
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

G. CITTI, A. SARTI

Geometria differenziale per il completamento percettivo

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.1, p. 107–130.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_107_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_107_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Geometria differenziale per il completamento percettivo

G. CITTI - A. SARTI (*)

1. – Introduzione

Quando guardiamo un'immagine, come quella indicata in figura 1, il nostro sistema visivo è in grado di percepire non soltanto i contorni effettivamente presenti, ma anche altri contorni, detti contorni soggettivi. Infatti noi percepiamo molto chiaramente la presenza di una figura bianca ricurva, che copre un quadrato e dei cerchi, benché i bordi di queste figure non siano completamente presenti nell'immagine. Inoltre la regione bianca ci appare come una superficie in rilievo, più chiara dello sfondo, e si chiama superficie soggettiva perché viene ricostruita dal soggetto che guarda. Questi fenomeni, anche chiamati completamento percettivo, sono stati diffusamente studiati da Kanizsa [18, 19] e dagli psicologi della percezione (si veda Field et al. in [14], Kovacs e Julesz, in [21], Kapadia et al, in [20]). E sulla base di questi dati sono stati formulati alcuni modelli di completamento che utilizzano strumenti del calcolo delle variazioni ([22], [8], [2]). Oggi, grazie alle moderne tecniche di neuroimaging, che consentono una descrizione dettagliata della corteccia, è possibile formulare modelli matematici di corteccia visiva, e giustificare su basi neurofisiologiche questi fenomeni percettivi. Fra i primi studiosi che hanno affrontato questo tipo di problemi con strumenti di geometria differenziale si possono citare Petitot e Tondut [28].

Qui richiamiamo dapprima alcuni esperimenti classici dovuti a Kanizsa e a Heiss, Fields e Hess, che indicano l'importanza del con-

(*) Lavoro in parte finanziato sui fondi del progetto GALA-Geometric Analysis in Lie groups and Applications, nell'ambito del VI programma Quadro della Commissione Europea.

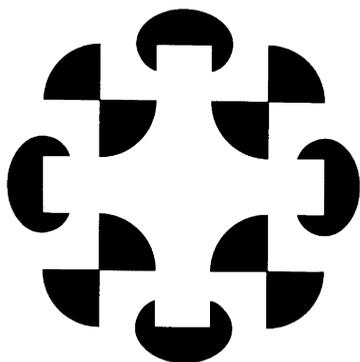


Fig. 1. – Un'immagine di Kanizsa.

cetto di direzione nei processi percettivi, poi presentiamo un modello di corteccia dovuto a G. Citti e A. Sarti [6], che si colloca nel filone di ricerca aperto da [28] e modella la corteccia visiva con strumenti sofisticati di geometria differenziale e analisi in gruppi di Lie. È basato sulla modellazione di alcuni meccanismi neurali, ed in particolare sulla capacità delle cellule semplici di individuare in ogni punto la direzione dei bordi degli oggetti e di operare completamenti percettivi.

La prima regione della corteccia visiva che opera un'elaborazione dell'impulso visivo è la corteccia V1, o corteccia striata. Le cellule di questa regione, dette cellule semplici, sono in grado di estrarne alcune caratteristiche, come direzione dei bordi, distanza dai bordi delle immagini, o colore.

Qui ci occupiamo specificamente dell'estrazione della direzione dei bordi. Proponiamo un modello di completamento costituito da un algoritmo a due passi in cui vengono applicati in successione i due meccanismi seguenti:

- **soppressione dei non massimali** Attraverso un meccanismo detto di soppressione dei non massimali, ad ogni punto (x, y) del quadrato immagine viene associata la direzione $\bar{\theta}(x, y)$ del bordo dell'immagine su quel punto, oltre che l'intensità di colore. Questo meccanismo definisce una funzione $\bar{\theta}(x, y)$, il cui grafico può essere interpretato come una superficie. Il grafico è definito in uno spazio 3-Dimensionale (x, y, θ) , che descrive la corteccia visiva, e che viene studiato con strumenti di geometria differenziale subriemanniana.

- **diffusione orizzontale** Un meccanismo neurale di diffusione lungo le connessioni orizzontali propaga le informazioni che si trovano inizialmente sulla superficie $\bar{\theta}(x, y)$ e da origine al completamento percettivo. Questo meccanismo è modellato tramite una equazione differenziale nello spazio 3-Dimensionale.

Partendo dalla superficie iniziale grafico di $\bar{\theta}$, questo algoritmo genera le superfici soggettive, e giustifica i principali fenomeni di completamento.

2. – L’orientazione nei fenomeni percettivi

Gaetano Kanizsa in [18, 19] ha proposto leggi della segmentazione del campo visivo e leggi della formazione delle unità percettive, spesso in termini di concetti matematici. I principali fattori di unificazione o di organizzazione in unità del campo percettivo che individua sono: la distanza, la continuità della direzione, l’orientamento, la chiusura di curve, e la convessità.

Il concetto di **distanza** è illustrato da Kanizsa in figura 2. In questa immagine, costituita da punti uguali, non riconosciamo alcuna struttura. Ma se i punti vengono allontanati e raggruppati in modi diversi, come in figura 3, allora ci appaiono configurazioni stabili. In altre parole abbiamo operato un completamento sulla base della distanza fra i punti.

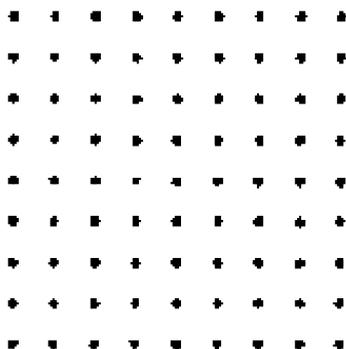


Fig. 2. – Configurazione di punti.

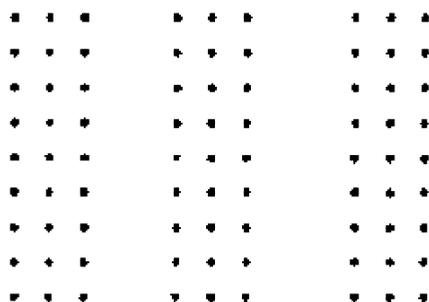


Fig. 3. – Raggruppamenti secondo la distanza.

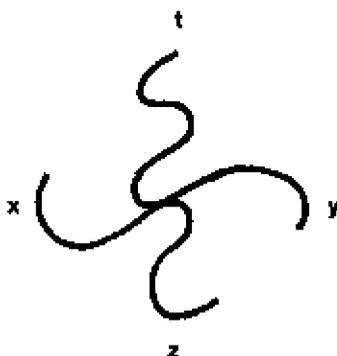


Fig. 4. – Il principio di buona continuazione.

Altre immagini, sempre di Kanizsa, illustrano il concetto di **conservazione della direzione**. In figura 4 sono presenti alcune curve. Tuttavia noi non vediamo la curva generata dai segmenti x,t intersecarsi con la curva z,y , ma vediamo la curva xy , intersecarsi con la curva tz , ovvero ci paiono come curve unitarie, quelle piú regolari. Analoghi fenomeni di orientamento dello spazio si riconoscono in

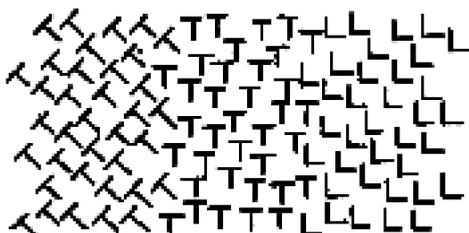


Fig. 5. – Esempio di orientamento.

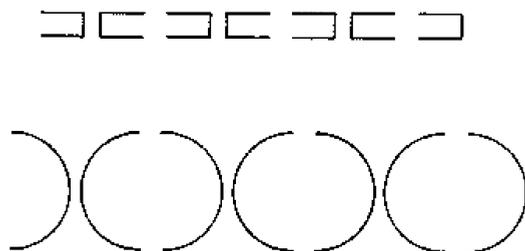


Fig. 6. – Completamento di contorni e figure convesse.

figura 5, dove lo spazio risulta unione di regioni diverse, ciascuna caratterizzata da una diversa direzione.

Se poi guardiamo la figura 6, tendiamo a percepire la presenza di rettangoli e cerchi. Qui agiscono quindi due fattori: la tendenza a costruire curve chiuse, bordi di oggetti e la tendenza a diventare figura dell'area convessa.

In queste due ultime immagini il nostro sistema visivo opera un completamento dei bordi delle figure convesse. Kanizsa distingue fra completamento modale e amodale. Il completamento modale avviene con la stessa modalità della visione, ed è illustrato nell'immagine 7. Il nostro sistema visivo percepisce effettivamente un triangolo con i bordi ricurvi con la stessa modalità della visione: esso ci appare più bianco dello sfondo, e più in alto. Il triangolo nasconde tre cerchi, che pure sono percepiti e completati, ma con una modalità diversa da quella della visione. Cioè il completamento dei cerchi viene solo

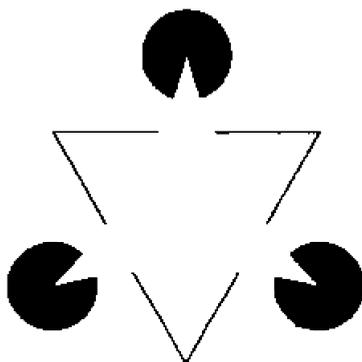


Fig. 7. – Il triangolo di Kanizsa.

pensato, non visto. Quindi il completamento in questo caso è detto amodale.

Uno degli esperimenti che chiariscono meglio il ruolo dell'orientazione nel completamento di immagini, e gettano luce sui meccanismi corticali di completamento è quello di Field, Hayes, Hess [14]. Si tratta di sottoporre all'osservatore la griglia di elementi orientati rappresentata in figura 8.

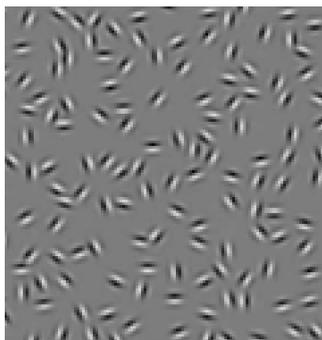


Fig. 8. – L'esperimento di Field, Hayes e Hess.

Alcuni di questi elementi sono orientati lungo una curva, altri hanno orientazione completamente casuale. Il problema consiste nel verificare se il soggetto è in grado di riconoscere l'allineamento. I risultati rivelano che i soggetti sono in grado di riconoscere l'orientamento se gli elementi sono allineati, o per piccole variazioni della direzione.

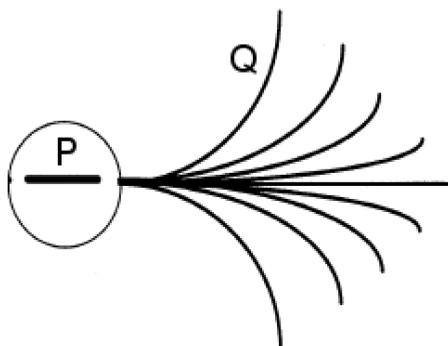


Fig. 9. – Campi di associazione di Field, Hayes, Hess.

L'esperimento ha portato alla rappresentazione delle linee di campo dei campi di associazione, rappresentate in figura 9. Ovvero un punto P con tangente orizzontale può essere collegato da un contorno soggettivo ad un altro punto Q solo se Q appartiene ad una delle curve rappresentate in figura e se la direzione del contorno in Q è la tangente alla linea di campo.

3. – L'architettura funzionale della corteccia visiva

Dal punto di vista neurofisiologico l'acquisizione del segnale visivo avviene nella retina che, dopo aver eseguito una pre-elaborazione, proietta le informazioni al nucleo genicolato laterale e successivamente alle cortecce visive primarie, che si trovano nella parte posteriore del cranio e sono sede della vera e propria elaborazione del segnale. In particolare le cortecce V1 e V2 sono sede dell'elaborazione di informazione di orientazione dei contorni tramite le cosiddette cellule semplici e di altre caratteristiche del segnale visivo tramite le cellule complesse (visione stereoscopica, stima della direzione del movimento, detezione di angoli solo per citarne alcune). Ognuna di queste cellule è caratterizzata dal proprio campo recettore, cioè il dominio della retina $D \subset R^2$ a cui la cellula è connessa tramite le connessioni neurali della

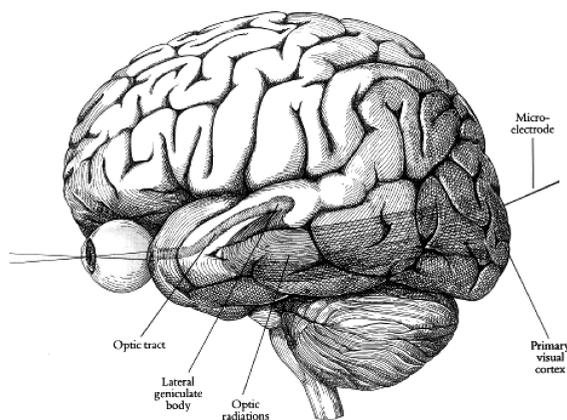


Fig. 10. – La via della visione. Sono messi in evidenza il nucleo genicolato e la corteccia visiva primaria.

via retino-geniculo-corticale e a cui la cellula risponde generando spikes allorquando il dominio retinico viene stimolato.

Classicamente un campo recettore viene suddiviso in aree on e off, a seconda della risposta della cellula ad una stimolazione puntuale positiva (aumento della frequenza di spikes) o negativa (diminuzione della frequenza di spikes). Si definisce comunemente profilo recettore della cellula la funzione $\phi(x, y)$, (dove (x, y) sono coordinate retiniche), $\phi : D \rightarrow R$ che misura la risposta neurale alla stimolazione puntuale nel punto (x, y) . Le cellule semplici hanno profili recettori direzionali come mostrato in figura 11 e sono sensibili ai contorni delle figure.

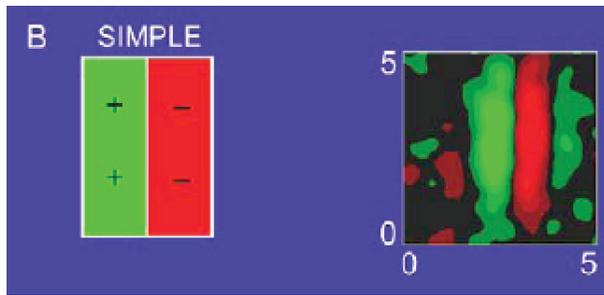


Fig. 11. – Profili recettori delle cellule semplici.

Per comprendere la reale elaborazione dell'immagine operata da queste cellule è necessario tenere conto delle strutture funzionali della corteccia visiva: l'organizzazione retinotopica, la struttura ipercolonnare, con la circuiteria intracorticale e la struttura di connettività tra le iper-colonne.

La **struttura retinotopica** è un mapping tra la retina e le cortecce visive primarie che conserva la topologia retinica, che può essere descritto da una trasformazione logaritmica conforme. Dal punto di vista di elaborazione dell'immagine il mapping retinotopico introduce una semplice deformazione dell'immagine stimolo che verrà trascurata nel presente lavoro.

La **struttura ipercolonnare** organizza le cellule corticali in colonne corrispondenti a parametri quali l'orientazione, la dominanza oculare, il colore ecc. Per le cellule semplici (che sono sensibili all'orientazione) la struttura colonnare significa essenzialmente che ad ogni posizione

retinica è associato un insieme di cellule (ipercolonna) sensibili a tutte le possibili orientazioni. In realtà la corteccia visiva è fondamentalmente bidimensionale quindi la terza dimensione collassa sul piano dando origine all'affascinante configurazione a pinwheels osservata da William Boskin e altri con tecniche di imaging ottico. In figura 12 le orientazioni a cui sono sensibili le cellule sono codificate a colori e ogni ipercolonna è rappresentata da un pinwheels cioè da una intera girandola di colori.

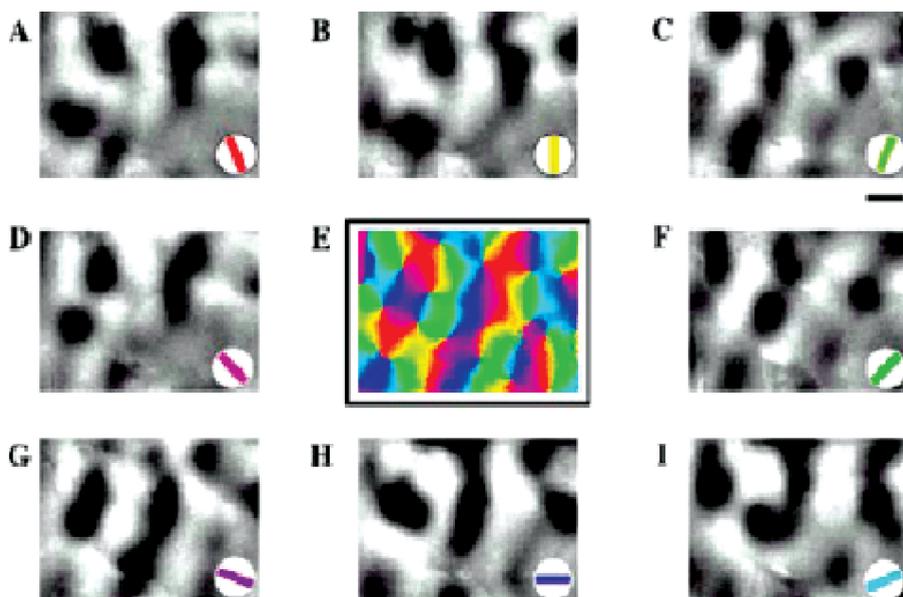


Fig. 12. – Rappresentazione delle ipercolonne corticali.

La circuiteria intracorticale è in grado di selezionare, in risposta ad uno stimolo visivo, la direzione di massima risposta dell'ipercolonna, ed eliminare tutte le altre. Il meccanismo che presiede questa selezione prende il nome di **soppressione dei non massimali**, il suo funzionamento è ancora controverso, e ne sono stati forniti molti modelli (si vedano [24, 29, 26]).

Un'altra struttura funzionale della corteccia visiva è l'organizzazione della connettività tra le ipercolonne chiamata anche **connettività orizzontale**. Le connessioni orizzontali collegano cellule con la stessa

orientazione appartenenti a diverse ipercolonne vicine. Storicamente si sono utilizzate tecniche di correlazione di segnale per individuare la relazione tra connettività e orientazione preferenziale delle cellule [33]. Solo più recentemente tecniche di imaging ottico associate a traccianti hanno permesso di osservare su larga scala la diffusione del segnale via connessioni cortico-corticali orizzontali e verificare che la propagazione è altamente anisotropa e pressochè collineare all'orientazione preferenziale della cellula (vedi figura 13 e il lavoro di Bosking [4]).

È ormai accertato che questa circuiteria presiede al processo inte-

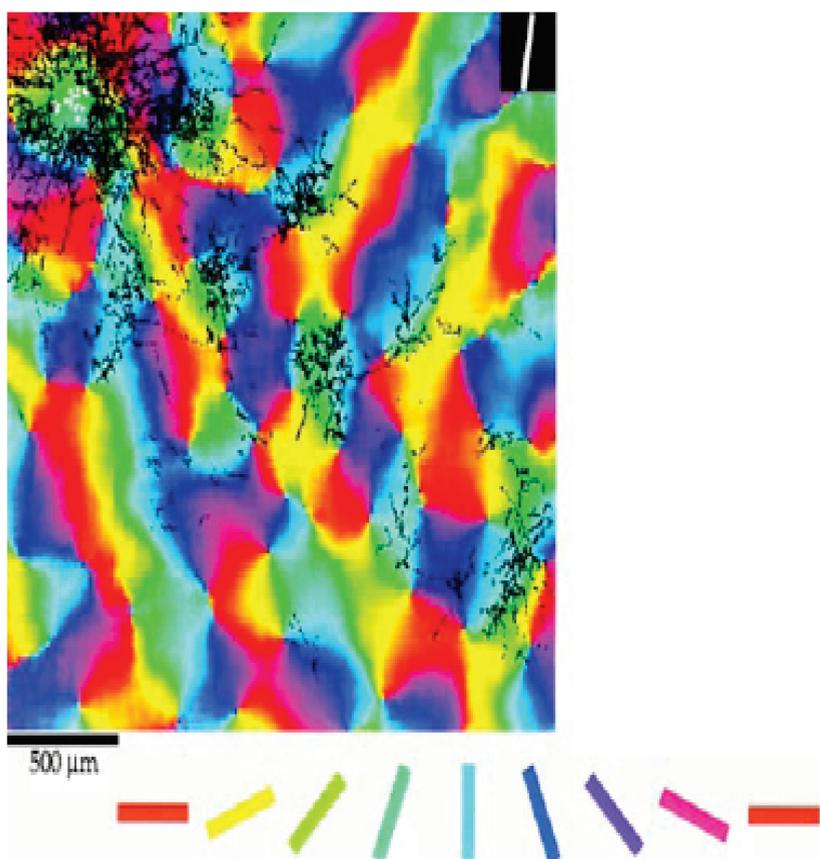


Fig. 13. – Un tracciante è iniettato nella corteccia, in un punto in alto a sinistra, e diffonde principalmente nelle regioni con orientazione uguale a quella del punto di iniezione.

grativo, che è alla base della formazione dei contorni regolari, dei contorni illusori e delle superfici soggettive [28].

Ovviamente l'architettura funzionale della corteccia visiva è molto più ricca della schematizzazione che abbiamo qui delineato, basti pensare all'alta percentuale di connessioni neurali di feed-back che provengono dalle aree corticali superiori, ma per il momento ci accontenteremo di proporre un modello della visione di basso livello che cerchi di matematizzare correttamente le strutture funzionali a cui abbiamo accennato e che mostri come queste stiano alla base del completamento percettivo dei contorni.

4. – L'azione delle cellule semplici

4.1 – Le cellule semplici

Abbiamo visto che la prima elaborazione del segnale visivo, è effettuata dalle cellule semplici della corteccia visiva primaria, e che hanno profili recettori direzionali come mostrato in figura 11. Esperimenti più sofisticati permettono di modellare le cellule semplici come funzioni dispari, supportata nel campo recettore, o esponenzialmente decrescente fuori di esso. La cellula sensibile alla direzione dell'asse y nell'origine sarà rappresentata dalla funzione

$$(1) \quad \phi(x, y) = x \exp(- (x^2 + y^2)/s).$$

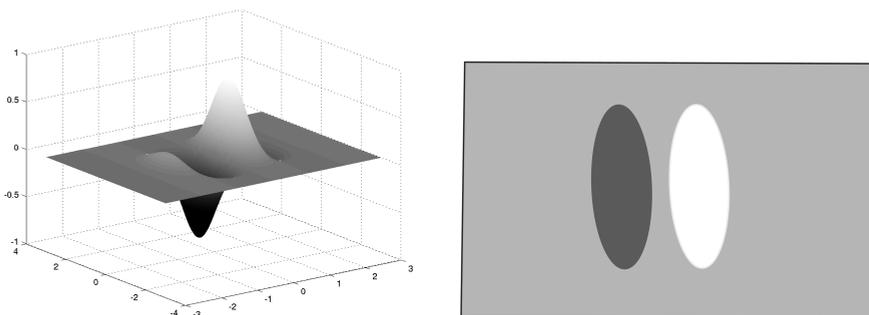


Fig. 14. – Nell'immagine a sinistra è rappresentato il profilo di una cellula semplice e nell'immagine a destra è schematizzata la sua proiezione sul piano.

Puó quindi essere visualizzate come in figura 14 (si vedano per maggiori dettagli sulle proprietà dei filtri: Daugman [7], Perona [27], Grossberg e Mingolla in [13]).

4.2 – *Struttura ipercolonnare e fibre di cellule semplici*

La struttura ipercolonnare, viene descritta attraverso una struttura di fibrato. Infatti, sopra ogni punto abbiamo poi una ‘fibra’ di cellule, ovvero una famiglia di cellule, ognuna sensibile ad una diversa direzione θ . Come indicato in [28] ogni fibra è fisiologicamente implementata da un colonna di orientazione, che è la struttura fondamentale della corteccia visiva [17]. In altre parole, la funzione definita in (1) si dice filtro madre e sopra ogni punto fissato abbiamo una famiglia di cellule che si ottengono dal filtro madre per rotazione:

$$\phi_{\theta}(x, y) = \tilde{y} \exp(-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/s).$$

dove

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta))$$

La funzione madre è dispari rispetto all’asse y , quelle ottenute per rotazione sono simmetriche rispetto alla direzione individuata dalla rotazione dell’asse, ovvero sono simmetriche rispetto alla direzione del vettore

$$Y = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

Inoltre la medesima fibra si trova sopra ogni punto, quindi la generica

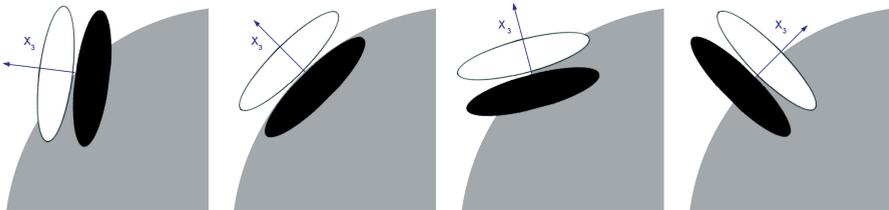


Fig. 15. – Fibra di cellule con diversa orientazione sopra il medesimo punto.

cellula semplice si scriverà

$$\phi_{\xi,\eta,\theta}(x, y) = \tilde{y} \exp(-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/s).$$

dove

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = ((x - \xi) \cos(\theta) - (y - \eta) \sin(\theta), (x - \xi) \sin(\theta) + (y - \eta) \cos(\theta))$$

Se la retina è sottoposta ad un singolo stimolo visivo unitario in un punto (x, y) , la risposta corticale è descritta dalla funzione ϕ , se invece lo stimolo visivo proiettato sulla retina è un'immagine descritta da una funzione $I(x, y)$, allora la cellula corticale provvederà ad integrare gli stimoli che provengono dai diversi punti, con densità che dipende dall'intensità dello stimolo visivo. L'output della cellula sarà quindi in generale descrivibile con un integrale:

$$(2) \quad O(\xi, \eta, \theta) = \int \phi_{\xi,\eta,\theta}(x, y) I(x, y) dx dy$$

Come si vede dalle immagini, si tratta di un meccanismo notevolmente sensibile all'orientazione.



Fig. 16. – La prima immagine rappresenta lo stimolo visivo. In mezzo la schematizzazione di una cellula semplice. L'ultima, fissato θ è la rappresentazione dell'output $O(\xi, \eta, \theta)$ come funzione di due variabili (ξ, η) .

5. – Soppressione dei non massimali

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la circuiteria intracorticale è in grado di selezionare la direzione di massima risposta della cellula, ed eliminare tutte le altre. Questo meccanismo di sop-

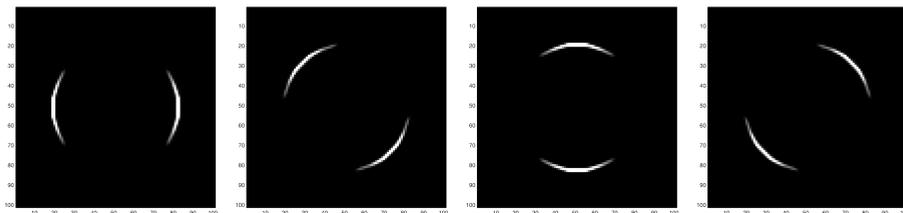


Fig. 17. – La funzione $O(\xi, \eta, \theta)$, rappresentata come funzione delle variabili (ξ, η) , per diversi valori di θ fissati. Rispettivamente $\theta = 0$, $\theta = 3\pi/4$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi/4$.

pressione dei non massimali, verrà modellato come il massimo dell'output O al variare di θ sulla fibra.

Viene quindi selezionato per ogni (ξ, η) il valore che massimizza $O(\xi, \eta, \theta)$, al variare di θ . Indicheremo $\bar{\theta}$ il punto in cui è assunto il massimo:

$$O(\xi, \eta, \bar{\theta}) = \max_{\theta} O(\xi, \eta, \theta).$$

È possibile provare che

TEOREMA. -- *Se l'immagine non è localmente costante attorno ad un punto (ξ, η) allora il vettore Y , valutato per $\theta = \bar{\theta}$, è ortogonale alle linee di livello dell'immagine in quel punto.*

Non diamo una dimostrazione formale di questa affermazione, ci limitiamo a commentare la Figura 15. Possiamo supporre che l'immagine assuma i valori 0 (nella parte grigia), 1 (nella regione bianca), mentre il filtro è dispari.

L'integrale (2) che definisce la funzione O è esteso alla sola regione in cui l'immagine vale 1. Se l'asse Y è parallelo al bordo dell'immagine, la restrizione del filtro all'insieme in cui l'immagine vale 1 è una funzione dispari, e quindi ha integrale nullo. Se invece l'asse Y è ortogonale al bordo, la restrizione del filtro all'insieme in cui l'immagine vale 1 è una funzione sempre positiva, e quindi il valore dell'integrale è massimo. Infatti in ogni altro caso il filtro assumerà sia valori positivi, sia negativi sulla regione di integrazione.

In questo processo, in ogni punto (ξ, η) la funzione $O(\xi, \eta, \cdot)$ è considerata come funzione della sola terza variabile θ . E vengono de-

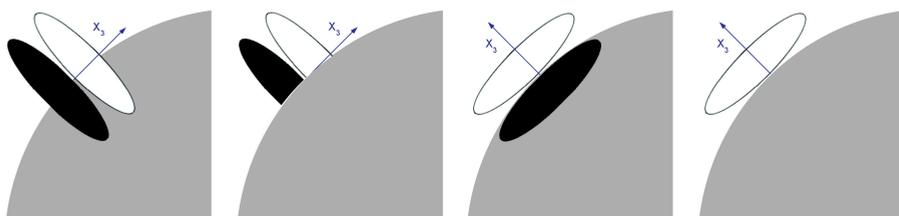


Fig. 18. – Nella prima e seconda immagine l'asse Y è parallelo al bordo dell'immagine. La prima rappresenta il filtro, e la seconda la restrizione dello stesso all'insieme integrazione. Nella terza e quarta il filtro e la restrizione del filtro all'insieme di integrazione, quando l'asse Y è ortogonale al bordo dell'immagine.

terminati eventuali punti θ di massimo relativo forte. In ciascuno di questi punti sarà verificata la relazione:

$$\partial_\theta O(\xi, \eta, \theta) = 0, \quad \partial_\theta^2 O(\xi, \eta, \theta) < 0$$

Quindi, al variare del punto (ξ, η) , abbiamo identificato la superficie

$$(3) \quad \Sigma_0 = \{(\xi, \eta, \theta) : \partial_\theta O(\xi, \eta, \theta) = 0, \quad \partial_\theta^2 O(\xi, \eta, \theta) < 0\}.$$

Questo insieme individua il massimo di attività delle cellule semplici, e sarà modellato come una delta di Dirac concentrata sulla superficie stessa:

$$O(\xi, \eta, \theta)\delta_\Sigma.$$

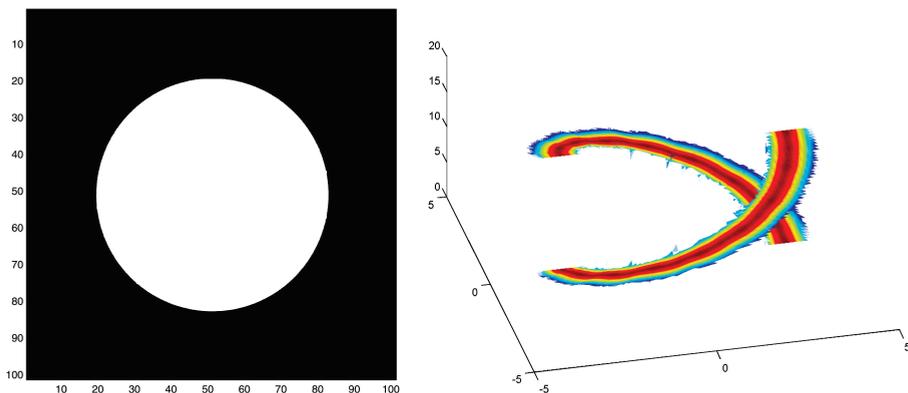


Fig. 19. – L'immagine del cerchio dopo il processo di soppressione dei non massimali. È individuata una superficie, intorno del bordo dell'immagine.

6. – Il meccanismo di completamento

6.1 – Connessioni orizzontali e curve integrali

Il processo di lifting che abbiamo descritto opera un lifting di ciascun punto dell'immagine separatamente. La superficie liftata viene invece sottoposta ad un processo integrativo di propagazione lungo le connessioni a lungo raggio della corteccia.

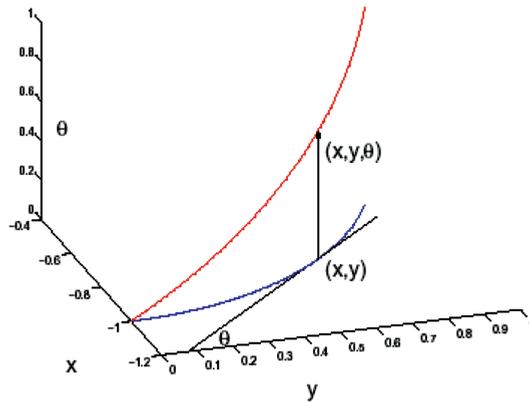


Fig. 20. – Una curva di livello e il suo lifting 3-dimensionale.

La geometria di questo processo può essere descritta a partire dall'osservazione che le linee di livello di ogni immagine sono ortogonali al vettore Y . Pertanto dopo il lifting, le curve significative per la superficie liftata apparterranno al piano ortogonale ad Y , che risulta generato dai vettori

$$X_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \quad X_2 = (0, 0, 1).$$

Al contrario curve integrali del campo vettoriale Y non sono presenti neanche nel lifting. Una famiglia di curve integrali dei campi X_1 e X_2 , uscenti da un punto fisso (ξ, η, θ) , si scrive nella forma

$$(4) \quad \gamma'(t) = X_1(\gamma) + kX_2(\gamma), \quad \gamma(0) = (\xi, \eta, \theta),$$

al variare del parametro k in \mathbb{R} . La soluzione del problema di Cauchy verrà indicata anche

$$\exp(t(X_1 + kX_2))(\xi, \eta, \theta).$$

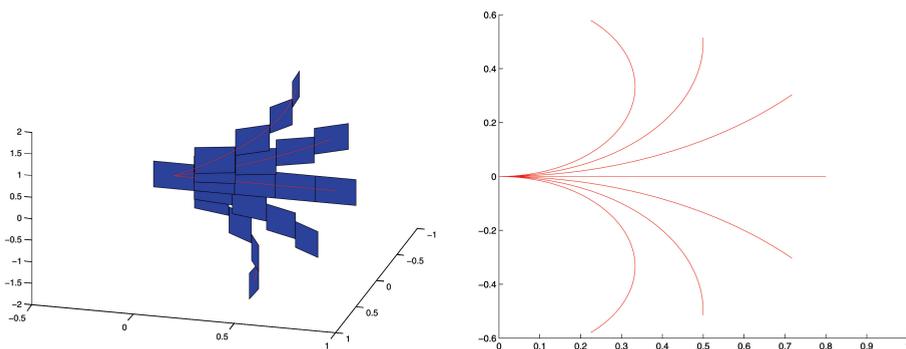


Fig. 21. – Curve integrali dei campi X_1, X_2 uscenti da un medesimo punto. A sinistra la proiezione sul piano bidimensionale.

Graficamente questa famiglia di curve si può rappresentare come in figura 21. Come si vede la geometria di curve è la stessa che viene generata dagli esperimenti di Field, Heyes, Hess (figura 9) e in quello di Bosking, in figura 13.

Le curve integrali dei campi verificano la cosiddetta proprietà di connettività. Infatti per ogni coppia di punti $(\xi, \eta, \theta), (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})$ esiste una curva integrale dei campi che li congiunge. Questo fatto è notevole, perché stiamo considerando curve integrali di soltanto due campi in uno spazio tridimensionale, ed è dovuto alla non commutatività dell’esponenziale. Infatti, partendo da un punto $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})$, e muovendosi lungo le curve

$$\gamma(t) = \exp(-tX_2) \exp(-tX_1) \exp(tX_2) \exp(tX_1)(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})$$

non torniamo al punto di partenza. Raggiungiamo invece un punto

$$\exp(t^2Y + o(t^2))(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta}).$$

Questo implica che è possibile operare uno spostamento nella direzione Y , con curve integrali dei campi X_1, X_2 . Quindi è possibile raggiungere ogni punto dello spazio con curve integrali di questo tipo, che giustifica la proprietà di connettività.

La scelta di una famiglia di curve definisce una distanza. Infatti la distanza fra due punti fissati è la minima lunghezza delle curve che congiungono i due punti dati. In questo caso la distanza che definiremo non sarà una distanza euclidea, ma una distanza **subriemanniana**.

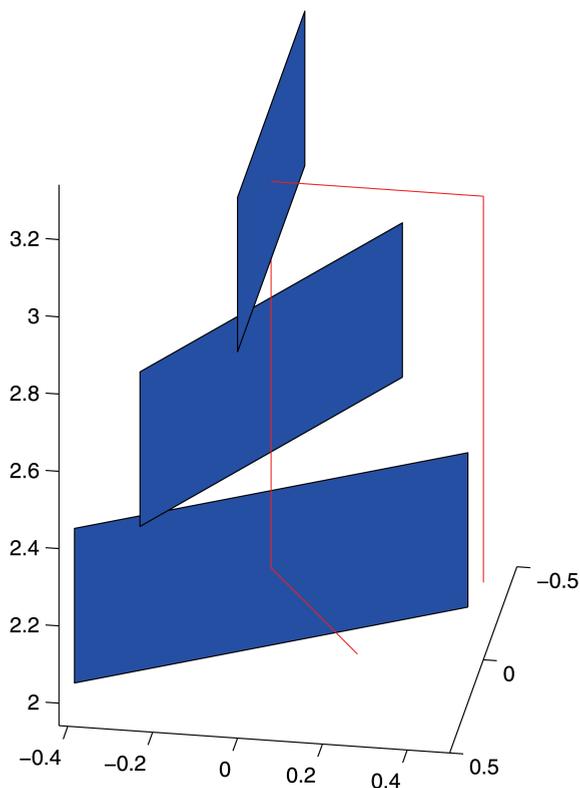


Fig. 22. – La composizione di due curve integrali non è commutativa.

Infatti definiamo lunghezza di una curva definita come in (4)

$$\lambda(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + k(t)^2} dt.$$

e di conseguenza possiamo chiamare distanza

$$(5) \quad d((\xi, \eta, \theta), (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta})) = \inf \{ \lambda(\gamma) : \gamma \text{ e una curva orizzontale} \\ \text{che connette } (\xi, \eta, \theta) \text{ e } (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\theta}) \},$$

si veda [25]. Il minimo si dice curva geodetica. Nel caso euclideo si tratta di un segmento e infatti la distanza fra due punti è la lunghezza del segmento che li congiunge. Nel caso generale di una

metrica subriemanniana le geodetiche non saranno segmenti, e la distanza fra due punti è la lunghezza della curva geodetica che li unisce.

6.2 – *Calcolo differenziale in strutture subriemanniane*

La diffusione lungo le curve integrali dei campi può essere formalizzata utilizzando una versione ‘subriemanniana’ del calcolo differenziale, in cui le derivazioni classiche sono sostituite da derivazioni lungo le curve ([1]).

Si verifica che, se γ è curva integrale del vettore X_1 , e f è una funzione regolare delle variabili (ξ, η, θ) , allora $f \circ \gamma$ è derivabile, con derivata

$$\cos(\theta)\partial_\xi f + \sin(\theta)\partial_\eta f.$$

Questa derivata si indica di solito $X_1 f$ perché ha gli stessi coefficienti del vettore X_1 . Poiché le curve che sono significative per l’immagine sono curve integrali di X_1 oppure X_2 , chiameremo gradiente orizzontale

$$\nabla_X u = (X_1 u, X_2 u) \quad \text{in } R^2 \times S^1$$

La direzione Y è legata alle altre da una relazione particolare:

$$(X_2 X_1 - X_1 X_2)f = Yf.$$

Questa relazione esprime in forma differenziale la stessa nozione che abbiamo espresso geometricamente quando abbiamo osservato che gli esponenziali lungo le curve X_1 e X_2 non commutano. La quantità $X_2 X_1 - X_1 X_2$ si chiama pertanto commutatore dei campi X_1 e X_2 e si indica $[X_1, X_2]$.

La diffusione lungo i campi si esprime con derivate seconde lungo i campi. Si dice sublaplaciano l’operatore rappresentato formalmente come un laplaciano, con le derivate seconde sostituite da derivazioni lungo i campi:

$$\Delta_X u = X_1^2 u + X_2^2 u.$$

Analogamente l'equazione di diffusione subcalorica sarà rappresentata nella forma:

$$\partial_t u = \Delta_X u.$$

Benché l'operatore subcalorico diffonda nelle sole direzioni X_1 e X_2 , la diffusione si estende a tutti i punti dello spazio, per la condizione di connettività. Pertanto le soluzioni sono regolari in ogni direzione, e si dimostra che la soluzione dell'equazione del sublaplaciano è C^∞ (si veda [10], [15], [16], [11]).

7. – Il modello di completamento

Il modello di completamento che proponiamo è un algoritmo in due passi.

- Il primo è costituito da una diffusione lungo i campi vettoriali che abbiamo individuato

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_X u \text{ per } (\xi, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1, t \in [0, h] \\ u(\cdot, 0) = u_0 \delta_{\Sigma_0} \end{cases}$$

- Il secondo passo è costituito dal meccanismo di soppressione dei non massimali. Dopo la diffusione viene generata una nuova superficie, sempre scegliendo il massimo in direzione θ . La determinazione del massimo si può fare imponendo che la derivata rispetto a θ sia 0, e la derivata seconda non nulla:

$$\Sigma = \{(\xi, \eta, \theta) : \partial_\theta u(\xi, \eta, \theta, t) = 0, \partial_\theta^2 u(\xi, \eta, \theta, t) < 0, t = h\}$$

I due passi dell'algoritmo vengono applicati iterativamente. Applicando i due passi dell'algoritmo alla superficie liftata Σ_0 e alla funzione $u_0(\xi, \eta, \theta) = O(\xi, \eta, \theta)$ (definite alla fine della Sezione 4), si ottengono una nuova funzione e una nuova superficie u_1, Σ_1 . Dopo n applicazioni dell'algoritmo avremo una coppia u_n, Σ_n . Si dimostra che questo algoritmo approssima un moto per curvatura. La prova è contenuta in [6], e per il caso euclideo, si faccia riferimento a [9], [3]. Asintoticamente, per $t \rightarrow +\infty$ la superficie tende ad una superficie

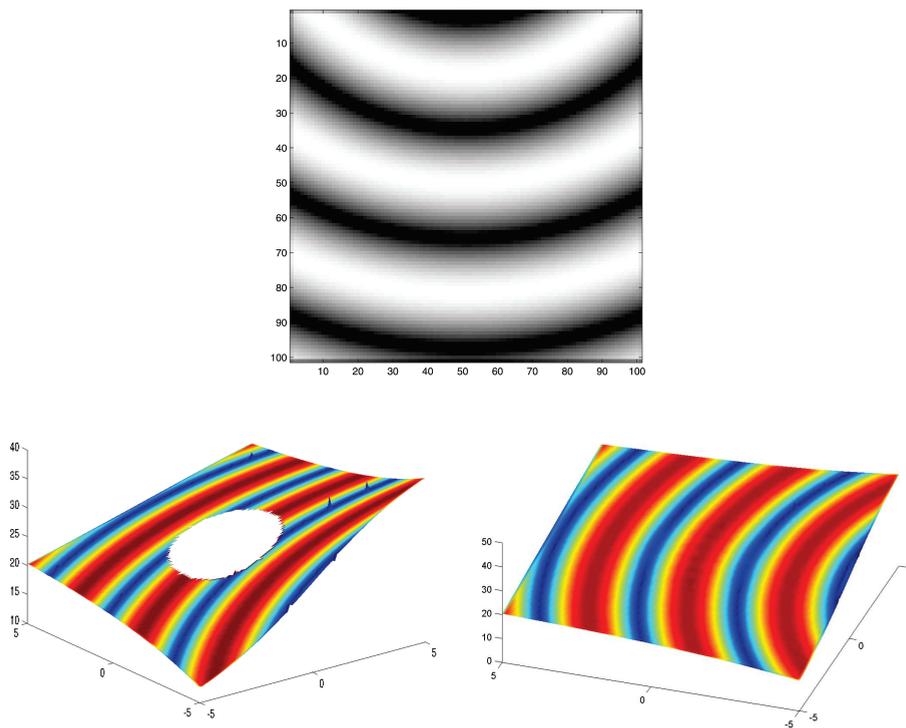


Fig. 23. – L’immagine originale è liftata nello spazio 3-dimensionale, ma alcune informazioni sono perse. Nell’ultima immagine è visualizzato il completamento.

minima nella metrica, ovvero la superficie sarà rappresentata come insieme di livello di una funzione che verifica l’equazione differenziale

$$X_1 \left(\frac{X_1 u}{|\nabla_X u|} \right) + X_2 \left(\frac{X_2 u}{|\nabla_X u|} \right) = 0.$$

Le superfici minime della metrica hanno la proprietà notevole di essere rigate in geodetiche (si veda definizione dopo la formula 5).

7.1 – Alcune prove

Il primo esempio numerico considerato riproduce il completamento operato dalla corteccia delle informazioni perse a causa della macula cieca, una zona della retina in cui non sono presenti recettori. La parte

dell'immagine che vi è proiettata deve essere completata dal sistema visivo [18]. L'immagine originale (figura 20), in alto a sinistra) è liftata nello spazio 3-dimensionale senza al centro le informazioni che sono andate perdute (in alto a destra). Questa è completata con l'algoritmo che abbiamo illustrato e si ottiene la superficie minima rispetto alla metrica subriemanniana.

Infine abbiamo considerato i delfini di Kanizsa. Questa immagine è stata studiata a lungo perché induce numerosi fenomeni percettivi. Le teste sono completate in modo modale, e coprono le code, che invece sono completate in modo amodale. Questo fenomeno impedisce di utilizzare gli algoritmi di completamento che introducono un ordinamento in profondità degli oggetti, perché nessuno dei due delfini è davanti all'altro. L'algoritmo qui presentato consente di operare il

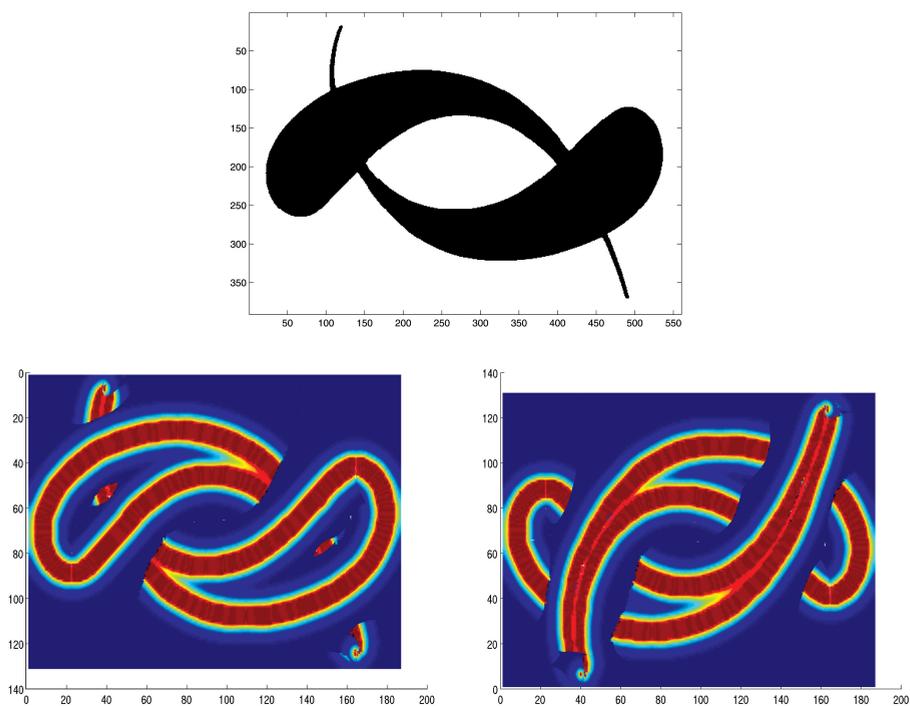


Fig. 24. – È operato il completamento modale e amodale della figura 1. Sono fornite due diverse viste dell'immagine completata: la prima che è una vista dall'alto permette di vedere il completamento modale, la seconda che è una vista dal basso il completamento amodale.

completamento modale e amodale contemporaneamente, e lo spazio 3D in cui avviene il completamento è sufficientemente grande per permettere di rappresentare contemporaneamente le due immagini.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BELLAÏCHE, *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, in *Proceedings of the satellite meeting of the 1st European congress of mathematics 'Journées nonholonomes: géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle, robotique'*, Paris, France, June 30-July 1, 1992. Basel: Birkhuser. Prog. Math., Vol. 144 (1996), 1-78.
- [2] C. BALLESTER - M. BERTALMIO - V. CASELLES - G. SAPIRO - J. VERDERA, *Filling-in by interpolation of vector fields and gray levels*, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 10, no. 8 (2001), 1200-1211.
- [3] J. BENCE - B. MERRIMAN - S. OSHER, *Diffusion generated motion by mean curvature*, in *Computational Crystal Growers Workshop*, J. Taylor Sel. Taylor Ed.
- [4] W. BOSKING - Y. ZHANG - B. SCHOFIELD - D. FITZPATRICK, *Orientation selectivity and the arrangement of horizontal connections in tree shrew striate cortex*, J. Neurosci. 17 (6) (1997), 2112-2127.
- [5] G. CITTI - M. MANFREDINI - A. SARTI, *Neuronal Oscillations in the Visual Cortex: Γ -convergence to the Riemannian Mumford-Shah Functional*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, Vol. 35, no. 6 (2004), 1394-1419.
- [6] G. CITTI - A. SARTI, *A cortical based model of perceptual completion in the Roto-Translation space*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol. 24, Issue 3 (2006), 307-326.
- [7] J.G. DAUGMAN, *Uncertainty - relation for resolution in space spatial frequency and orientation optimized by two dimensional visual cortical filters*, J. Opt. Soc. Amer., Vol. 2, no. 7 (1985), 1160-1169.
- [8] S. ESEDOGLU - R. MARCH, *Segmentation with Depth but without detecting junctions*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol. 18 (2003), 7-15.
- [9] L. EVANS, *Convergence of an Algorithm for mean curvature motion*, Indiana Univ. Math J., Vol. 42, n. 2 (1993), 553-557.
- [10] G.B. FOLLAND, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., Vol. 13 (1975), 161-207.
- [11] G.B. FOLLAND - E.M. STEIN, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 20 (1974), 429-522.
- [12] C.D. GILBERT - A. DAS - M. ITO - M. KAPADIA - G. WESTHEIMER, *Spatial integration and cortical dynamics*. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 93, 615-622.
- [13] S. GROSSBERG - E. MINGOLLA, *Neural dynamics of perceptual grouping: textures, boundaries and emergent segmentations*, in "Perception and Psychophysics, 1985.
- [14] D. FIELD - A. HAYES - R.F. HESS, *Contour integration by the human visual system: evidence for a local Association Field*, Vision Research, Vol. 33 (1993), 173-193.
- [15] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second-order differential equations*, Acta Math., Vol. 119 (1967), 147-171.
- [16] L. HÖRMANDER - A. MELIN, *Free systems of vector fields*, Ark. Mat., Vol. 16 (1978), 83-88.
- [17] D. HUBEL - T. WIESEL, *Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex*, Journal of Physiology, Vol. 160 (1962), 106-154.

- [18] G. KANIZSA, *Grammatica del vedere*, Il Mulino, Bologna, 1980.
- [19] G. KANIZSA, *Organization in Vision*, Praeger, New York, 1979.
- [20] M.K. KAPADIA - M. ITO - C.D. GILBERT - G. WESTHEIMER, *Improvement in visual sensitivity by changes in local context: parallel studies in human observers and in V1 of alert monkeys*, *Neuron*, Vol. **15** (1995), 843-856.
- [21] I. KOVACS - B. JULESZ, *Perceptual sensitivity maps within globally defined visual shapes*, *Nature*, Vol. **370** (1994), 644-646.
- [22] D. MUMFORD - M. NITZBERG - T. SHIOTA, *Filtering, Segmentation and Depth*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [23] S. MASNOU - J.M. NOREL, *Level lines based disocclusion*, Proc. 5th. IEEE International Conference on Image Processing, Chicago, Illinois, October 4-7, 1998.
- [24] K.D. MILLER - A. KAYSER - N. J. PRIEBE, *Contrast-dependent nonlinearities arise locally in a model of contrast-invariant orientation tuning*, *J. Neurophysiol.*, **85** (2001), 2130-2149.
- [25] A. NAGEL - E.M. STEIN - S. WAINGER, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, *Acta Math.*, Vol. **155** (1985), 103-147.
- [26] S.B. NELSON - M. SUR - D.C. SOMERS, *An emergent model of orientation selectivity in cat visual cortical simple cells*, *J. Neurosci.*, Vol. **15**, (1995), 5448-5465.
- [27] P. PERONA, *Deformable kernels for early vision*, *IEEE-PAMI*, Vol. **17**, no. 5 (1995), 488-499.
- [28] J. PETITOT - Y. TONDUT, *Vers une Neuro-geometrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux*, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, EHESS, Paris, Vol. **145** (1998), 5-101.
- [29] N.J. PRIEBE - K.D. MILLER - T.W. TROYER - A.E. KRUKOWSKY, *Contrast-invariant orientation tuning in cat visual cortex: thalamocortical input tuning and correlation-based intracortical connectivity*, *J. Neurosci.*, Vol. **18** (1998), 5908-5927.
- [30] L. ROTHSCCHILD - E.M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups*, *Acta Math.*, Vol. **137** (1977), 247-320.
- [31] A. SARTI - G. CITTI - M. MANFREDINI, *From neural oscillations to variational problems in the visual cortex*, *Journal of Physiology*, Vol. **97**, no 2-3 (2003), 87-385.
- [32] S.C. YEN - L.H. FINKEL, *Extraction of Perceptually Salient Contours by Striate Cortical Networks*, *Vision Res.*, Vol. **38**, no. 5 (1998), 719-741.
- [33] D. TS'O - C.D. GILBERT - T.N. DIESEL, *Relationship between horizontal interactions and functional architecture in cat striate cortex as revealed by cross-correlation analysis*, *J. Neurosci.* **6**(4) (1986), 1160-1170.
- [34] F.W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Glenview, Illinois-London: Scott, Foresman & Comp. 270, 1971.

Giovanna Citti: Università di Bologna,
Piazza di Porta S. Donato 5,
citti@dm.unibo.it

Alessandro Sarti: Università di Bologna,
via Risorgimento 2,
asarti@deis.unibo.it.