duro è difficile perché genera sensazioni contraddittorie.

Una tale affermazione sembra strana, in quanto la tradizione «platonica» pone una gerarchia delle scienze in cui la più elevata è

([3]) Quando Galileo (Salviati) parla dello spirito sublime di Copernico, non è assolutamente per la sua teoria astronomica che si accorderebbe meglio a quanto era noto del cielo. Ma è al contrario, perché contro tutti i dati della percezione sensibile (αἴσθησις), ha fatto prevalere la sua intelligenza (νόησις) ([GAL], VII, p. 367). Benché in questo studio non si tratti dei problemi di Galileo con la Chiesa, osserviamo che la proposta di compromesso del cardinale Bellarmino di parlare «per ipotesi» («ex suppositione»), che «basta al matematico» desideroso di salvare al meglio «ogni apparenza» (lettera a Paolo Foscarini, del 12 aprile 1615, XII), equivale, per Galileo, ad esigere che l'intelligenza s'inchini alla sensazione (cfr. [OFM1], 1ª parte).

anche la più lontana da ogni applicazione pratica. Peraltro il filosofo di Atene è stato molto criticato per avere vietato lo sviluppo delle scienze della natura (fisica o altre), per il disprezzo nel quale teneva ogni pratica e in particolare gli esperimenti, e questo parallelamente ad Aristotele, il quale, per conto suo, avrebbe impedito lo sviluppo di una «matematizzazione» del movimento.

Ma la geometria, come ricorda l'etimologia, in relazione con la misura della terra , è più vicina ai nostri sensi dei numeri che sono dell'ordine del puro discorso (λόγος). Secondo la scuola pitagorica, spesso accostata a quella dei platonici per quanto riguarda la matematica, «tutto è numero» e senz'altro non geometria. Alla base di ogni cosa stava la «τετρακτύς» (la somma dei primi 4 numeri, cioè 10), «formidabile, onnipotente, l'inizio e la guida della vita divina e anche terrestre» (Filolao-quinto secolo). Più generalmente si dice che Filolao affermasse che le uniche cose che si possono conoscere sono numeri, perché «senza i numeri, nulla può essere concepito, né conosciuto», tema che si ritrova peraltro molto più tardi, per esempio in Kronecker, Kummer ed addirittura Poincaré.

È vero che nessun testo del periodo di Pitagora ci è stato direttamente tramandato e molto poco sappiamo della sua scuola. Ci dobbiamo quindi affidare a commentatori più tardivi ed impegnati, come Aristotele. Ecco perché bisogna intendere qui Pitagora e la sua scuola come una specie di tradizione.

Per attenersi alla *Repubblica*, Platone colloca la scienza dei numeri (λογιστική τε καὶ ἀριθμητική) (VII 525 a) prima della geometria. Ma, come precisato da Socrate, questa classificazione non segue direttamente dal valore degli oggetti matematici. È funzione inversa del numero di «dimensioni», da uno per le «linee» («curve» in termini moderni) a tre per i «corpi» («volumi»).

L'alternativa tra catastrofismo e evoluzionismo si interpreta naturalmente come un caso particolare di opposizione del discreto e del continuo, ma questa volta la matematica partecipa a questa alternativa. Meglio ancora, la motivazione di una tale alternativa è simile a quella delle altre discipline. Una conoscenza vaga e incompleta che si traduce matematicamente con delle proprietà incoerenti o inspiegabili.

È ben così che compare la quantità irrazionale, compagna d'obbligo del teorema di Pitagora. I vari miti che segnano la sua nascita, il suo trattamento matematico rispetto all'infinito e il suo nome stesso, testimoniano delle difficoltà incontrate da coloro i quali erano abituati a considerare fino ad allora solo numeri interi. È anche l'esempio fondamentale del fondatore dell'Accademia, sul quale egli non si stanca mai di tornare.

Un esempio più recente è dato dalla «misura» di Dirac o dalla funzione di Heaviside, «funzioni» altamente discontinue introdotte dai fisici che non esitavano peraltro a «derivarle». La problematica platonica permette così di dare un quadro unificato sia della matematica che delle altre discipline e questo malgrado l'estrema difficoltà del rapporto della matematica con la realtà. E, punto essenziale, senza che sia necessario pronunciarsi sulla controversia riguardante (la realtà de) i suoi oggetti.

4. *Il conflitto per l'eternità.*

Il fatto però che, come abbiamo detto, la geometria sia superiore all'aritmetica va contro la concezione «platonica» usuale della matematica. E Socrate continua subito:

> «*-Socrate: È naturale allora, ripresi, che in simili casi l'anima ricorra al calcolo e all'intellezione, e provi anzitutto a esaminare attentamente se ciascuna impressione che le viene riportata è una sola o duplice (...) E se risulta duplice, ciascuna delle due non si manifesta come una sola e differente dall'altra? (...) Ebbene ? A quale dei due gruppi appartengono, secondo te, il numero e l'unità? (...) Se la vista o qualche altro senso riescono a cogliere pienamente l'unità in se stessa, questa non ci potrà portare all'essere (...) Se però, quando si vede l'unità, la si vede sempre accompagnata da qualcosa che le è incompatibile, sì da risultare insieme unità e pluralità (...) l'anima in questo caso sarà per forza perplessa e dovrà indagare risvegliando in sé la riflessione, e chiedersi che cosa è mai l'unità in sé (...)*
>
> *-Glaucone: Vediamo nel contempo l'identica cosa come unità e come pluralità infinita.*» ([PLA1], VII, 524b-525b; siamo noi a sottolineare).

Così, in modo molto sorprendente, Socrate afferma qui il carattere mobile della riflessione stessa. Inoltre la distinzione fondamentale tra discreto e continuo, che abbiamo trovato nel testo precedente, diventa quella tra unità e multiplo. Si sarebbe tentati di associare il discreto al multiplo, almeno nel caso finito, ma l'unità partecipa ugualmente al discreto. Questo non è in contraddizione, se non con la prima parte del testo platonico, almeno con l'analisi che ne abbiamo fatto nel paragrafo precedente?

Una risposta necessita di un'analisi più approfondita della nozione di «continuo», il ricorso a testi matematici moderni si rivela indispensabile. In *La scienza e l'ipotesi*, Poincaré ricorda la celebre formula: «il continuo è l'unità nella molteplicità», per aggiungere subito dopo che la costruzione di cui si accontenta l'analista, che inserisce tra «scalini» altri «scalini», pone un problema. Infatti, il «continuo così concepito è solo una collezione di individui (...) estranei gli uni agli altri». Il continuo è certo definito a partire della sua nozione fisica, identificata con la concezione empirica, le cui contraddizioni sono state soppresse dalla potenza del simbolismo, la matematica essendo in qualche modo l'arte di eliminare le contraddizioni. Benché matematicamente corretta, questa definizione dimentica nondimeno l'unità a favore della molteplicità ([POI1], 1ª parte, II).

Questo permette di formulare, in linguaggio moderno, la relazione tra le due alternative del dialogo platonico. Il continuo e quindi il discreto appaiono come dei casi particolari dell'unità e della molteplicità. Così la topologia moderna si ricongiunge con l'argomentazione della *Repubblica* e può aiutare noi moderni, a capirla.

Se né il discreto, né il continuo appartengono esclusivamente all'unità o al multiplo, sono partecipi di entrambi; la contraddizione tra le due parti tende quindi ad attenuarsi. Tuttavia non bisognerebbe dedurne un accordo tra Platone e Poincaré. Per il filosofo greco il motivo per distinguere il significato filosofico del continuo (e dunque del discreto) dal suo significato matematico, non può risultare dal fatto che l'idea filosofica è viziata da contraddizioni.

La seconda alternativa avvolge la prima, ma in modo più complesso di una semplice generalizzazione termine a termine. Si passa da un ambito assai matematico (discreto e continuo) a un ambito molto più generale, dove la matematica è certo sempre presente. Così è inquadrata una problematica essenziale, quella dell'unità e della molteplicità.

Questo problema occupa una posizione centrale nel pensiero platonico. Lo ritroviamo nel *Sofista* ([PLA3]), dove è enunciata quest'altra opposizione fondamentale, quella dell'essere e del non-essere. Esso mette in scena «una specie di lotta di giganti» (246a) che oppone, non «evoluzionisti» a «catastrofisti», ma «quelli che tirano ogni cosa verso la terra» (246a) («γηγενεῖς» o «figli della terra» (248b)) agli «amici delle idee» («τῶν εἰδῶν φίλοι» (248a)), «protetti dalle alture dell'invisibile» (246b). Questa parte del *Sofista* si confronta con la questione del movimento. Infatti, gli «amici delle idee» escludono dalla realtà quello che è movimento (κινεῖσθαι), perché solo è ciò che è in riposo (ἠρεμοῦν, da ἠρεμία: tranquillità, riposo, termine che anche Aristotele userà).

5. *Del movimento in matematica.*

Quando Platone riassume questa lotta «senza fine (ἄπλετος: insaziabile), [che] esiste per sempre», il problema fondamentale non è l'opposizione corpo/idea. È quello del movimento assoluto/riposo assoluto, ogni parte del quale forma una «terribile dottrina» (δεινὸν λόγον), perché entrambe portano alla «fine della scienza, della saggezza e del pensiero», e alla loro propria distruzione.

La questione del movimento, più precisamente il punto di vista che si adotta nei suoi confronti, costituisce per il filosofo ateniese un problema filosofico fondamentale, si tratta di prendere posizione in una lotta per l'eternità. Le posizioni, ancora una volta, sono ordinate tra due estremi, da una parte quella dove tutto è (in) movimento, collegata alla teoria del flusso universale di Eraclito, dall'altra quella di un universo assolutamente immobile, in cui il movimento, e quindi, aggiunge Platone, in cui la vita stessa è esclusa.

È comunque vero che questa lotta di giganti tra i sostenitori del movimento e quelli del riposo, non è dello stesso ordine delle alternative precedenti. Certo si potrebbe stabilire un legame tra la prima alternativa e il movimento/riposo, benché l'evoluzione, anche se più lenta della catastrofe, non sia l'immobilità. Eppure, secondo Platone, l'oggetto di studio della matematica riguarda l'immutabile e l'eterno. Si potrebbe dire che il triangolo è lo stesso, sia che venga considerato da Euclide, da noi o dai matematici indiani. Da cui un accordo generale sulle dimostrazioni matematiche, ma anche un accrescimento, generazione dopo generazione, di conoscenze riguardanti ciò che è indipendente sia dal tempo che dallo spazio. Ma se il movimento è escluso dalla matematica, nessuna alternativa che lo includa avrà senso per la matematica.

Quando l'eternità si aggiunge all'immobilità, si passa dal movimento al cambiamento. Nel pensiero greco antico, i due concetti erano congiunti, il movimento essendo, per riprendere i termini di Aristotele, il cambiamento riguardante il luogo. È anche quanto sostiene lo Straniero del *Sofista* di Platone ([PLA3], 248a-249e). Noi moderni stabiliamo addirittura un'equivalenza, già presente in Aristotele, tra i due. La «mobilità», un sinonimo di quanto è atto a modificarsi (o ad essere modificato), è generalmente concepita positivamente, poichè oppone esseri dinamici a esseri goffi condannati a scomparire (come i dinosauri) (M. Caveing sottolinea la connotazione «assiologica» del movimento in Aristotele, vedere [CAV], p. 167-168).

Gli oggetti o i concetti della matematica si troverebbero quindi dalla parte degli oggetti fossili. Eppure, anche se gli oggetti matematici non sono considerati come mobili o mutevoli, il movimento o il cambiamento stesso può essere oggetto della matematica. Si tratterebbe di ottenere invarianti in cose che invarianti non sono. Classificare una moltitudine consiste nel trovare alcune caratteristiche, in minor numero possibile, che permettano di determinare le varie classi. È quanto succede nella classificazione delle curve analitiche o dei triangoli. Nello stesso modo si potrebbe cercare di classificare il movimento o il cambiamento tramite invarianti che non sarebbero soggetti né all'uno né all'altro.

Per Platone nel *Sofista* (ma anche *Repubblica* VII, 524b-525b), la matematica, così come le scienze della natura, non escludono il cambiamento/movimento. Contrariamente alla vulgata platonica è addirittura impossibile eliminarlo da ogni conoscenza. Se i «figli della terra» sono «terribili» («δεινοὺς (εἴρηκας) ἄνδρας»), una teoria dimentica del cambiamento/movimento lo sarebbe ugualmente (249a-b). In effetti lo Straniero di Elea, l'inquisitore del Sofista, ritiene che non ci sia nessuna conoscenza senza movimento, e questo non solo in chi apprende, ma anche nella cosa che è in via di essere conosciuta.

Si potrà certo obiettare che ammettere il cambiamento/movimento come oggetto matematico è diverso dal concepire, con lo Straniero del Sofista, che gli oggetti matematici siano soggetti al cambiamento/movimento. Tuttavia, che si segua l'ipotesi degli invarianti o quella dell'Eleate, ne consegue che all'interno stesso della matematica è posta la questione del movimento e del riposo.

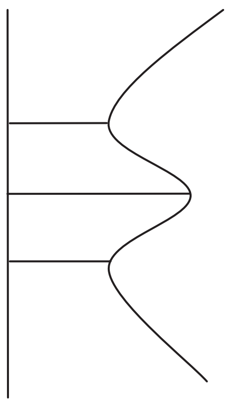
Ci si può ancora chiedere se possa sussistere ancora un'ipotesi. Correlativo ad ogni studio del movimento, il calcolo differenziale e quello integrale sono legati alla matematica contemporanea in modo così intrinseco che sarebbe difficile trovare un campo della matematica al quale non siano partecipi. Eppure la «qualità» matematica degli infinitesimi è stata a lungo un problema.

Dalla parte dei matematici, Michel Rolle cerca di dimostrare nel 1701 (sedute del 12 e 16 marzo) davanti all'Accademia (reale) delle Scienze, non solo la loro mancanza di rigore, ma addirittura che portano a risultati sbagliati perché contradditori con quelli ottenuti classicamente seguendo i lavori di Fermat e Hudde.

Egli considera (in termini moderni) la curva di equazione:

$$y-b = (x^2-2ax+a^2-b^2)^{2/3} / a^{1/3}$$

e trova, seguendo le regole degli infinitesimi, un unico massimo/minimo, per $x = a$. Ora, seguendo i calcoli classici, se ne ottengono tre, gli altri due essendo per $x = a + b$ e $x = a-b$; si ottiene la curva della quale egli dà il seguente disegno approssimativo:



Rolle conclude che «questo ci assicura che questa geometria conduce all'errore».

Nella sua risposta Varignon, sostenitore degli infinitesimali, mostra che Rolle non ha applicato correttamente le regole del calcolo. E corregge la curva disegnata da Rolle, mostrando che gli altri due punti sono sì dei minimi ma, contrariamente al caso $x = a$, le loro tangenti sono ortogonali a quelle disegnate da Rolle. Il lettore potrà divertirsi a rettificare la figura qui sopra.

Per i filosofi, la questione rimane posta, assai dopo l'integrazione del calcolo infinitesimale da parte dei matematici. Uno tra i più ingegnosi, ma anche tra i più violenti avversari degli infinitesimali, specie sotto la forma newtoniana della teoria delle flussioni, è il vescovo George Berkeley il quale, nel 1734, pubblica *«The Analyst or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician»* dove s'impegna, legando la difesa della religione alla critica degli infinitesimi, a mostrare al matematico infedele (colui che li difende), le assurdità che vi si trovano, e questo nel modo più imparziale («utmost impartiality», § 3). Bisognerebbe, dice, concedere loro delle «entità nascenti e imperfette» (i flussi o velocità) ma anche «delle velocità di velocità, le seconde, terze, quarte e quinte velocità», cosa al di sopra di ogni intendimento umano. Afferma poi di stupirsi che i «liberi pensatori» ammettano cose così strane («most strange») loro che sono così riluttanti davanti ai misteri della religione: «Colui che può digerire una seconda o terza flussione non dovrebbe essere, mi sembra, molto esigente riguardo a qualsivoglia punto della divinità» (cfr. § 7). Ma è soprattutto la proprietà di «evanescenza» che egli considera come un'assurdità matematica (§ 17).

L'importanza storica e intellettuale di queste critiche è sottolineata dallo storico della matematica Florien Cajori. Per Cajori è «l'avvenimento maggiore del secolo nella storia della matematica britannica» che darà luogo ad una polemica molto interessante con dei matematici come James Jurin o Benjamin Robins, difensori sia di Newton che della sua teoria delle flussioni. Come osservato da Koyré, le ragioni di questi attacchi sono le conseguenze teologiche derivanti, secondo i suoi contemporanei, dalla fisica di Newton ([KOY], p. 265). E inversamente, è per rispondere a questi attacchi che Newton inserisce nella sua seconda edizione dei Principia uno «scolio generale» relativo alle sue credenze religiose (*ib.*, p. 268).

Sarebbe senz'altro difficile ritrovare questa controversia nella matematica contemporanea, almeno nella forma in cui si è svolta all'inizio del diciottesimo secolo tra Rolle e Varignon. In questo senso il movimento/riposo è diventato un oggetto consensuale della matematica. Eppure la disputa sempre viva tra «intuizionismo» (più o meno moderato) e «formalismo» o «logicismo» (più o meno moderati) sarebbe ancora rilevante, se si classificasse la costruzione insieme con il cambiamento/movimento e il simbolo con l'oggetto/concetto immutabile (cfr. [POI2], libro II, II.4 ; [POI4], App., II).

6. *Il ritorno del continuo.*

Poincaré torna senza sosta sulla questione, per lui fondamentale, del rapporto tra i significati matematico e filosofico del continuo. Se il primo presenta il vantaggio di fornire un ambito esente dalle contraddizioni dell'esperienza sensibile, lo paga con un prezzo considerevole, una rottura con l'intuizione sensibile, cioè con la natura stessa ([POI4], App., II). L'esistenza matematica essendo semplicemente la non-esistenza di contraddizioni (id.), quello che pone un problema è l'esistenza di una tale realtà («una funzione») che risponda a quanto i fisici si aspettano dalla matematica. Tale questione, secondo Poincaré, riflette la disputa tra le filosofie di Leibniz e di Kant. Per i matematici si traduce nella disputa tra i realisti cantoriani e i pragmatici.

Nella nostra analisi della continuità l'alternativa continuo/discreto presenta una differenza dalle altre questioni che abbiamo considerato. Una delle difficoltà principali stava, infatti, nel mostrare che la matematica stessa rispondeva a una problematica che le era *a priori* esterna, o che questa sia l'alternativa evoluzionismo/catastrofismo o che sia il problema del movimento/riposo. Questo ostacolo, tuttavia, non esiste per il continuo e il discreto, in quanto le loro definizioni trovano le loro origini nella matematica. Ma questa stessa semplicità potrebbe nascondere un pericolo: confondere due definizioni diverse, con lo stesso nome. Infatti non è dimostrato in nessun modo che i significati di questi termini in matematica e in filosofia siano identici.

Questo poteva sembrare inutile in quanto il testo platonico che li aveva introdotti trattava precisamente della grandezza, attraverso una problematica di natura matematica. Questi termini apparivano non in un contesto di riflessione filosofica, ma di una classificazione di varie parti della matematica (l'aritmetica, la geometria, l'astronomia, la musica, ...). Inversamente, l'esempio dato da Socrate non riguardava direttamente elementi geometrici o algebrici, ma percezioni sensibili; da una parte, visuali, il conteggio di dita, dall'altra tattili, il grosso e il sottile, il duro e il molle.

È precisamente contro una tale semplicità che Poincaré ci mette in guardia, cioè il confondere la definizione matematica col senso intuitivo di uno stesso termine. Il continuo dei matematici, ripete, non è la stessa cosa di quello concepito a partire dall'esperienza sensibile. Certo questa è in ultima istanza la fonte di quello, ciononostante il continuo matematico sembra dimenticare la riunione per concentrarsi sulla divisione (cfr. paragrafo precedente).

Per precisare questa nozione bisogna riferirla a ciò che si chiama attualmente la potenza del continuo. Definizione puramente insiemistica, dice Poincaré, che conduce a degli esempi tanto bizzarri quanto inutili in voga presso alcuni matematici.

> «*Un tempo quando si inventava una funzione nuova, era per uno scopo pratico; oggi vengono inventate appositamente per mettere in fallo i ragionamenti dei nostri padri; e non ci sarà mai altro da tirarne fuori.*» ([POI2], libro II, II.5).

Questo è il caso, per Poincaré, dell'insieme di Cantor che conduce al teorema o paradosso di Banach-Tarski secondo il quale si può tagliare una sfera in un numero finito (che si può prendere uguale a cinque) di parti e poi arrangiare alcune di queste parti in modo da ottenere due sfere o ancora una sfera di volume doppio e, per iterazione (o anche direttamente) una sfera grande quanto si voglia. È un altro modo di esprimere l'esistenza di insiemi non Lebesgue misurabili, la cui esistenza segue dall'assioma della scelta.

Poincaré li critica espressamente perché per lui dimensioni e continuo sono intimamente legati ([POI4], III.2). Se si preoccupa in numerosi scritti di questa questione e del suo aspetto dimensionale (per es. [POI3], 1ª parte, III.3; [POI1], 1ª parte, II), è in un testo tardivo che espone il più chiaramente possibile la sua concezione.

Il continuo a n dimensioni è definito come

> *«insieme di n quantità suscettibili di variare indipendentemente l'una dall'altra e di prendere tutti i valori reali soddisfacenti certe disuguaglianze»* ([POI4], III.2).

Benché «irreprensibile» questa definizione non è «soddisfacente» perché legata a coordinate. In termini moderni non è canonica (o intrinseca). Quindi Poincaré propone una definizione per induzione, usando i tagli di Dedekind, dando così simultaneamente una definizione in ogni dimensione.

Un continuo di dimensione uno è una curva chiusa (ib., p. 28-29). Un continuo A sarà ciò che, quando gli viene tolto un continuo B di dimensione inferiore di almeno due a quella di A, rimane in un solo blocco, ma che viene diviso in due parti disgiunte se la dimensione di B è quella di A meno uno. Come si vede, queste proprietà non sono verificate se si considerano non delle varietà (lisce) ma degli spazi con singolarità. L'obiettivo di Poincaré non è di elaborare qui una teoria formalizzata, ma di mettere in risalto le idee fondamentali riguardanti la questione. O più semplicemente, la sua idea del continuo era quanto rispecchiato nella nozione odierna di varietà differenziabile.

Ma quanto è sottolineato qui è l'aspetto unitario del continuo, fisico o sperimentale, «versus» la sua assenza per gli analisti, altro rimprovero di Poincaré alla loro definizione del continuo. È un ritorno alla nozione storica di continuo, il significato moderno essendo stato elaborato contro i matematici primitivi («i padri») i quali erano più vicini al concetto intuitivo o fisico.

In effetti Aristotele distingue tre nozioni legate al continuo moderno: quello che è consecutivo, contiguo e continuo (ce ne sarebbero ancora altre due che non considereremo (cfr. *Fisica*, V, 3, 226b-227b)). Questa interpretazione rimarrà dominante fino alle definizioni «rigorose» degli analisti criticati da Poincaré.

Consecutivo: non vi è alcuna separazione dello stesso genere tra le estremità.

Contiguo: nessuna separazione dello stesso genere, inoltre le estremità sono in uno stesso luogo.

Continuo: contiguo le cui estremità sono identiche.

La *Fisica* insiste sull'aspetto di generalità decrescente dal consecutivo al continuo, continuo implica contiguo il quale a sua volta implica consecutivo, ma le implicazioni reciproche sono false. Il contiguo sarebbe, da un punto di vista sensibile, un incollamento così perfetto che le estremità risulterebbero impercettibili. Per la matematica moderna un esempio sarebbe una riunione di due intervalli del tipo [A,B[e [B,C], mentre una rappresentazione del continuo sarebbe una riunione di intervalli del tipo [A,B] e [B,C].

Eppure il filosofo greco propone anche come esempi di continuo, «l'inchiodamento, l'incollamento, l'assemblaggio, l'innesto». Questo può provenire da una certa confusione tra termini vicini di cui non si ha (ancora) una definizione (matematica) rigorosa, ma è anche possibile interpretare questi termini in modo più coerente se si considera direttamente l'argomento utilizzato in ognuno dei casi.

In effetti, nel testo aristotelico la differenziazione dei termini si fa caratterizzando le estremità messe in relazione. Il ragionamento sul continuo consiste, quindi, nel distinguerlo dalle altre possibilità in quanto due cose formano in realtà un'unica cosa.

È detto continuo quello che forma un «uno». È l'argomento fondamentale perché consente di mostrare la contraddizione tra indivisibile e continuo, un elemento indivisibile non ha parti e quindi non ha estremità. Da cui l'impossibilità per un continuo, per esempio il tempo, di essere formato da tali indivisibili, gli attimi. Questo studio si conclude sulla polemica contro l'attribuzione di esistenza reale al punto e all'unità (o ad ogni altra nozione matematica per quanto riguarda Aristotele). Non è possibile identificare il punto e l'unità perché due punti possono essere congiunti da una curva, mentre non vi è nessun intermediario tra due numeri (interi). Si ritrova la distinzione classica degli Antichi Greci, tra i numeri (interi) discreti e le grandezze geometriche continue.

In termini moderni, il continuo si contrappone al discreto, come l'uno al multiplo. Tuttavia questo «uno» sarebbe indefinitamente divisibile, mentre al contrario questo «multiplo» lo sarebbe solo un numero finito di volte. Tuttavia questo dovrà essere precisato, come vedremo in [OFM2]. Visto che topologicamente è possibile avere degli insiemi infiniti discreti (per esempio l'insieme dei naturali con la sua topologia usuale), non è possibile trasporre direttamente la concezione antica. Questo importa poco nell'ambito aristotelico dove l'infinito esiste solo in modo potenziale.

Si capisce che «l'unità» persa dal continuo nella sua forma matematica, sia precisamente quella formata da quanto è indefinitamente divisibile. In *Les Mathématiques et la Logique*, Poincaré afferma che il fondamento intuitivo della sua definizione del continuo attraverso i tagli si trova precisamente in queste divisioni successive.

Ma allora a questo punto non è tanto con il continuo che abbiamo a che fare, ma con la *connessione*. È vero che è solo con i lavori su «l'Analysis Situs» (i.e. la topologia) che una distinzione sarà fatta. Una figura geometrica era detta continua se era fatta di un unico pezzo (l'unità), cioè, in termini moderni, se era connessa.

Il termine «συνεχές» usato dagli Antichi Greci e tradotto con «continuo» significa innanzi tutto «che si tiene», «che è ininterrotto»; per una figura, la sua traduzione con «connesso» sarebbe probabilmente più corretta. Inoltre una funzione continua è intuitivamente concepita come qualcosa che manda una figura connessa in un'altra figura connessa, trasformando «un'unità multipla» in un'altra, per opposizione alle funzioni che lasciano dei «buchi» come le funzioni «a scalini»: «*All'inizio [l'idea di funzione continua] era solo un'immagine sensibile, per esempio, quella di una linea continua disegnata col gesso su una lavagna.*» ([POI3], 1ª parte, I.5). Tuttavia se la definizione (moderna) della continuità implica questa proprietà, non vale il viceversa.

Se ne ha un esempio con la funzione reale: $f(x) = \mathrm{sen}(1/x)$ per $x \neq 0$, $f(0) = 0$. L'immagine di questa applicazione è connessa e inoltre ogni intervallo connesso ha un'immagine connessa, l'immagine di un intorno di 0, quanto si voglia piccolo, contiene (e in effetti è uguale a) l'intervallo dei reali tra -1 e 1. Però questa funzione non è continua, essendo molto oscillante in un intorno di 0. È precisamente la formulazione moderna della continuità che conduce a distinguere queste due proprietà come lo mostra l'osservazione del 1874 di Darboux ([DAR], p. 109).

Anche la definizione proposta da Poincaré si basa sulla connessione: una figura che forma un blocco non può essere divisa in due da qualcosa la cui dimensione è piccola. L'essere continuo è una proprietà globale che si caratterizza tramite l'unità della figura. È sempre questa unità ad essere assente dalla costruzione dei reali per aggiunzioni successive, dagli interi ai razionali, ai numeri algebrici e finalmente ai reali. Man mano, sono colmati gli spazi lasciati dai precedenti, senza avere mai la certezza di avere concluso ([POI1], 1ª parte, II). La definizione del matematico francese si ricollega alla nozione aristotelica del continuo.

Il continuo per Poincaré sembra avere due nature, una partecipe della matematica, l'altra della filosofia (e una terza forse della fisica). Certo le sue motivazioni, basate sulla relazione tra l'esperienza sensibile e «lo spirito umano», non sono quelle, ontologiche, di Aristotele. Ed al contrario di Platone per cui la matematica è propedeutica alla filosofia, per Poincaré la matematica è l'oggetto essenziale della filosofia.

7. *I matematici e Platone.*

Si è spesso detto che i matematici sono spontaneamente platonici nel senso che non credono che quello su cui lavorano sia pura invenzione immaginaria. Così Alain Connes afferma in modo risoluto una «*posizione platonica rinnovata dal teorema di Goedel*» (*La Recherche*, 20 Agosto 2005, p. 77). Questo attaccamento quasi sentimentale non è forse completamente estraneo alla posizione di primo piano che il filosofo ateniese attribuisce alla matematica. La leggenda non dice forse che sul frontone dell'Accademia campeggiava la scritta «Non entri nessuno che non sia un geometra» («ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ»)?

Per Platone gli oggetti matematici non sono dei pensieri complessi, *inventati* dal loro autore, ma hanno una loro esistenza propria che viene scoperta tramite l'esplorazione matematica del mondo delle Idee. È vero che in matematica non si può fare quello che si vuole con quello che si ha. Quello su cui si lavora possiede una consistenza, una durezza, una resistenza assolutamente simile a quella di un oggetto materiale, e certamente opposta a un pensiero immaginario modificabile a volontà.

Secondo A. Connes (ib.) «*La percezione che abbiamo della realtà matematica è tale che questa si manifesta con una resistenza e una coerenza paragonabili a quelle della realtà esterna*».

Nello stesso modo Léon Brunschvicg conclude la sua analisi dei lavori sulla continuità delle funzioni osservando che [la continuità]

«*si è imposta ai geometri e agli analisti quasi malgrado loro stessi, malgrado la tradizione secolare che avevano tendenza a prendere per intuizione immediata.*» ([BRU], IV, p. 339-340; siamo noi a sottolineare).

E Jean Dieudonné afferma che «*...è poiché costretti dalla natura profonda (e spesso nascosta fin là) degli oggetti e relazioni classiche, che i matematici, nel periodo 1800-1930, hanno forgiato nuovi strumenti astratti*». ([DIE], intr., p. 10; siamo noi a sottolineare).

Anche se è possibile trovare dei matematici contemporanei che si considerano «realisti», non è sicuro che siano così numerosi. Una delle principali difficoltà con cui si scontra il realismo cantoriano criticato da Poincaré forse non è estranea alla necessità, come nell'ambito delle Idee platoniche, di accettare la loro delocalizzazione oggettiva o ontologica (cfr. [CH-CO]). Ripugna ai matematici, come a chiunque altro, ammettere, sotto qualsiasi forma, una tale «delocalizzazione oggettiva» (cfr. A. Connes citato qui sopra). Molto probabilmente molti sarebbero inclini a una qualche forma di «Poincaréismo», nel senso che la matematica si ritroverebbe nella natura umana, per esempio nel modo in cui l'uomo può concepire il mondo. L'importante è che i concetti matematici forgiati dai matematici siano nello stesso tempo sia la loro propria invenzione che comunicabili agli altri matematici. Si è più vicini ad una specie di kantismo (cfr. per es. [ATK]) che al filosofo ateniese. Per alcuni esempi recenti ci si potrà riferire a due articoli apparsi nelle Notices of AMS di dicembre 2005 ad opera di Martin Gardner e Brian Davies (p. 1345 e 1350 rispettivamente).

Benché, ed è in questo che essi differiscono dalla maggior parte dei non-matematici, con un pizzico più o meno accentuato di «realismo cantoriano». Così la posizione del biologo di [CH-CO] non è tanto in disaccordo con quella del matematico, ma testimonia una certa incredulità. Questo pizzico di realismo sarebbe anche il pizzico di follia che renderebbe necessario, secondo l'esigenza platonica, l'essere un matematico prima di iniziare a filosofare.

Ma identificare questo «realismo» al platonismo riduce la portata della realtà delle Idee platoniche e le deforma proiettando su di esse gli oggetti matematici o dei matematici. Il matematico «realista» reclama una delocalizzazione oggettiva, la possibilità per gli oggetti matematici di avere una (certa) realtà senza però essere in un luogo dato. Per Platone si tratta di una delocalizzazione ontologica, nel senso in cui ogni realtà è delocalizzata (vedere [PLA2], 130e, 138a-b, 145b-e, 162c). Di un interesse particolare per una fisica contemporanea che oscilla tra il corpuscolo relativista e l'ondulatorio quantistico è lo slittamento effettuato da Parmenide nell'opera eponima. Per confutare la delocalizzazione ontologica avanzata da Socrate, ricopre letteralmente di un velo l'immagine luminosa proposta da quello (131b-c). I due tuttavia sono d'accordo per respingere una localizzazione degli oggetti matematici nel pensiero (132b) che riscontrerebbe il favore di certi biologi (cfr. [CH-CO]).

La concezione di Platone è quindi diversa da questo «realismo» matematico, e non è motivo di gloria per i matematici, classificati dal filosofo dalla parte del cacciatore. Così, contrariamente a Poincaré (il quale aveva ben colto questo aspetto nella sua opposizione al platonismo), gli oggetti considerati dal matematico esistono indipendentemente da lui, e il suo lavoro consiste nel dare loro la caccia. Questa caccia è particolare perché il suo scopo non è di uccidere (cacce che utilizzano tecniche di lancio), ma di catturare, il suo strumento essendo la rete che permette di riportare la preda viva, causando il minor danno possibile (forse quello che in matematica si chiama «il prezzo da pagare» e che da buon economo bisogna minimizzare). Tuttavia, nello stesso modo in cui i cacciatori ignari della scienza della cottura e delle salse portano le loro prede al cuoco che conosce l'arte di prepararle, i matematici, almeno quelli con un «minimo barlume di intelligenza» sanno che non possono accontentarsi di tenere le loro scoperte per loro o i loro colleghi, i quali non saprebbero cosa farsene. Al contrario devono portarle a chi sa accomodarle adeguatamente, il (misterioso) διαλεκτικός, colui che si occupa dell'argomentazione (cfr. *Eutidemo* 290 c).

Sarebbe quindi sbagliato concepire gli innumerevoli riferimenti a Platone da parte degli scienziati del diciassettesimo secolo, e prima ancora da parte di Galileo, come il desiderio di rovesciare la gerarchia usuale tra scolastica e matematica. Essi cercano piuttosto questo pensiero della continuità e, più generalmente dell'unità, come si presenta nell'autore delle *Leggi* (vedere § III.4). Questa unità non è una posizione media situata tra due sistemi estremi, ma, al contrario, un pensiero in lotta con se stesso (vedere § III.3). È in questo percorso che si riconoscerà lo scienziato italiano, e più generalmente tutti coloro che sono all'origine della fisica moderna.

Sarebbe altrettanto sbagliato pensare che questa unità consista, per noi moderni, in un ritorno nostalgico all'ideale dello scienziato totale del Rinascimento, nel costruire ponti per collegare le discipline. Se l'unità è possibile, non può essere che perché esiste un'unità di natura nel pensiero. O ancora perché la natura, come la pensano Galileo e i suoi successori, è continua.

È seguendo questa prospettiva che studieremo, in un altro lavoro ([OFM2]), la nascita di una nuova scienza, quella del movimento.

Testi citati.

[ARI] ARISTOTELE, *Métaphysique*, trad. J. Tricot, Vrin, 1991 (*Metafisica*, trad. G. Reale, Bompiani, 2004)

[ATK] PETER ATKINS, *Le doigt de Galilée,* trad. E. et A. Bouquet, Dunod, 2004 *(Il dito di Galileo*, trad. S. Romano, Cortina ed., 2004)

[BOY] CARL BOYER, *The History of the Calculus and its conceptual development*, Dover, 1959 (*Storia del Calcolo*, a cura di A. Guerraggio, Mondadori, 2007)

[BRU] LÉON BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, ried. Blanchard, 1993

[BUF] ÉRIC BUFFETAUT, *A la recherche d'un monde perdu*, L'Archipel, 1997

[CAV] MAURICE CAVEING, *La proportionnalité des grandeurs dans la doctrine de la nature d'Aristote*, Rev. d'hist. des sc., 1994, XLVII/2, p. 163-188

[CH-CO] JEAN-PIERRE CHANGEUX-ALAIN CONNES, *Matière à pensée*, Odile Jacob, 1992 (*Pensiero e materia*, C. Milanesi, Bollati Boringhieri, 1991)

[CLA] MAURICE CLAVELIN, *La philosophie naturelle de Galilée*, 1968, ried. Albin Michel, 1996

[COU] ANTOINE COURNOT, *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Hachette, 1851, 2 vol., ried. Vrin, 1975 (*Opere di A.Cournot*, a cura di E.Franco Neri, UTET, 1981)

[DAR] GASTON DARBOUX, *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Ann. Ec. norm. sup., IV, 1875

[DIE] JEAN DIEUDONNÉ, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987 (*L'arte dei numeri, Matematica e matematici oggi,* Mondadori, 1985)

[GAL] GALILEO GALILEI, *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, a cura di A. Favaro, G. Barbèra, 1968, (1890-1909), 20 vol.

[HAL] ALFRED HALL, *Filosofi in guerra – La polemica tra Newton e Leibniz,* trad. D. Panzieri, il Mulino, 1982

[ERO] ERODOTO, *Storie*, Mondadori, 2007

[KOY] ALEXANDRE KOYRÉ - GALILEO - PLATO, *Journal of the History of Ideas*, IV, 4, 1943, p. 400-428, trad. in *Étude d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, 1973 (in *Introduzione a Platone,* a cura di L. Sichirollo Editori Riuniti, 1996)

[OFM1] SALOMON OFMAN, *Double langage, langage double*, L'Harmattan, da pubblicare

[OFM2] SALOMON OFMAN, *Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Teorizzazione del movimento ed infinitesimali.* La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'U.M.I. (da pubblicare)

[OFM3] SALOMON OFMAN, *Mouvement & origine du calcul infinitésimal: Aristote, Euclide, Galilée*, L'Harmattan, 2008

[PAS] BLAISE PASCAL, *De l'Esprit géométrique et de l'art de persuader*, in *Œuvres complètes*, Opuscules, VII, Gallimard, 1954 (*Pensieri, opuscoli, lettere*, a cura di A. Bausola, Rusconi, 1978)

[PLA1] PLATONE, *République*, trad. G. Leroux, Flammarion, 2002 (*La Repubblica*, trad. F. Sartori, ed. Laterza, 1994)

[PLA2] PLATONE, *Parmenide*, trad. L. Brisson, Flammarion, 1999 (*Parmenide*, trad. Franco Ferrari, Biblioteca Univ. Rizzoli, 2004)

[PLA3] PLATONE, *Sofista*, trad. F. Fronterotta, Biblioteca Univ. Rizzoli, 2007

[POI1] HENRI POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1943 (*La scienza e l'ipotesi*, trad. C. Sinigaglia, Bompiani, 2003)

[POI2] HENRI POINCARÉ, *Science et Méthode*, Paris, Kimé, 1999 (*Scienza e metodo*, Einaudi, 1997)

[POI3] HENRI POINCARÉ, *Valeur de la science*, Flammarion, 1999 (*Il valore della scienza*, trad. G. Ferraro, Dedalo, 1992)

[POI4] HENRI POINCARÉ, *Dernières pensées*, Flammarion, 1963 (*Pensieri Ultimi*, in *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Piovan, 1989)

[SEI] CHARLES SEIFE, *Zéro, la biographie d'une idée dangeureuse*, trad. C. Coqueret, Lattès, 2002 (*Zero. La storia di un'idea pericolosa*, trad. G. Castellani, Bollati Boringhieri, 2002)

[WES] RICHARD WESTFALL, *Newton*, trad. M.A. Lescouret, Flammarion, 1994 (*Newton*, trad. A. Serafini, Einaudi, 1989)

Salomon Ofman
Université Paris 7
Institut de mathématiques Geométrie et dynamique
2 Place Jussieu, 75005 Paris, France
e-mail: ofman@math.jussieu.fr