La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paolo Freguglia, Cristiano Bocci

Dall'eredità grassmanniana alla teoria delle omografie nella scuola di Peano

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.1, p. 131–164.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_131_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Aprile 2008, 131-164

Dall'eredità grassmanniana alla teoria delle omografie nella scuola di Peano

PAOLO FREGUGLIA - CRISTIANO BOCCI

In ricordo di Paola Bonelli

1. – Introduzione.

In un precedente articolo comparso in questa rivista (1) abbiamo esaminato quegli aspetti del calcolo geometrico, o meglio della sua storia, legati alla nozione di numero ipercomplesso, in particolare a quella di quaternione. Questa nozione, introdotta da William Rowan Hamilton intorno al 1844, rappresenta, pur nelle differenze delle rispettive origini e delle relative proprietà, una naturale evoluzione della nozione di numero complesso. Abbiamo altresì sviluppato tematiche relative al calcolo geometrico in un volume di recente pubblicazione (2) dove appunto si illustra anche il fondamentale apporto di Hermann Grassmann, avvenuto, nella sua proposta iniziale, nel 1844, e che si diversifica dall'approccio ipercomplesso. Dedichiamo questo articolo proprio agli sviluppi che ebbe in Italia, in particolare nella scuola di Peano, l'opera di Grassmann. Proporremo anche una possibile generalizzazione delle idee che stanno alla base della «teoria dell'estensione» peaniano-grassmanniana. Ci soffermeremo poi sull'uso da parte di Peano di questa impostazione per dimostrare fondamentali teoremi della geometria proiettiva. Analizzeremo quindi gli sviluppi, realizzati dalla scuola peaniana, dal *sistema generale*

(1) Vedi P. Freguglia, "Calcolo geometrico e numeri ipercomplessi: origini e primi sviluppi ottocenteschi", *Bollettino U.M.I.* s. VIII, vol. VII-A, aprile 2004 pp. 101-125.
(2) Vedi P. Freguglia [2006]

(basato sulle idee di Grassmann) al *sistema minimo* ed alla teoria delle *omografie*. Vedremo infine un' interessante applicazione di queste fatta da Roberto Marcolongo.

Va preliminarmente ricordato che l' *Ausdehnungslehre* del 1844 di Hermann Günther Grassmann è un'opera piena di riflessioni filosofiche e scritta con un linguaggio poco conforme alla mentalità matematica. Peraltro Möbius si rifiutò di recensirla dichiarandosi incompetente a giudicare questioni filosofiche. In Germania quest'opera non ebbe nel mondo matematico alcuna risonanza ed è difficile sostenere che qualche matematico di rilievo l'abbia davvero letta completamente. In Italia invece Giusto Bellavitis la lesse e sviluppò con Grassmann contatti epistolari. Fu apprezzata da Luigi Cremona. Grassmann pubblicò successivamente, nel 1862, una seconda edizione dando ampio spazio a interpretazioni e applicazioni geometriche. Tuttavia anche questa edizione non venne mai recensita. Stando alla Prefazione del fondamentale lavoro di Peano del 1888, sul quale di seguito ci soffermeremo, l'edizione che il matematico torinese tenne presente fu quella del 1844. Riprendendo da p. 415 dell'edizione del 1862, la definizione grassmanniana che dobbiamo subito tener presente è la seguente:

DEFINIZIONE 5. – *Chiamiamo* <u>*grandezza estensiva*</u> [*estensive Grösse*] *ogni espressione derivata da un sistema di unità* [cfr. base di uno spazio vettoriale] (*che non sia limitato alla unità assoluta*) *mediante numeri che chiameremo* <u>*numeri di derivazione*</u> *delle unità per quelle grandezze. Ad esempio il polinomio*:

(1.1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

dove le a_i *sono numeri reali e le* e_i *formano un sistema di unità, è una grandezza estensiva. Una grandezza si dirà numerica se il sistema consiste della sola unità assoluta* ([3]).

([3]) Vedi H. Grassmann *G.W.* I_2 [1894], pp. 11-12. Si rimanda anche a P. Cantù, *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'* Ausdehnungslehre *di H. Grassmann*, Tesi di dottorato (Università di Genova, XIV ciclo) a.a. 2001-2002, pp. 414-417.

Grassmann introduce quindi le operazioni (somme e prodotti) tra le grandezze estensive che vedremo poi nell'interpretazione peaniana. Sintetizzando, potremmo affermare che Grassmann aveva proposto una teoria generale ed astratta delle grandezze, concependo queste ultime come basi del pensiero matematico. Peano interpreterà le nozioni grassmanniane in chiave decisamente euclidea, generalizzando per quanto possibile fino alla terza dimensione, cioè allo spazio comunemente inteso, la nozione di sistema di unità. Ed è proprio sulla diversificazione dei tipi di unità che Peano imbastisce il nocciolo della sua costruzione teorica.

2. – Il calcolo geometrico grassmanniano secondo Peano e la sua scuola.

Quando dall'a.a. 1885-86 all'a.a. 1888-89 Giuseppe Peano (1858-1932) tenne per incarico presso l'Università di Torino l'insegnamento delle «Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale», ebbe ben presenti le questioni relative al calcolo geometrico. Cosicché, nel pubblicare nel 1887 in un volume (dal titolo appunto *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*) le sue lezioni, gli autori a cui fece riferimento furono Bellavitis, Möbius, Hamilton e Grassmann. In particolare privilegiò, in questa prima trattazione sull'argomento, il modo di esprimersi bellavitisiano, anche per una certa influenza che dovette subire da parte di Genocchi, il quale era legato da sincera amicizia e stima a Bellavitis (ne fa fede l'interessante epistolario Genocchi-Bellavitis ([4])). Ma è nel 1888 che Peano pubblica l'opera fondamentale su queste tematiche: *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H.Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. Un'opera cruciale anche per la storia della logica. In questo lavoro Peano mostra di essersi convinto decisamente all'impo-

([4]) Per l'epistolario Genocchi - Bellavitis si rimanda a G. Canepa, P. Freguglia "Alcuni aspetti della corrispondenza Giusto Bellavitis - Angelo Genocchi", in *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici* (a cura di A.Conte e L.Giacardi), Deputazione subalpina di storia patria, Torino, 1991 e G. Canepa, "Le carte Bellavitis", Appendice B in P. Freguglia [1992].

stazione grassmanniana. Si deve peraltro ricordare che Peano realizzò lavori di tipo algebrico geometrico tra 1881 e il 1882, quando era assistente, prima di esserlo di Genocchi, di Enrico D'Ovidio (1842-1933). Peraltro D'Ovidio pubblicherà nel 1896 un trattato di geometria analitica (dal titolo *Geometria Analitica*) di notevole interesse, dove si riscontrano tematiche tipicamente geometrico analitiche esposte con l'impiego della cosiddetta «notazione abbreviata» ([5]). L'esigenza di un uso della «notazione abbreviata» testimonia la tendenza verso una compattificazione del formalismo in geometria analitica che favorirà in qualche modo sia l'attuazione dei metodi sintetici proposti dai vettorialisti (in Italia, C. Burali-Forti e R. Marcolongo), sia lo sviluppo delle tecniche che si stavano affermando dell'algebra delle matrici.

L'allievo di Peano che maggiormente si dedicò agli studi di calcolo geometrico fu Cesare Burali Forti (1861-1931). Ma anche Filiberto Castellano (1860-1919), Tommaso Boggio (1877-1963) e lo stesso Mario Pieri (1860-1904) si interessarono all'argomento. Per Peano ed ancor più per Burali Forti, l'uso delle coordinate costituiva una sorta di intermediazione numerica per lo studio degli enti geometrici e delle loro proprietà. Il calcolo geometrico si propone invece, con la sua assolutezza e sinteticità, come un approccio immediato e diretto alle questioni geometriche, senza tuttavia escludere le coordinate. D'altra parte Peano aveva già fatto vedere nel *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre ([6]) come facilmente si possano introdurre le coordinate. Peano presenta con elementi di originalità e con chiarezza espositiva le concezioni grassmanniane, dando un apporto sostanziale alla comprensione di queste. Il volume è organizzato in modo tale che ad ogni capitolo viene inserita una parte inerente le «applicazioni» alla geometria elementare e proiettiva e alla meccanica. Oltre a questo ampio saggio, Peano realizzò altri interessanti lavori sull'argomento ([7]). Si parte dunque dalla nozione di *formazione geometrica* che è la

([5]) Il trattato di D'Ovidio risentiva molto delle influenze tedesche (tanto per citare Plücker, Hesse, Clebsch, Lindemann, Baltzer, Bobillier). Vedi E. D'Ovidio [1896] pp. 105-108.

([6]) Vedi G.Peano [1888], p. 133.

([7]) Per quanto concerne i contributi della scuola di Peano in questo settore, tra i vari base di tutto l'impianto teorico proposto. Parafrasando Grassmann, siano allora m, n, p, ..., q numeri reali, allora una *formazione geometrica* sarà una espressione di questo tipo:

$$m\alpha + n\beta + p\gamma + \ldots + q\tau \qquad (2.1)$$

in cui se tutte le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ e τ denotano *punti* si dirà di prima specie (o primo grado), se denotano *segmenti*, di seconda specie, se denotano *triangoli*, di terza specie, e se, infine, individuano *tetraedri* ([8]), di quarta specie. Nell'impostazione peaniana non si hanno forme di specie superiore alla quarta, nel senso che non si considerano, per le $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ e τ interpretazioni a dimensioni superiori alla terza ([9]).

Se vogliamo generalizzare, possiamo ora introdurre la seguente nomenclatura:

1-edro	punto
2-edro	segmento
3-edro	triangolo
4-edro	tetraedro
.....	.....
n-edro	n-edro

Quindi una *formazione geometrica* di q-ma specie in uno spazio euclideo k dimensionale è definita dalla seguente espressione:

$$\sum_i m_i \tau_i^q$$

dove m_i sono numeri reali e τ_i^q sono q-edri con q fissato e tale che: $1 \leq q \leq k + 1$.

lavori realizzati da Cesare Burali Forti e Roberto Marcolongo, si segnala C. Burali Forti, R. Marcolongo [1909] e C. Burali Forti [1926]. Per la letteratura vedi anche U. Bottazzini, "Dall'analisi matematica al calcolo geometrico: origine delle prime ricerche di logica di Peano", *History and Philosophy of Logic*, 6 (1985), pp. 25 -- 52 e a P. Freguglia [1992] e P. Freguglia, "Il contributo di Giuseppe Peano e della sua scuola al calcolo geometrico", *Peano e i fondamenti della matematica, Atti del Convegno (Modena 22-24 ott. 1991)*, Mucchi, Modena, 1993, pp. 255-285.

([8]) Si rammenta che alle lunghezze dei segmenti, alle aree dei triangoli ed ai volumi dei tetraedri possono associarsi segni ($+$ o $-$)

([9]) Vedi G. Peano [1888], pp. 25-26.

Un punto verrà denotato con una lettera maiuscola, ad es. A, una linea con AB, una superficie (triangolo) con ABC, un volume con ABCD. Si chiamerà *prodotto progressivo* ([10]) tra una formazione di specie i ed una formazione di specie j, supposto che $i + j \leq 4$ (nel caso del piano dovremmo supporre che $i + j \leq 3$), la somma dei prodotti di ogni termine della prima per ogni termine della seconda non cambiando «l'ordine delle lettere che indicano punti nelle due espressioni». Risulterà allora che un punto A è la formazione di prima specie più semplice e che un segmento (orientato) AB è il prodotto progressivo di due punti (e risulterà essere una formazione di specie 2), come pure che un triangolo ABC (che risulterà essere una formazione di specie 3) lo è di tre punti oppure di un segmento BC per il punto A. D'altro canto la formazione di prima specie B – A rappresenta anch'essa un segmento orientato. Si ha inoltre, considerando segmenti orientati, che AB = – BA (a conferma della non commutatività del prodotto progressivo) e quindi AA = 0. Il prodotto progressivo interpreta l'operazione di *proiezione*, come si può constatare facilmente sia nel caso del prodotto AB (proiezione dal punto A al punto B) sia nel caso del prodotto ABC.

Inoltre se A e B sono due punti non coincidenti, individuanti una retta, un punto C su questa può essere espresso dalla forma di prima specie:

(2.2) C = xA + yB dove x e y sono due opportuni numeri reali che di seguito determineremo.

Infatti nella (2.2) moltiplicando primo e secondo membro, prima a destra per B e poi a sinistra per A (ricordando che AA = BB = 0) si ottiene:

(2.3) $$C = (CB/AB)A + (AC/AB)B$$

dove i rapporti, coefficienti rispettivamente di A e B, vengono stabiliti tra i moduli dei segmenti orientati considerati.

([10]) Ibid p. 30

In questo contesto per alcuni particolari prodotti progressivi uguagliati a zero si possono stabilire interessanti interpretazioni geometriche, come ad esempio:

ABCD = 0	i quattro punti A, B, C, D sono complanari;
ABC = 0	i tre punti A, B, C sono allineati, ovvero giacciono su una stessa retta;
AB = 0	i due punti A, B coincidono;
Aα = 0	il punto A giace sul piano α, cioè appartiene a α;
Aa = 0	il punto A giace sulla retta a, cioè appartiene alla retta a;
ab = 0	le rette a e b giacciono su uno stesso piano, cioè o si incontrano o sono parallele;
abc = 0	le tre rette a, b, c hanno un punto in comune.

Nel lavoro del 1888 (dove si trova nella prima parte un'ampia trattazione sulla «logica deduttiva») Peano farà qualche tentativo di applicazione della logica (ancora assai vicina però all'impostazione algebrica booleana e quindi non ancora trasformata adeguatamente, come più tardi Peano farà) alle dimostrazioni ([11]).

Passiamo ora ad un'altra fondamentale operazione del calcolo geometrico proposta da Peano, il *prodotto regressivo* ([12]), che interpreta l'operazione geometrica di *intersezione* o *sezione*. La condizione per avere il prodotto regressivo è che, se i e j indicano rispettivamente la specie (o il grado) di due formazioni, nel caso spaziale sia $i+j>4$ e nel piano $i+j>3$. Si esegue quindi il prodotto come per il caso progressivo. Peano utilizza tanto per il prodotto progressivo che per quello regressivo lo stesso simbolo, anche se in alcuni casi li distingue tipograficamente. E ciò con ragione, essendo la discriminante tra i due prodotti nel valore della somma $i+j$. Tanto è che utilizzerà per compendiare sinteticamente, il concetto di *prodotto alternativo* o *alternato* ([13]).

Nel Cap. IX del *Calcolo geometrico* ([14]) viene proposto, partendo da un contesto alquanto generale, la nozione di *sistema lineare* (nonché di

([11]) Vedi M. Borga, P. Freguglia, D. Palladino [1985] pp.179-180.
([12]) Vedi G. Peano [1888] p. 107 e segg.
([13]) Ibid, pp. 110-111 e C. Burali Forti [1926] pp. 5-6.
([14]) Ibid , pp. 141-142.

dipendenza e indipendenza lineare, ecc.) del tutto analoga a quella che conosciamo. D'altronde basta riferirsi alle idee grassmanniane per comprendere come Peano potesse giungere a predetto concetto.

3. – Una possibile interpretazione odierna delle formazioni geometriche peaniane: k-simplessi e q-catene.

La domanda, che sul piano storico e culturale matematico è legittimo porsi, è se attualmente la teoria peaniano-grassmanniana delle formazioni geometriche ha una qualche possibile interpretazione. Parliamo, ovviamente, di «possibile interpretazione» perché essa non può essere né l'unica possibile né la più strettamente fedele, ammesso che abbia senso in termini di sviluppi teorici utilizzare la categoria della fedeltà. Non parleremo di possibile «filiazione», diretta o indiretta, dalle idee di Peano-Grassmann, perchè comunque difficile da stabilire e , a nostro avviso, improbabile. Piuttosto vedremo che quanto di seguito svilupperemo, sotto ipotesi precise, si potrà ricondurre come caso particolare alle idee peaniane. Infatti, il concetto di k-simplesso che andremo ad introdurre, coincide con quello $(k+1)$-edro quando lo spazio ambiente è quello euclideo $\boldsymbol{R}^n$. In ambito geometrico generale siamo però interessati a definire i k-simplessi su uno spazio topologico X qualsiasi, non necessariamente metrico. Questo, come vedremo, sarà fatto utilizzando mappe continue che «portano» il k-simplesso dallo spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ allo spazio X. È ovvio, da un lato, che la nozione più classica di $(k+1)$-edro è sempre insita nella generalizzazione, proprio perchè è da $\boldsymbol{R}^n$ che partiamo. Dall'altro lato, però, il passaggio ad uno spazio topologico qualsiasi ci fa perdere i concetti «metrici», quali lunghezza, area e volume, associati al k-simplesso. Questo è dovuto all'introduzione, quale strumento principale, del concetto di *omeomorfismo*: da un punto di vista topologico, ad esempio, un triangolo ABC è omeomorfo al triangolo A′B′C′ contenuto in ABC e con lunghezza dei lati pari alla metà di quelli di ABC. Un discorso a parte può essere fatto per il segno di un k-simplesso in quanto, una volta introdotte le q-catene, quali somme formali di q-simplessi, verrà introdotta un'orientazione e nuovamente troverеmo espressioni quali AB = – BA. Altra perdita rilevante è quella dell'operazione di prodotto regressivo in quanto, nella generalità dei k-simplessi rischia di portare a risultati inattesi (ad esempio che il prodotto regressivo di due 2-simplessi non sia un 1-simplesso, o addirittura un simplesso in generale). Il prodotto regressivo potrà essere recuperato, ma con le dovute cautele, definendo i complessi simpliciali. Osserviamo infine che il passaggio ai k-simplessi permette di lavorare agevolmente con dimensioni maggiori di 3. Dunque la teoria delle formazioni geometriche di Peano può comunque essere, sotto certe condizioni, ottenuta da quella dei k-simplessi e q-catene (che sostanzialmente ha la sua collocazione in un contesto topologico). Vogliamo poi far notare che sebbene certe interpretazioni ci ricordino la teoria di Peano solo nei concetti essenziali, allo stesso tempo, nella loro generalizzazione e modernità, permettono di trattare una più ampia classe di oggetti geometrici.

Definiti i k-simplessi, che ci ricordano appunto i $(k + 1)$-edri di Peano, descriveremo brevemente due contesti in cui i k-simplessi ne costituiscono l'ossatura: le triangolazioni di spazi e la teoria dell'omologia singolare.

Consideriamo dunque un insieme di punti $v_0, v_1, \ldots, v_k$ nello spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ e supponiamo che tali punti siano in posizione generica, cioè che ogni sottoinsieme di $v_0, v_1, \ldots, v_k$ costituito da $t + 1$ punti, $1 \leq t \leq k - 1$, non sia contenuto in uno spazio di dimensione strettamente minore di $k - 1$. Dati quindi $k + 1$ punti, chiamiamo k-simplesso il più piccolo insieme convesso che li contiene e lo denoteremo con $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. I punti $v_0, v_1, \ldots, v_k$ sono detti i vertici del k-simplesso. Ricordiamo che un punto x di $\boldsymbol{R}^n$ sta in $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ se e solo se può essere scritto come una combinazione lineare

$$x = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k \tag{3.1}$$

dove gli a_i sono numeri reali non negativi e $a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 1$.

Per questa ragione possiamo definire il k-simplesso $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ come l'*inviluppo convesso* di $v_0, v_1, \ldots, v_k$, cioè:

$$(v_0, v_1, \ldots, v_k) = \{a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k | a_i \geq 0, a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 1\}$$

Così $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ è un sottoinsieme chiuso di $\boldsymbol{R}^n$ che è completamente determinato dai suoi vertici. La sua dimensione è definita come la dimensione del più piccolo spazio lineare che lo contiene. Se guardiamo alle dimensioni «basse» otteniamo ([15])

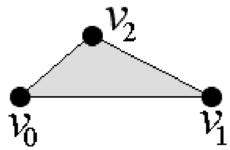
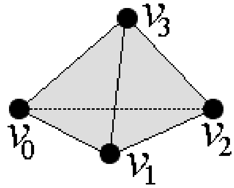
0-simplesso = punto	
1-simplesso = segmento	
2-simplesso = triangolo	
3-simplesso = tetraedro (solido)	

Figura 3.1

Osserviamo che resta naturalmente definita un'orientazione su i singoli simplessi. Ad esempio, nel caso di un 1-simplesso (v_0, v_1) si avrà $(v_0, v_1) = -(v_1, v_0)$, cioè stabiliamo quale sia il vertice iniziale e quale invece quello finale. Nel caso di un 2-simplesso, invece, l'ordine di (v_0, v_1, v_2), o di una delle sue permutazioni (v_1, v_2, v_0) e (v_2, v_0, v_2), sarà l'ordine di attraversamento dei suoi lati.

Si può ora introdurre il concetto di prodotto tra k-simplessi, che può ricordare quello di prodotto progressivo. Siano $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(w_0, w_1, \ldots, w_l)$ rispettivamente un k-simplesso ed un l-simplesso che non si intersecano; il loro prodotto sarà il $(k + l + 1)$-simplesso definito come

$$(v_0, v_1, \ldots, v_k) * (w_0, w_1, \ldots, w_l) = (v_0, v_1, \ldots, v_k, w_0, w_1, \ldots, w_l).$$

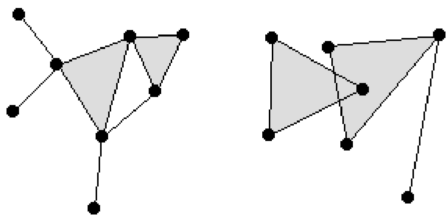
In Peano non si parlava di prodotti tra k-edri (ma solo di combinazione lineare), pertanto quanto qui ora illustrato costituisce un am-

([15]) Questa tabella è tratta da M. A. Armstrong [1983], p. 120

pliamento concettuale, foriero di generalizzazioni. D'altro canto le espressioni (3.1) hanno permesso a Arthur Cayley nel 1887 ([16]) di ottenere numeri di Grassmann a sette unità fondamentali partendo da punti in un 2-simplesso (nel caso specifico nel triangolo fondamentale). Per una nozione di prodotto fra simplessi, che ricordi il prodotto regressivo, è necessaria una certa cautela, poiché, in genere – come si diceva – non è detto che l'intersezione di simplessi sia un simplesso. Introduciamo ora in modo naturale la nozione di *faccia* di un simplesso. Se A e B sono simplessi e se i vertici di B formano un sottoinsieme dei vertici di A, allora diremo che B è una faccia di A e scriveremo B < A. Ad esempio, il tetraedro della tabella precedente avrà come facce

- i 2-simplessi (cioè i triangoli) (v_0, v_1, v_2), (v_0, v_1, v_3), (v_0, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3);
- gli 1-simplessi (cioè gli spigoli) (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3);
- gli 0-simplessi (cioè i vertici) (v_0), (v_1), (v_2), (v_3).

Quando congiungiamo tutti i punti di un insieme X in uno spazio euclideo $\boldsymbol{R}^n$ con un punto fisso P (non appartenente ad X) tramite segmenti di retta, chiamiamo tale procedura *proiezione su X dal centro di proiezione P*. È chiaro che un k-simplesso può essere visto come la proiezione su una sua faccia, definita da un $(k - 1)$-simplesso, dal vertice opposto a quella faccia ([17]).



Unione "buona"   Unione non "buona"

Figura 3.2

([16]) Vedi A. Cayley, "On multiple algebra", *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. XXII (1887), pp. 270-308.

([17]) Per una trattazione approfondita sull'argomento il lettore può consultare H. Seifert, W.Threlfall [1980], pp. 37-42.

Il concetto di faccia può essere utilizzato per formalizzare bene l'idea di unione «buona» di simplessi (anche di dimensioni diverse). Infatti per definire questo tipo di unione chiederemo che due simplessi, nella stessa unione, si intersechino lungo una faccia.

Possiamo quindi dare la

DEFINIZIONE 3.1 – *Una collezione finita di simplessi in qualche spazio euclideo* $\boldsymbol{R}^n$ *è detta* <u>*complesso simpliciale*</u> $\boldsymbol{K}$ *se verifica le seguenti condizioni*:

1. *se un simplesso appartiene alla collezione, allora vi appartengono anche tutte le sue facce;*
2. *se due simplessi nella collezione si intersecano, allora lo fanno lungo una faccia comune.*

$\boldsymbol{K}$ ha una naturale struttura di spazio topologico ottenuta dalla topologia indotta da $\boldsymbol{R}^n$. In tal caso lo spazio topologico associato al complesso simpliciale $\boldsymbol{K}$ viene denotato con $|\boldsymbol{K}|$ e chiamato *poliedro*. In definitiva i complessi simpliciali non sono altro che spazi topologici costruiti a partire da simplessi.

L'uso dei complessi simpliciali è molto utile specie nella teoria astratta degli spazi topologici. In particolare è possibile definire omeomorfismi tra complessi simpliciali e spazi topologici. In questo modo si può lavorare sui complessi simpliciali (molto più facili da trattare) e poi, tramite l'omeomorfismo, trasportare i risultati ottenuti sullo spazio topologico. Per risultati intendiamo, ad esempio, il calcolo delle invarianti algebriche quali il gruppo fondamentale o i gruppi di omologia. Questo procedimento di associare ad uno spazio topologico un complesso simpliciale ad esso omeomorfo, prende il nome di *triangolazione*. Ad esempio, consideriamo, la sfera S^2 in $\boldsymbol{R}^3$ e come complesso simpliciale l'unione di quattro 2-simplessi a formare un tetraedro (ma non il 3-simplesso, visto che consideriamo solo l'area). Come è noto, l'omeomorfismo può essere visto come lo stiramento dell'area del tetraedro sulla sfera: in questo modo otteniamo una sfera triangolata.

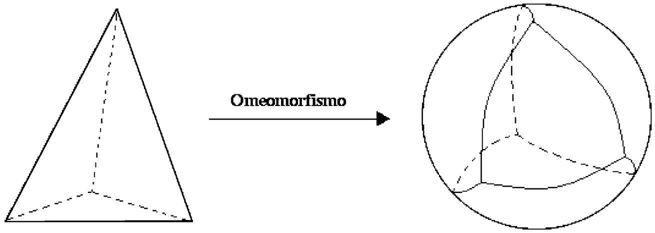


Figura 3.3 ([18])

In maniera simile, consideriamo una «striscia» di triangoli ed identifichiamo gli estremi dopo aver fatto un mezzo giro. In questo modo otteniamo un complesso simpliciale che è omeomorfo al nastro di Moebius.

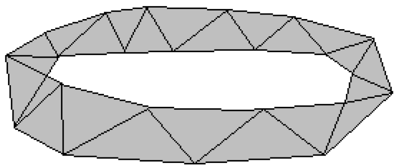


Figura 3.4 ([19])

Sia la sfera che il nastro di Moebius sono superfici e quindi abbiamo utilizzato solo triangoli per costruire i complessi simpliciali associati agli omeomorfismi. Per spazi di dimensioni maggiori avremo ovviamente bisogno di simplessi di dimensioni maggiori. Chiedere che uno spazio topologico sia triangolizzabile è significativo. Infatti un complesso simpliciale $\boldsymbol{K}$ è costituito da un numero finito di simplessi che vivono in uno spazio euclideo e quindi $|\boldsymbol{K}|$ ha notevoli proprietà: ad esempio $|\boldsymbol{K}|$ è compatto ed è uno spazio metrico, perciò se uno spazio è triangolizzabile deve possedere tali proprietà.

Ad ogni complesso simpliciale $\boldsymbol{K}$ è possibile associare gruppi $H_q(\boldsymbol{K})$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, detti *gruppi di omologia singolare* di $\boldsymbol{K}$. Questi gruppi

([18]) Questo disegno è trato da M.A. Armstrong [1983], Figura 6.1 a p. 119.
([19]) Questo disegno è tratto da M.A. Armstrong, op.cit. Figura 6.2 p. 120.

sono definiti a partire dalla struttura simpliciale di $\boldsymbol{K}$, ma in realtà, dipendendo solo dal tipo di *omotopia* del poliedro $|\boldsymbol{K}|$, siamo in grado di definirli su ogni spazio compatto triangolizzabile. Con questo vogliamo dire che, dato uno spazio triangolizzabile X (come può essere un nastro di Moebius, un toro, una sfera, un piano proiettivo, etc.) i suoi gruppi di omologia possono essere calcolati a partire dalla triangolizzazione $|K| \to X$, calcolando i gruppi di omologia di $\boldsymbol{K}$. I gruppi $H_q(\boldsymbol{K})$ sono gruppi abeliani finito-dimensionali, e possiamo pensare che, in un certo senso, misurino i fori $(q+1)$-dimensionali nello spazio $|\boldsymbol{K}|$. L'importanza nei gruppi di omologia risiede anche nel problema di classificazione delle varietà topologiche. Infatti, specie per varietà di dimensione maggiore di due, il gruppo fondamentale ([20]) non riesce a dare quella serie di informazioni che dà invece al riguardo delle superfici: ad esempio non riesce a dare alcun aiuto nella dimostrazione che la sfera S^3 in $\boldsymbol{R}^4$ non sia omeomorfa alla sfera S^4 in $\boldsymbol{R}^5$. Invece, ad esempio, $H_4(S^4)$ risulta essere non nullo, confermando quello che ci aspettiamo: S^4 ha un buco di dimensione 5.

Possiamo introdurre quindi i gruppi di omologia simpliciale, partendo però da un punto di vista più generico in modo da funzionare su tutti gli spazi topologici. Così facendo l'omologia singolare diventa la più flessibile teoria omologica.

Definiamo ora innanzitutto il *q-simplesso standard* $\Delta_q \subset \boldsymbol{R}^{q+1}$, definito come l'inviluppo convesso dei $q+1$ punti coordinati di $\boldsymbol{R}^{q+1}$. Il suo *bordo* ([21]) consiste dei $(q-1)$-simplessi $\Delta_q^p = \Delta_q \cap \{x_p = 0\}$, $p = 0, \ldots, q$. In questo modo restano definite le *immersioni* (cioè mappe continue ed iniettive) $\delta^q \colon \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, cioè un $(q-1)$-simplesso può essere immerso in un q-simplesso in $q+1$ modi distinti, dati dalle facce di codimensione 1 di

([20]) Ricordiamo quanto segue. Sia X uno spazio topologico e P un punto di X. Il gruppo fondamentale $\pi_1(X, P)$ di uno spazio topologico X, centrato in P, è definito come l'insieme dei *lacci* $f\colon[0,1] \to X$ chiusi (cioè $f(0) = f(1) = P$) modulo l' equivalenza omotopica. Due lacci f e g si dicono omotopicamente equivalenti se esiste una funzione continua $F(t,s)\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ tale che:

$$F(t,0) = f(t);\ \text{e}\ F(t,1) = g(t) \qquad \text{per ogni } t \text{ in } [0,1]$$
$$F(0,s) = F(1,s) = P \qquad \text{per ogni } s \text{ in } [0,1]$$

([21]) Un punto P apparterrà al bordo di Δ_q se ogni aperto A di $\boldsymbol{R}^{q+1}$ contenente P, contiene sia punti di Δ_q che punti di $\boldsymbol{R}^{q+1} \backslash \Delta_q$.

Δ_q. Definiamo poi il *q-simplesso singolare* in uno spazio topologico X come una mappa continua dal q-simplesso standard ad X:

$$\sigma_q \colon \Delta_q \to X.$$

Osserviamo innanzitutto come questa definizione di simplesso singolare ci permetta di lavorare su uno spazio topologico qualsiasi, senza la restrizione di porsi in uno spazio euclideo. Diamo ora la seguente fondamentale definizione:

DEFINIZIONE 3.2. – *Una combinazione lineare finita di q-simplessi singolari a valori in un anello R prende il nome di q-catena che denoteremo con* $\sum_i a_i \sigma_q^i$ *dove* $a \in R$ e σ_q^i *sono q-simplessi singolari.*

Quindi una q-catena consiste di una somma formale di q-simplessi, ciascuno con un'assegnata orientazione e un'assegnata molteplicità. La nozione di q-catena può in qualche modo, mutatis mutandis, ricondursi a quella di formazione geometrica secondo gli intendimenti peaniani. Anche se l'introduzione di prodotti tra q-catene risulta piuttosto complessa.

Denotiamo con $S_\mathrm{q}(X;R)$ l'insieme di tutte le q-catene a valori in R. Si osserva facilmente che $S_\mathrm{q}(X;R)$ è un R-modulo poiché valgono le

$$\sum_i a_i \sigma_q^i \in S_q(X;R),\ \sum_j b_j \phi_q^j \in S_q(X;R) \Rightarrow \sum_i a_i \sigma_q^i + \sum_j b_j \phi_q^j \in S_q(X;R)$$

$$\sum_i a_i\, \sigma_q^i \in S_q(X;R),\ r \in R \Rightarrow \sum_i r a_i\, \sigma_q^i \in S_q(X;R)$$

4. – Calcolo geometrico di Peano e geometria proiettiva.

Peano e Burali Forti sono in grado di dimostrare, grazie al loro apparato di calcolo geometrico, che funziona come un'algebra esterna, alcuni fondamentali teoremi di geometria proiettiva che riguardano l'allineamento fra punti. A suo tempo e con il suo metodo, Bellavitis aveva fatto applicazioni alla geometria elementare ed a quella proiettiva ([22]). Va osservato che Peano e Burali-Forti non si servono di figure,

([22]) Vedi G.Bellavitis [1854] pp. 13 e segg.

come si fa nelle tradizionali trattazioni di geometria proiettiva (ed elementare) sintetica. La figura infatti può condizionare la dimostrazione medesima di un teorema o la soluzione di un problema ed ha un valore euristico. Essi invece partono da concatenazioni di identità di calcolo geometrico e analizzano quella conclusiva, o meglio la interpretano in termini di geometria elementare o proiettiva. Pertanto il teorema geometrico non è altro che una interpretazione, un modello dell'identità di calcolo geometrico a cui si è giunti o che consideriamo. Quello che conta per Peano e la sua scuola sono le espressioni simboliche del calcolo a cui si perviene. Vediamo allora di seguito come vengono trattati due teoremi storicamente cruciali della geometria proiettiva piana. Cominciamo dal ***Teorema di Desargues sui triangoli omologici (caso piano)***. Esso viene dimostrato considerando opportune identità ([23]). Riferiamoci per nostra comodità espositiva alla Fig. 4.1

TEOREMA 4.1. – *I punti* T, U, V *di incontro dei lati corrispondenti* BC, B′C′; CA, C′A′; AB, A′B′ *sono collineari* <u>se e solo se</u> *le congiungenti* AA′ BB′ CC′ *i vertici corrispondenti passano per un punto* S.

DIMOSTRAZIONE. –Indipendentemente dalla rappresentazione grafica (Fig. 4.1), otteniamo i seguenti passi.

Si parte dall' identità, che è analoga alla (2.3),

$$\text{AB.CD} = (\text{ABD}).\text{C} - (\text{ABC}).\text{D} \tag{4.1}$$

La (4.1) ci dice che il prodotto AB.CD (che è un prodotto che dà una forma di specie 1 nel piano) tra i segmenti AB e CD (forme rispettivamente di specie 2) è regressivo ed esprime dunque un'intersezione nel piano, cioè è un punto, che viene a destra della (4.1) espresso come combinazione. Per comodità, con le lettere maiuscole denoteremo punti e con quelle minuscole segmenti. Per cui la (4.1), sostituendo CD con p e facendo qualche conto, si potrà scrivere anche così:

$$\text{AB.p} = \text{Ap.B} - \text{Bp.A} \tag{4.2}$$

([23]) Vedi G. Peano [1888], p. 92 e P.Freguglia [1992] pp.101-102.

Consideriamo allora la seguente espressione:

$$(BC.a)(CA.b)(AB.c) \tag{4.3}$$

Applicando la (4.2) alla (4.3) si ha di seguito:

$$\begin{aligned}
&(Ba.C - Ca.B)(Cb.A - Ab.C)(Ac.B - Bc.A) = \\
&= (Ba.Cb.CA + Ca.Ab.BC)(Ac.B - Bc.A) = \\
&= Ba.Cb.Ac.CAB - Ca.Ab.Bc.ABC = \\
&= Ba.Cb.Ac.ABC - Ca.Ab.Bc.ABC = \\
&= (Ba.Cb.Ac - Ca.Ab.Bc)ABC
\end{aligned}$$

In conclusione avremo l'identità:

$$(BC.a)(CA.b)(AB.c) = (Ba.Cb.Ac - Ca.Ab.Bc)ABC \tag{4.4}$$

Per *dualità* (ottenendo così una identità altrettanto vera), cioè, sostituendo le lettere maiuscole con le minuscole e le minuscole con le maiuscole, si ha:

$$(bc.A)(ca.B)(ab.C) = (bA.cB.aC - cA.aB.bC)abc \tag{4.5}$$

Moltiplicando ora la (4.4) per abc e la (4.5) per ABC e sommando membro a membro, avremo:

$$abc(BC.a)(CA.b)(AB.c) + ABC(bc.A)(ca.B)(ab.C) = 0 \tag{4.6}$$

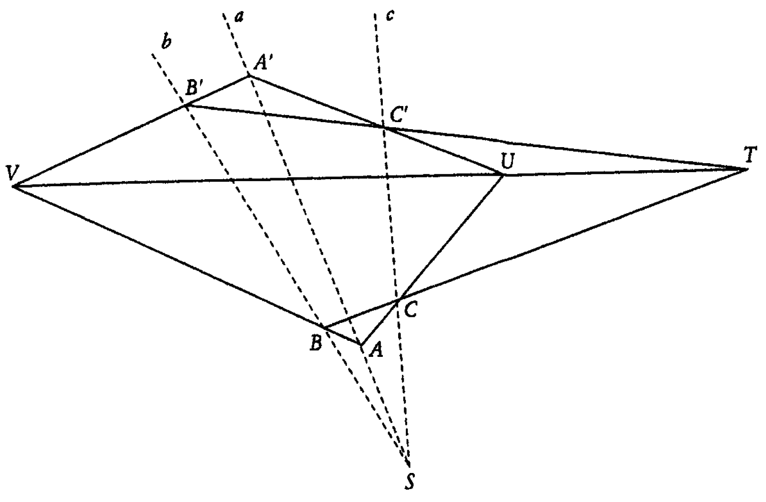


Figura 4.1

Se nella (4.6) si pone a $=$ B′C′, b $=$ C′A′, c $=$ A′B′ otteniamo:

(4.7) A′B′C′(BC.B′C′)(CA.C′A′)(AB.A′B′ $+$ ABC(A′A.B′B.C′C) $= 0$

Supposto che (i triangoli) ABC e A′B′C′ siano diversi da zero, la (4.7) implica:

$$(BC.B'C')(CA.C'A')(AB.A'B') = 0$$

e

$$(AA'.BB'.CC') = 0$$

Il tutto si legge complessivamente (vedi ora Fig. 4.1) così:

(BC.B′C′)(CA.C′A′)(AB.A′B′) $=$ TUV $= 0$, che vuol dire «i punti T, U, V di incontro dei lati corrispondenti BC, B′C′; CA, C′A′; AB, A′B′ sono collineari», *se e solo se* (AA′.BB′.CC′) $=$ abc $= 0$, che si legge «le congiungenti AA′, BB′, CC′ i vertici corrispondenti passano per un punto S».

Vediamo ora come viene dimostrato il ***Teorema di Pascal sull'esalatero*** ([24]) (vedi Fig. 4.2).

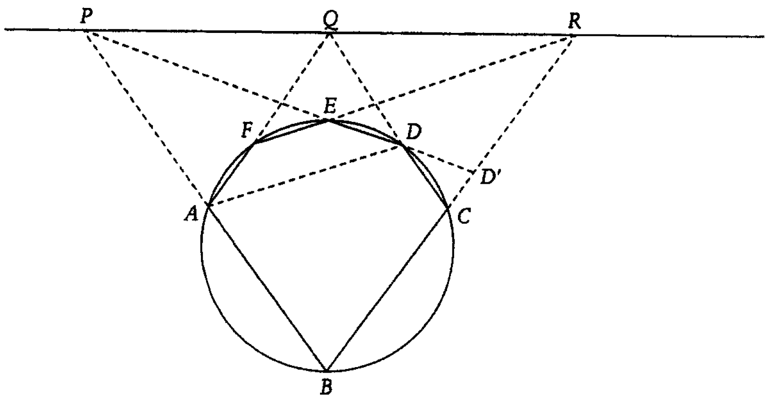


Figura 4.2

([24]) Vedi G. Peano [1888], p. 95 , C. Burali Forti [1926], pp. 212-213 e P. Freguglia [1992], pp. 103-104.

TEOREMA 4.2. – *Se un esagono è inscritto in una conica le tre intersezioni delle coppie dei lati opposti appartengono ad una stessa retta.*

Si consideri l'espressione:

(4.8) $$(AB.DE)(BC.EX)(CD.AX) = 0$$

la quale stabilisce che i punti intersezione tra i lati AB e DE, BC e EX, CD e AX sono allineati, mettendo quindi in relazione i sei punti ABCDEX. Si parte dalla (4.8), tenendo presente che X è un punto non fissato. Comparendo nella (4.8) soltanto prodotti (progressivi e regressivi) essa è a primo membro (come dice Peano) un monomio. Inoltre è di secondo grado in ogni punto in quanto ogni punto compare in essa due volte. Infatti il *grado* di un monomio di una formazione (in questo caso le formazioni considerate sono punti) viene definito come il numero delle volte con cui compare quella formazione nel monomio. Pertanto se sono assegnati cinque punti, la (4.8) diventa una equazionedi secondo grado nel sesto punto. Poiché la (4.8) risulta verificata per $EX = 0$ o $AX = 0$ (cioè quando E coincide con X ed A coincide con X), il luogo dei punti da essa individuato passa per i punti E ed A. Ma passa anche per D perché si ha identicamente $(AB.DE)(BC.ED)(CD.AD) = 0$ cioè che i tre punti delle rispettive intersezioni P, D′ e D sono (vedi Fig. 4.2) allineati. Ciò accade in modo del tutto analogo per $X = B$ e per $X = C$. Per cui la (4.8) rappresenta la conica individuata dai cinque punti ABCDE. Quando $X = F$ i sei punti distinti A, B, C, D, E, F che appartengono alla conica, individuano un esagono in essa inscritto. Tutto questo coincide con l'ipotesi del teorema di Pascal («se un esagono è inscritto in una conica»). Ma la (4.8) dice pure che i punti che scaturiscono dalle intersezioni delle tre coppie di lati opposti dell'esagono giacciono su una stessa retta. E questa è la tesi del teorema di Pascal («le tre intersezioni delle coppie dei lati opposti appartengono ad una stessa retta»). Per come è scritta la (4.8) vale pure il viceversa. *Dualmente* (sostituendo – come sappiamo – ai punti le rette ed alle rette i punti, in simboli, sostituendo le lettere maiuscole con le minuscole e le minuscole con le maiuscole), come fa Burali Forti, si può ricavare il ***Teorema di Brianchon***.

Mentre il calcolo proposto da Bellavitis procede, nonostante la presenza di aspetti calcolativi rilevanti, seguendo il tradizionale schema dimostrativo e risolutivo geometrico, il calcolo proposto da Peano e Burali Forti è più strettamente sintetico e compatto. Addirittura nel caso visto del teorema di Pascal ci si riduce di fatto all'analisi di una sola espressione.

5. – Il sistema minimo e la teoria delle omografie.

Sempre sullo stesso indirizzo grassmanniano-peaniano si sviluppano gli studi di Burali-Forti e Marcolongo in fatto di calcolo vettoriale. Per gli scopi che ci siamo prefissati in questo nostro contributo si devono tener presenti due importanti lavori di questi autori: *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Bologna, Nicola Zanichelli, prima edizione 1909, seconda edizione «riordinata e ampliata», 1921 e *Analyse vectorielle générale, I. Transformations linéaires* (ed. 1912), *II. Applications à la Mécanique et à la Physique* (ed. 1913). Soffermiamoci dapprima sul primo libro (quello del 1909). In esso il calcolo vettoriale viene presentato come «spazio vettoriale» con l'aggiunta dei prodotti vettoriale, doppio vettoriale, interno (scalare) e misto. Si tratta cioè del *sistema minimo*. Mentre, come spiega Burali Forti nel suo articolo «Elementi di calcolo vettoriale» apparso sull'*Enciclopedia delle matematiche elementari* (vol. II, parte II), «si ha il *sistema generale*, quando, introdotte [...] le *formazioni geometriche*, si fa uso di una nuova operazione, [quella] del *prodotto alternato* (*progressivo* e *regressivo*)». Vengono quindi illustrate le nozioni di gradiente, rotore e divergenza. L'edizione del 1921 ha lo stesso impianto teorico, ma con un certo numero di aggiunte e, tra l'altro, contiene in più un'appendice di nove paragrafi sui quaternioni di Hamilton e del come questi possono essere rappresentati nel sistema presentato da Burali Forti e Marcolongo. Nel capitolo VI (in ambedue le edizioni), dedicato alle applicazioni all'elettrodinamica, si presentano le equazioni di Maxwell.

Ma vediamo dapprima come nel *sistema generale* di calcolo geometrico, seguendo Burali-Forti e Marcolongo [25], sia possibile definire le operazioni tra vettori quali prodotto scalare, prodotto vettoriale e prodotto misto. In altre parole faremo vedere come il *sistema generale* contiene il *sistema minimo*. Si prendono le mosse da due concetti basilari quali quelli di *bivettore* e *trivettore*. Il primo va inteso come prodotto (alternato) di due vettori, così:

$$\hat{u} = (\mathrm{B} - \mathrm{A})(\mathrm{C} - \mathrm{A}) = \mathrm{BC} - \mathrm{BA} - \mathrm{AC} + \mathrm{AA} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$$

Quindi un bivettore si può rappresentare come la somma di tre lati di un triangolo. Risulta ovvio dalla definizione di prodotto alternato che $(\mathrm{B} - \mathrm{A})(\mathrm{C} - \mathrm{A}) \neq (\mathrm{C} - \mathrm{A})(\mathrm{B} - \mathrm{A})$. Un trivettore, a sua volta, è il prodotto (alternato) di tre vettori. Consideriamo ora tre vettori $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ tali che il parallelepipedo i cui vertici sono:

$$\mathrm{O},\ \ \mathrm{O} + \vec{u},\ \ \mathrm{O} + \vec{v},\ \ \mathrm{O} + \vec{w}$$

abbia volume unitario positivo. Questo trivettore viene denotato con Ω [26]. Ne vedremo di seguito l'importanza. Introduciamo quindi la nozione di *indice di un bivettore* $\hat{u}$ che denoteremo con $|\,\hat{u}$. Esso è definito come il vettore che:

1. ha modulo uguale al mod $\hat{u}$ (essendo mod $\hat{u}$ uguale alla misura dell'area del parallelogramma individuato dai vettori che determinano il bivettore)
2. ha direzione per $\hat{u} \neq 0$ normale alla giacitura di $\hat{u}$
3. ha verso tale che, disposto l'indice ed il medio della mano destra secondo i vettori che lo individuano, scaturisca con il pollice il verso predetto. Va rammentato che l'ordine con cui si prendono i vettori è importante perché il loro prodotto è non commutativo.

Se $\vec{v}$ è un vettore chiameremo *indice di* $\vec{v}$ e lo indicheremo con $|\,\vec{v}$, il bivettore $\hat{u}$ che ha $\vec{v}$ per indice. Le seguenti scritture hanno lo stesso significato:

$$\vec{v} = |\,\hat{u} \qquad \mathrm{e} \qquad \hat{u} = |\,\vec{v}$$

(25) Vedi C. Burali Forti, R. Marcolongo, [1909], pp. 27-45 e [1921], pp. 100-119.

(26) Si vede facilmente che il volume del tetraedro relativo $\mathrm{O}\vec{u}\vec{v}\vec{w}$ è uguale a 1/6. Infatti avremo $a(a^2/2) : 3$ che per $a = 1$ dà appunto 1/6.

Se A è una formazione tale che abbia senso il prodotto alternato di A per l'indice di un vettore, scriveremo:

$$A(|\,\vec{v}) = A\,|\,\vec{v}$$

per indicare questo prodotto alternato. Possiamo quindi dare le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 5.1. – *Se* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *sono vettori, diremo* <u>*prodotto interno*</u> o <u>*scalare*</u> *la seguente operazione*:

$\vec{u} \times \vec{v} := \dfrac{\vec{u}\,|\,\vec{v}}{\Omega}$ *dove* $\vec{u}\,|\,\vec{v}$ *e* Ω *sono scalari e quindi il risultato è uno scalare.*

Si dimostra che

$$\vec{u} \times \vec{v} = \operatorname{mod}\vec{u} \cdot \operatorname{mod}\vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si può ripetere anche per i bivettori predetta definizione. Abbiamo quindi la

DEFINIZIONE 5.2. – *Se* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *sono vettori, diremo* <u>*prodotto esterno*</u> *o* <u>*vettoriale*</u> *la seguente operazione:*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \,|\,(\vec{u}\,\vec{v})$$

Abbiamo dunque ottenuto il sistema minimo. Passiamo ora ad illustrare la teoria delle omografie ([27]). Il punto di partenza del trattato *Analyse vectorielle générale* è la nozione di *omografia vettoriale* (presentata e studiata nelle prime pagine del primo volume) che viene definita come un operatore lineare che trasforma vettori in vettori, cioè, simbolicamente:

$$\varpi\,\vec{v} = \vec{w} \tag{5.1}$$

dove $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono vettori e ϖ un operatore lineare.

Si chiamano poi *omografie proprie* quelle che trasformano vettori

([27]) Vedi C. Burali Forti, R. Marcolongo [1912], Chap. 1, pp. 11-53.

non paralleli ad uno stesso piano in altri vettori non paralleli ad uno stesso piano. Mentre si chiameranno *omografie singolari* quelle non proprie, cioè che trasformano almeno tre vettori non paralleli ad uno stesso piano in vettori paralleli ad uno stesso piano. Tra le omografie semplici vanno rammentate le *omotetie vettoriali*, che denoteremo con α, tali che:

$$\alpha\vec{x} = m\vec{x} \tag{5.2}$$

dove $\vec{x}$ è un vettore arbitrario e m un numero reale.

Molto importanti sono le *omografie assiali* (che denoteremo con γ) che si ottengono (come operatori) quando si ha un vettore $\vec{u}$ tale che:

$$(5.3) \quad \gamma = \vec{u}\,\wedge \qquad \text{cioè:} \qquad (5.4) \quad \gamma\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{x}$$

dove $\wedge$ rappresenta il prodotto vettoriale e $\vec{x}$ un vettore. Prendendo lo spunto da Gibbs, ma procedendo in sostanza in modo originale, viene introdotta la nozione di *diade*, che è una omografia ρ così determinata:

$$\rho\vec{x} = \vec{u} \times \vec{x} \cdot \vec{v} \tag{5.5}$$

dove $\vec{x}$ è un vettore arbitrario, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono due vettori assegnati e $\times$ è il prodotto scalare.

Ponendo $H(\vec{u},\vec{v})\vec{x} = \vec{u} \times \vec{x} \cdot \vec{v}$, se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (versori fondamentali) è un sistema ortogonale destrorso e α una omografia <u>qualunque</u>, allora vale la seguente identità, a livello di operatori:

$$\alpha = H(\vec{i},\, \alpha\vec{i}\,) + H(\,\vec{j},\, \alpha\vec{j}\,) + H(\vec{k}, \alpha\vec{k}) \tag{5.6}$$

Vengono quindi introdotti, sempre in modo sintetico, particolari operatori sulle omografie, come ad esempio – se α è una omografia – quello che viene chiamato *vettore di* α e che indicheremo con $V\alpha$. Si tratta di un vettore che viene definito quando viene soddisfatta la sottostante relazione:

$$2(V\alpha) \times \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \times \alpha\vec{u} - \vec{u} \times \alpha\vec{v} \tag{5.7}$$

dove $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono vettori arbitrari. $(V\alpha)\wedge$ rappresenta l'omografia assiale di cui $V\alpha$ è l'asse.

Inoltre chiameremo *primo invariante* di una omografia α, e lo indicheremo con $I_1\,\alpha$, il numero reale che con i vettori arbitrari $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ soddisfa la seguente condizione:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w})\, I_1\,\alpha = \vec{v} \wedge \vec{w} \times \alpha\vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u} \times \alpha\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v} \times \alpha\vec{w} \tag{5.8}$$

Verranno poi definiti il *secondo invariante* I_2 e il *terzo invariante* I_3 .

Burali-Forti e Marcolongo presentano anche altri importanti operatori «semplici». Ma è interessante osservare che ad esempio gli operatori V e I_1 sono utili per definire in modo sintetico gli operatori differenziali *rotazionale di* $\vec{u}$ (in simboli $rot_P\,\vec{u}$) e *divergenza di* $\vec{u}$ (in simboli $div_P\,\vec{u}$) in rapporto ad un punto P ([28]). Intanto va premesso che se $\vec{u}$ è un vettore, lo possiamo considerare in funzione di una variabile numerica t (che ad esempio può indicare il tempo), oppure può dipendere da un punto P e quindi, in ogni caso, lo posso considerare variabile in modo continuo. Avrà dunque senso considerare:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{d\vec{u}}{dP}$$

Avremo quindi le seguenti definizioni:

$$rot_P\,\vec{u} = 2V\left(\frac{d\vec{u}}{dP}\right) \tag{5.9}$$

$$div_P\,\vec{u} = I_1\left(\frac{d\vec{u}}{dP}\right) \tag{5.10}$$

Viene definita altresì la nozione di *gradiente* di un numero u, funzione di un punto P, che a sua volta varia in uno spazio tridimensionale, come il vettore *grad* u (funzione di u e di P), tale che

$$du = (grad\,u) \times dP \tag{5.11}$$

Vediamo come, generalizzando, viene esaminata qualche proprietà del gradiente. Sia $f(u, v, \ldots, w)$ una funzione dei numeri $u, v, \ldots, w$

([28]) Ibid, p. 70.

che a loro volta sono funzioni di un punto P (quindi anche f è funzione di P), avremo allora, in base alla (5.11):

$$df = (grad f) \times dP$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w} dw$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u} grad\, u + \frac{\partial f}{\partial v} grad\, v + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w} grad\, w \right) \times dP$$

da cui discende la

$$grad f = \frac{\partial f}{\partial u} grad\, u + \frac{\partial f}{\partial v} grad\, v + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w} grad\, w \tag{5.12}$$

Vale inoltre la seguente proprietà:

PROPOSIZIONE 5.1. – *Sia $\vec{u}$ un vettore unitario ortogonale ad un piano fissato Ξ e sia r la distanza di un punto P da Ξ. r sarà positiva o negativa a seconda che P si trovi o meno dalla stessa parte di $O + \vec{u}$, essendo O un punto qualunque di Ξ. Si ha allora che*: ([29])

$$grad\, r = \vec{u} \tag{5.13}$$

Infatti dalla relazione $r = (P - O) \times \vec{u}$ si deduce $dr = \vec{u} \times dP$ da cui la tesi, cioè la (5.13).

Per comprendere la (5.9) occorre tener presente che $(d\vec{u}/dP)$ può essere vista come una omografia. Per cui $rot_P\, \vec{u}$ è un operatore tra vettori e vettori, mentre dalla (5.10) risulta che $div_P\, \vec{u}$ è un operatore tra vettori e numeri.

Come si può vedere le coordinate non sono mai entrate in gioco. È noto però che si può definire il rotazionale e la divergenza in termini cartesiani. In questo caso – come rilevano i nostri autori – parliamo appunto, ad esempio per le notazioni $rot_P\, \vec{u}$ e $div_P\, \vec{u}$, di notazioni tachigrafiche. Ma vale anche il viceversa: si definiscono,

([29]) Vedi C. Burali Forti, R. Marcolongo [1921], p. 82-83.

ad esempio, gli operatori suddetti in modo sintetico, come abbiamo visto con le (5.9), (5.10) e (5.11) e si deducono le relative espressioni cartesiane. Infatti ad esempio, per la (5.11), si consideri un sistema cartesiano ortogonale $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ove rappresenteremo un punto P così:

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Si osserva che x è la distanza con segno di P dal piano individuato dai tre punti O, $O + \vec{j}$, $O + \vec{k}$. x sarà positiva o negativa a seconda che P è o meno dalla parte di $O + \vec{i}$. Lo stesso ragionamento analogamente si potrà ripetere per y e z. Siamo quindi in grado di applicare la Prop. 5.1 e cioè la (5.13). Avremo dunque:

$$grad\, x = \vec{i}, \quad grad\, y = \vec{j}, \quad grad\, z = \vec{k} \tag{5.14}$$

A questo punto grazie alla (5.12), otteniamo:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \tag{5.15}$$

che è appunto l'espressione cartesiana del gradiente. In modo simile si otterranno le espressioni cartesiane del rotazionale e della divergenza e di altri operatori sinteticamente introdotti.

Nella Prefazione, Burali-Forti e Marcolongo spiegano ancora che il loro calcolo di per sé non è tachigrafico nei confronti delle coordinate cartesiane. Ossia, lo sarebbe, come abbiamo poc'anzi osservato, se prima queste venissero introdotte e denotassero componenti del vettore che sinteticamente poi indicheremo con una certa lettera (in grassetto o sovrastata da una freccetta). Ma se invece partiamo proprio da quest'ultima e sviluppiamo autonomamente operazioni e trasformazioni, otteniamo un calcolo che è – come loro sostengono – «intrinseco, o assoluto, o autonomo» ([30]). Ed è rilevante l'assolutezza, in quanto si prescinde da particolari riferimenti cartesiani. Potremmo quasi dire che si tratti di una sorta di «invarianza intrinseca». Nel

([30]) Vedi C. Burali Forti, R. Marcolongo [1912], p. VII. Il testo recita così: "Notre calcul peut ainsi s'appeler intrinsèque, ou absolu, ou autonome".

secondo volume, ultimo capitolo (il sesto) [1913], i nostri esaminano l'elettrodinamica dei corpi a riposo o in movimento (equazioni di Maxwell e trasformazioni di Lorentz) e quindi, nel paragrafo otto, il principio generale di relatività. In questo volume (pubblicato nel 1913) vengono citati in bibliografia Abraham, Levi-Civita e Minkoswski.

6. – Una interessante applicazione: le trasformazioni di Lorentz.

Nel capitolo III (dal titolo «Il principio di relatività secondo Minkowski») del suo trattato *Relatività*, Roberto Marcolongo espone dapprima le trasformazioni generali di Lorentz nell'universo di Minkowski e quindi la loro traduzione in forma vettoriale. Ci soffermeremo su questo argomento per far vedere concretamente come con il sistema minimo e con le omografie vettoriali si possano illustrare in modo consono le trasformazioni di Lorentz. Seguendo la trattazione di Marcolongo, cominciamo con il ricordare che queste, nel *caso generale*, sono trasformazioni lineari ed omogenee a quattro variabili x_1, x_2, x_3, $x_4 = ict$ che hanno la seguente forma:

$$x'_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + a_{r4}x_4 \qquad \text{con } r = 1, \dots, 4 \tag{6.1}$$

il cui determinante deve essere uguale a $+1$ ed hanno per *invariante*:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \tag{6.2}$$

Si tratta, come è noto, di *rotazioni* nello spazio («universo») quadridimensionale di Minkowski. Per quanto riguarda i coefficienti a_{rs} dobbiamo supporre che siano tutti reali salvo: a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43} che devono essere tutti immaginari puri e a_{44} che deve essere positivo. Come sappiamo queste trasformazioni lasciano inalterate le equazioni dell'elettrodinamica. Marcolongo afferma quindi che «si possono raggiungere risultati più perspicui, evitando ogni rappresentazione iperspaziale fondata sull'uso sistematico delle coordinate e, ciò che conta soprattutto, evitando l'immaginario i, valendosi del calcolo vettoriale [sistema minimo] e delle omografie vettoriali» ([31]). Vediamo

([31]) Vedi R. Marcolongo, [1921], pp. 101-102 dunque come si procede. Consideriamo in un sistema fisso S un punto P ad un tempo t, al quale si fa corrispondere in un sistema S' in movimento, un punto P' ad un tempo t' (e sia O un punto fisso). Indichiamo quindi con α una omografia vettoriale costante, ovvero che non dipende da P e da t, con $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori che hanno lo stesso modulo $\sqrt{m^2+1}$, essendo m un numero maggiore di 1. La parte $x'_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_{r3}$ con $r = 1, 2, 3$ della (6.1) può essere espressa come una semplice omografia, cioè avremo, in termini vettoriali:

$$P' - O = \alpha(P - O) \tag{6.3}$$

Porremo inoltre, per esplicitare, $a_{14} = i\, b_{14}$, $a_{24} = i\, b_{24}$, $a_{34} = i\, b_{34}$ e $a_{41} = i\, b_{41}$, $a_{42} = i\, b_{42}$, $a_{43} = i\, b_{23}$ essendo i b_{rs} numeri reali. Sostituendo in (6.1) a conti fatti avremo il sistema:

$$\begin{cases} (P' - O) = \alpha(P - O) + ct\vec{a} \\ ct' = (P - O) \times \vec{b} + cmt \end{cases} \tag{6.4}$$

dove $\vec{a} = (-b_{14}, -b_{24}, -b_{34})$ e $\vec{b} = (b_{41}, b_{42}, b_{43})$ e $a_{44} = m > 1$.

Per quanto riguarda l'invariante (6.2), esso potrà essere scritto così:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (ict)^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 + (ict')^2$$

da cui passando ai vettori otteniamo:

$$(P' - O)^2 - c^2t'^2 = (P - O)^2 - c^2t^2 \tag{6.5}$$

Dunque abbiamo scritto in forma vettoriale le (6.1) e (6.2). Adesso vedremo come si possa giungere, sfruttando qualche proprietà e qualche teorema del calcolo delle omografie, ad una formulazione in termini omografici delle (6.4) utilizzando la (6.5). Richiamiamo dapprima alcune definizioni che riguardano operatori su omografie. Tenendo presente la (5.7) chiameremo *dilatazione di* α (essendo α una omografia) e la denoteremo con $D\alpha$, l'operatore su α, che dà luogo a sua volta ad una omografia, così definito:

$$D\alpha = \alpha - (V\alpha)\wedge \tag{6.6}$$

indicando con $\wedge$ il prodotto vettoriale. Definiremo poi *coniugata di* α, e la indicheremo con $K\alpha$, l'omografia (vettoriale) così definita:

$$K\alpha = D\alpha - (V\alpha)\wedge \tag{6.7}$$

Ritorniamo a (6.4) e (6.5). Sostituiamo le prime nella seconda, avremo:

$$[\alpha(P-O) + ct\vec{a}]^2 - [(P-O)\times\vec{b} + cmt]^2 = (P-O)^2 - c^2t^2 \tag{6.8}$$

sviluppando, tenendo presenti le proprietà del prodotto scalare ed identificando termine a termine tra primo e secondo membro della (6.8) otteniamo:

$$\begin{aligned}[\alpha(P-O) + ct\vec{a}]^2 = [\alpha(P-O)]^2 + c^2t^2\vec{a}^2 \\ + 2\alpha(P-O)\times ct\vec{a} = (P-O)^2\end{aligned} \tag{6.9}$$

e

$$\begin{aligned}[(P-O)\times\vec{b} + cmt]^2 = [(P-O)\times\vec{b}]^2 \\ + c^2m^2t^2 + 2[(P-O)\times\vec{b}]\cdot cmt = c^2t^2\end{aligned} \tag{6.10}$$

Dalla (6.9), si ha:

$$\alpha(P-O)\times\alpha(P-O) = (P-O)^2 - c^2t^2\vec{a}^2 - 2\alpha(P-O)\times ct\vec{a} \tag{6.11}$$

da cui, poiché vale il seguente lemma:

$$\vec{x}\times\alpha\vec{y} = \vec{y}\times K\alpha\vec{x} \tag{6.12}$$

dove $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono vettori arbitrari, risulta:

$$\alpha(P-O)\times\alpha(P-O) = (P-O)^2 - c^2t^2\vec{a}^2 - 2ct[(P-O)\times K\alpha\vec{a}] \tag{6.13}$$

Posto ora:

$$K\alpha\vec{a} = m\vec{b} \tag{6.14}$$

la (6.13) diventa:

$$\alpha(P-O)\times\alpha(P-O) = (P-O)^2 - c^2t^2\vec{a}^2 - 2[(P-O)\times\vec{b}]\cdot cmt \tag{6.15}$$

Dalla (6.10) si ottiene:

$$[(P-O)\times\vec{b}]^2 = -\,c^2t^2(m^2-1) - 2[(P-O)\times\vec{b}]\cdot cmt$$

da cui, posto:

$$\vec{a}^2 = m^2 - 1 \tag{6.16}$$

si ricava:

$$-c^2t^2\vec{a}^2 = [(P-O)\times\vec{b}]^2 + 2[(P-O)\times\vec{b}]\cdot cmt \tag{6.17}$$

Sostituendo quindi la (6.17) nella (6.15), applicando al primo membro di quest'ultima il lemma (6.12) e ricordando (vedi paragrafo precedente) che, per vettori arbitrari, $H(\vec{u},\vec{v})\vec{x} = \vec{u}\times\vec{x}\cdot\vec{v}$, si ottiene (per le proprietà del prodotto scalare):

$$K\alpha.\alpha(P-O) = (P-O) + H(\vec{b},\vec{b})(P-O) \tag{6.18}$$

da cui, passando ai soli operatori, si ha:

$$K\alpha.\alpha = 1 + H(\vec{b},\vec{b}) \tag{6.19}$$

Poiché vale il lemma:

$$KK\alpha = \alpha \tag{6.20}$$

sostituendo nella (6.19) rispettivamente α, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ con $K\alpha$, $\vec{b}$ e $\vec{a}$, otteniamo grazie alla (6.20), la:

$$\alpha.K\alpha = 1 + H(\vec{a},\vec{a}) \tag{6.21}$$

e sostituendo analogamente in (6.14) e (6.16) si ottiene rispettivamente:

$$\alpha\vec{b} = m\vec{a} \tag{6.22}$$

e

$$\vec{b}^2 = m^2 - 1 \tag{6.23}$$

Le *trasformazioni speciali di Lorentz* le otteniamo se, partendo da (6.4), poniamo:

$$\alpha = 1 + \frac{H(\vec{a},\vec{a})}{m+1} \qquad \text{e} \qquad \vec{a} = \vec{b} = p\vec{i}$$

con $m = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $p = -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $p^2 + 1 = m^2$ e $\vec{i}$ un vettore unitario parallelo alla direzione del moto rettilineo uniforme.

Come si può constatare, il sistema minimo del calcolo geometrico con l'aggiunta della teoria delle omografie vettoriali conduce ad una suggestiva presentazione matematica di concetti fondamentali della relatività. La (6.19) e la (6.21) sono due teoremi che caratterizzano mediante la teoria delle omografie, le trasformazioni generali di Lorentz. Certamente si tratta di una scelta di tecniche e formalismi. Ma spesso – come si sa – ciò non è irrilevante nella matematica e nelle sue applicazioni.

7. – Qualche considerazione conclusiva.

Indubbiamente risulta molto interessante anche da un punto di vista fondazionale l'impostazione di Peano-Grassmann. Questa tuttavia, come abbiamo esemplificato, va al di là del solo obiettivo di dare un nuovo approccio o, se vogliamo, uno specifico fondamento alla geometria elementare e proiettiva. Per Peano e la sua scuola si tratta, come abbiamo più volte sottolineato (non solo in questa sede), di giustificare, poggiandosi su un calcolo e non su una impostazione assiomatico deduttiva (anch'essa peraltro ben analizzata da Peano e dai suoi allievi), i teoremi della geometria. Ma le applicazioni alla fisica del sistema minimo e della teoria delle omografie risultano essere tutt'altro che secondarie. Anzi sembrano essere l'obiettivo principale dei nostri autori che lavorarono per dare alla fisica matematica un formalismo e un impianto teorico sicuramente originale anche se, a causa di un certo provincialismo e dei limiti stessi dei loro obiettivi, restarono troppo legati all'applicazione del formalismo medesimo, cioè del calcolo da loro istituzionalizzato. Altri in Italia e all'estero proporranno idee nuove e teorie di grandissimo interesse. Il superamento del sistema generale mediante l'introduzione del sistema minimo con l'aggiunta della teoria delle omografie è il frutto, almeno in parte, delle forti polemiche che tra Ottocento e Novecento si ebbero tra gli studiosi di sistemi di calcolo geometrico. Infatti in quel periodo il dibattito tra i matematici impegnati in questo settore non vide contrapporsi soltanto hamiltoniani da un lato e grassmanniani dall'altro, ma, e forse in modo più accentuato, vettorialisti in senso stretto (sistema minimo e omografie) e sostenitori di sistemi generali (come quelli di Hamilton e di Grassmann). I secondi sostenevano che costruire un calcolo geometrico trascurando i quaternioni o le formazioni geometriche ed i relativi prodotti (tra quaternioni o tra formazioni geometriche) voleva dire tornare indietro, nel senso che, in effetti, significava rinunciare ad una teoria ed ai relativi algoritmi generali che permettevano di esprimere in modo matematicamente elegante questioni ed argomenti di geometria e di fisica matematica. Il rischio di essere un semplice strumento tachigrafico era la critica più ricorrente che gli hamiltoniani (e non solo loro) facevano alle tecniche dei vettorialisti ristretti. Ma i vettorialisti ebbero in qualche modo partita vinta per quanto riguarda le applicazioni alla fisica, in particolare alla meccanica: andava bene il sistema minimo con l'aggiunta di prodotti particolari quali quello scalare, quello vettoriale e quello misto. D'altro lato, la teoria sintetica delle trasformazioni lineari espressa mediante le omografie veniva soppiantata, nonostante essa abbia conservato la sua intrinseca validità, dai metodi matriciali che facevano uso via via di un formalismo sempre più compatto ([32]).

BIBLIOGRAFIA

Altre indicazioni bibliografiche sono date nelle note e nel testo.

M. A. ARMSTRONG, *Basic Topology*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

G. BELLAVITIS, *Sposizione del metodo delle equipollenze*, in *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, vol. XXV (Modena, 1854), 1-85.

([32]) Di questo cambiamento verso l'utilizzo sistematico delle matrici si rimanda all'interessante articolo di Giovanni Giorgi "Calcolo matriciale", AA.VV. *Enciclopedia delle matematiche elmentari e complementi*, vol. III, Parte I, Ed. U. Hoepli, Milano, 1947, pp. 125-166. Va altresì tenuto presente dello stesso autore l'articolo "Metodi di calcolo vettoriale e spaziale, notizie critiche e comparative", Ibid, pp. 103-124. Questo articolo fa da pendant all'articolo di Burali Forti, pubblicato sempre nella *Enc. delle mat. elem. e compl.*, nel vol.II, parte II, ma nel 1938, dal titolo "Elementi di calcolo vettoriale", pp. 105-141.

M. BORGA - P. FREGUGLIA - D. PALLADINO, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, F. Angeli ed., Milano 1985.

C. BURALI FORTI, *Geometria analitico proiettiva*, Ed. Petrini, Torino, 1926.

C. BURALI-FORTI - R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Nicola Zanichelli, Bologna, 1909 (seconda edizione ampliata, 1921).

C. BURALI-FORTI - R. MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale* (I et II vol.), Mattei & C. Éditeurs, Pavia, 1912, 1913.

C. BURALI-FORTI - T. BOGGIO, *Espaces courbes. Critique de la relativité*, Sten Editrice, Torino, 1924.

E. CARTAN, «Nombres Complexes, exposé d'après l'article allemand de E. Study», in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, vol. I (Gauthier-Villars, Paris, 1907), 329-468.

E. D'OVIDIO, *Geometria Analitica*, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1896.

F. ENRIQUES, *Lezioni di geometria proiettiva*, Zanichelli ed., Bologna, 1898.

P. FREGUGLIA, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contributo italiano al calcolo geometrico*, QuattroVenti ed., Urbino, 1992.

P. FREGUGLIA, *Geometria e numeri. Storia, teoria elementare ed applicazioni del calcolo geometrico*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006

H.G. GRASSMANN, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke* [*G. W.*] a cura di F. Engel, 3 voll., Teubner, Leipzig, 1894-1911; *Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik*, 1844, in *G.W.* (Teubner), Leipzig, 1894, vol. I_1; *Die Ausdehnungslehre von 1862* (1862), in *G.W.* (Teubner), Leipzig, 1894, vol. I_2 (1896).

M.J. GREENBERG, *Lectures on algebraic topology*, W.A. Benjamin, Reading Mass., 1967.

T. LEVI-CIVITA-U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale* (3 voll.), Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1926-1930.

(LÜTZEN, J. ed. by), *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*, C. A. Reitzels Forlag, Copenhagen, 2001.

L. MAGNANI, *Filosofia e geometria. Temi teorici e storici*, Guerini & Associati, Milano, 1990.

R. MARCOLONGO, *Meccanica razionale* (2 voll.), Manuali Hoepli, Milano, 1905.

R. MARCOLONGO, *Relatività*, Casa Editrice Giuseppe Principato, Messina, 1921.

G. PEANO, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1887.

G. PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di H.Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1888.

(SCHUBRING, G. ed. by), *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1996.

H. SEIFERT - W. THRELFALL, *A textbook of Topology*, Academic Press, 1980.
R. TORETTI, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel, Dordrecht, 1978.

Paolo Freguglia, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata,
Università di L'Aquila

Cristiano Bocci, Dipartimento di Matematica «F. Enriques»,
Università di Milano