Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti in Napoli

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche

Claudio Baiocchi

Disuguaglianze isoperimetriche per i triangoli

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Serie 4, Vol. **85** (2018), n.1, p. 173–176.

Società Nazione di Scienze, Lettere e Arti in Napoli; Giannini

<http://www.bdim.eu/item?id=RASFMN_2018_4_85_1_173_0>

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche, Società Nazione di Scienze, Lettere e Arti in Napoli; Giannini, 2018.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXXV, (2018) pp. 173-176

Disuguaglianze isoperimetriche per i triangoli

Nota di Claudio Baiocchi [1]

Presentata dal socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 16 novembre 2018)

In memoria di Emilio Gagliardo nel X anniversario della scomparsa.

Key words: Triangoli, Disuguaglianze, Isoperimetria

Abstract – The well known *isoperimetric inequality* says that for any triangle ABC the semiperimeter p and the surface S satisfy:

$$p^2 \geq 3\sqrt{3} * S$$

with equality if and only if ABC is equilateral; in other words, among all triangles with prescribed area, the equilateral one has perimeter minimum.

We want to get a more precise inequality, concerning the family of triangles having a prescribed angle α; we will prove:

$$(\star) \qquad p^2 \geq \frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha} * S$$

with equality if and only α is the angle opposite to the base of an isosceles triangle.

Riassunto – Il semiperimetro p di un triangolo ABC e la misura S della sua superficie sono legati dalla disuguaglianza:

$$p^2 \geq 3\sqrt{3} * S$$

e l'uguaglianza vale se e solo se il triangolo è equilatero. Si tratta della ben nota *disuguaglianza isoperimetrica* la quale assicura che, tra tutti i triangoli di area assegnata, quello equilatero ha il perimetro minimo.

Ci proponiamo di ottenere una disuguaglianza più precisa valida per la famiglia dei triangoli per i quali è fissata la misura α di un angolo; precisamente vedremo che si ha:

$$(\star) \qquad p^2 \geq \frac{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}{\sin\alpha} * S$$

e l'uguaglianza vale se e solo se il triangolo è isoscele con α come angolo al vertice.

[1] Accademia dei Lincei, Via della Lungara 6, 80100, Roma, Italia. e-mail: bici.nando@gmail.com

1 - INTRODUZIONE

Il caso di triangoli isosceli è di dimostrazione immediata: se l è la misura del lato obliquo, la base e l'altezza relativa misurano rispettivamente $2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; quindi il rapporto tra il quadrato del semiperimetro p^2 e la superficie S vale:

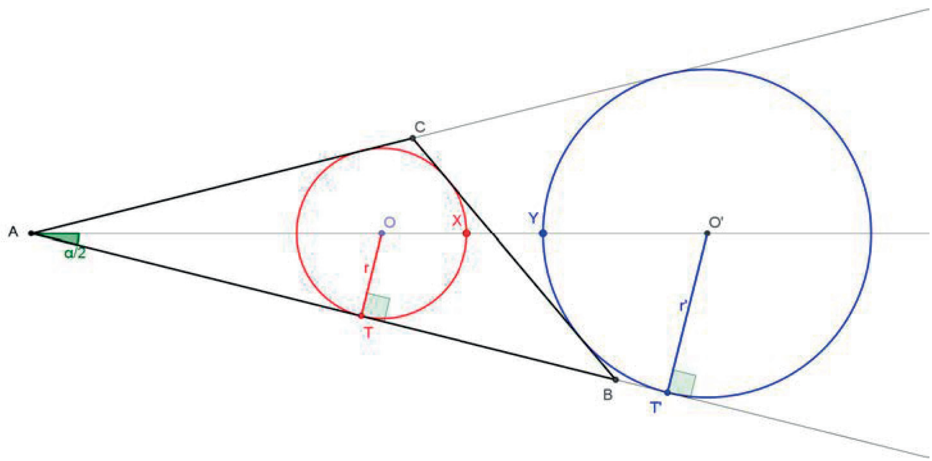
$$\frac{p^2}{S} = \frac{\left[l + l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}{l\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) * l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\left[1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) * \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

da cui l'uguaglianza in $(\star)$.

Per la dimostrazione di $(\star)$ si potrebbe cercare di dimostrare che il caso peggiore si verifica in corrispondenza a triangoli isosceli; ovvero tentare di lavorare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Tuttavia, da un lato la dimostrazione puramente geometrica che daremo ci sembra più interessante; e d'altro lato, come si vedrà, l'approccio qui seguito permette anche una agevole costruzione di un triangolo ABC a partire da una terna di dati $\{S, p, \alpha\}$ "compatibili", nel senso che soddisfano la $(\star)$.

2 - ESAME DI UNA FIGURA

La figura seguente mostra un triangolo ABC nel quale sono tracciate la bisettrice dell'angolo A, il cerchio inscritto (in rosso: centro O, raggio r, punto di tangenza T col lato AB) e quello exinscritto nell'angolo A (in blu: centro O', raggio r', punto di tangenza T' col lato AB)



Una ben nota proprietà di dimostrazione immediata (si veda ad es. Coxeter-Graitzer, §1.4) assicura che la lunghezza del segmento AT' coincide col semiperimetro p; ne segue che la lunghezza di AO' è $\frac{p}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ e che il raggio r' misura $p * \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Per quanto riguarda il cerchio inscritto, il segmento AO misura $\frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

In particolare per quanto riguarda i segmenti $AX = AO + r$ ed $AY = AO' - r'$ si ha:

$$AX = \frac{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * r; \quad AY = \frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * p = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * p$$

Poiché il raggio inscritto è legato alla superficie S ed al perimetro p dalla relazione $S = p * r$, la ovvia disuguaglianza $\frac{AY}{AX} \geq 1$ diventa

$$\frac{p^2}{S} \geq \frac{\left(1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) * \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

che coincide con la $(\star)$.

3 - OSSERVAZIONI

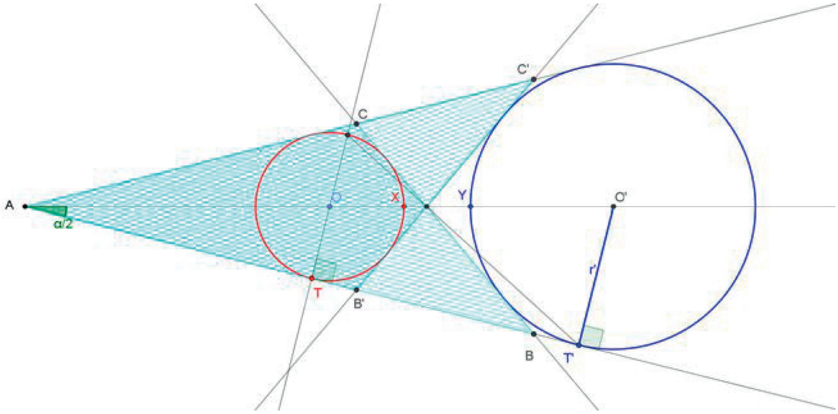
1. Il caso limite $X \equiv Y$ può presentarsi solo se i due cerchi sono tangenti (e quindi la loro tangente comune BC è ortogonale alla bisettrice); il che corrisponde ad un triangolo ABC in cui la bisettrice e l'altezza uscenti da A coincidono; cioè ABC è isoscele rispetto a BC come base.

2. Nel 2012 Ross Honsberger, in un articolo su Crux Mathematicorum, propose il problema di costruire con riga e compasso un triangolo di cui sono assegnati la superficie S, il semiperimetro p e l'ampiezza α di un angolo; senza porsi il problema della compatibilità dei dati e fornendo una possibile costruzione; costruzione che ovviamente fallisce se la $(\star)$ non è soddisfatta.

3. Il problema è stato recentemente riproposto da Philippe Fondanaiche su "http://www.diophante.fr". Né dalla costruzione di Honsberger né da quelle proposte dai lettori di Diophante sembra agevole dedurre la condizione necessaria e sufficiente $(\star)$; peraltro l'uso di metodi del tipo *moltiplicatori di Lagrange* per la ricerca del minimo della frazione $\frac{p^2}{S}$ sembra offrire maggiori difficoltà rispetto alla trattazione geometrica qui sviluppata.

4. Il trattamento ora visto permette anche un'agevole costruzione con riga e compasso di un triangolo ABC a partire da una terna $\{S, p, \alpha\}$.

   Come indicato in figura, inscritto un cerchio di raggio $r := \frac{S}{p}$ in un angolo $\hat{A}$ di ampiezza α, e fissato su un lato dell'angolo un punto T' con $|\overline{AT'}| = p$, è possibile tracciare il cerchio exinscritto; cerchio che se i dati sono compatibili non avrà punti interni comuni col cerchio inscritto perché il punto X precederà il punto Y. Il lato incognito BC si ottiene allora tracciando una tangente comune ai due cerchi. Naturalmente i triangoli ABC e AB'C' (che sono uguali) coincidono quando $X \equiv Y$.



4 - BIBLIOGRAFIA

H. S. M. Coxeter & Samuel L. Graitzer, *Geometry Revisited*, New Mathematical Library, 19. Random House, Inc., New York, 1967. xiv+193 pp.

Philippe Fondanaiche, *La construction du vieux taupin*, url="http://www.diophante.fr/problemes-par-themes/geometrie/d6-constructions-avec-regle-et-compas/4166-656 la construction du vieux taupin"

Ross Honsberger, *A Typical Problem on an Entrance Exam for the* Ecole Polytechnique, cms.math.ca/crux/v38/n3/ArticleHonsberger 38-3.pdf