
I Grandi Matematici Italiani online

CORRADO SEGRE

EUGENIO GIUSEPPE TOGLIATTI

Prefazione

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. v-xiii

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_P5>

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

PREFAZIONE

Il presente quarto volume completa la pubblicazione delle « Opere » di CORRADO SEGRE iniziata or sono circa otto anni. I 35 lavori ristampati in questo volume⁽¹⁾ sono ripartiti, come risulta dall'indice, in due gruppi: il primo comprende 22 Memorie e Note; il secondo raccoglie 13 lavori di tipi svariati, alcuni di carattere storico o didattico, conferenze, commemorazioni. Per ciascun gruppo è stato seguito nella pubblicazione l'ordine cronologico.

1. Il primo gruppo è la continuazione, in ordine cronologico, del terzo volume e comprende lavori di geometria proiettiva che vanno dal 1885 fino al 1920, pochi anni prima della morte dell'A. (1924). Non occorre ripetere qui quali siano i caratteri di questi lavori, già sintetizzati così bene dagli Autori delle prefazioni ai volumi precedenti.

Rileviamo anzitutto la breve Nota LVIII, del 1885, nella quale, utilizzando i risultati d'uno studio precedente (Memoria XLVII a p. 262 del III vol.), si esprime il momento mutuo di due complessi lineari di rette mediante l'angolo, in senso non-euclideo, che essi formano, nello spazio dei complessi stessi, rispetto ad un assoluto

(1) La revisione dei lavori ristampati nel presente volume è stata fatta dai proff. B. SEGRE (LVIII, LIX, LXI, LXVII, LXVIII, LXIX, LXXI, LXXIII); A. TERRACINI (LVI, LXII, LXIII, LXIV, LXV, LXVI, LXX, LXXVI, da LXXVIII a XC); E. G. TOGLIATTI (LVII, LX, LXXII, LXXIV, LXXV, LXXVII). La revisione delle bozze di stampa è stata fatta dal prof. E. G. TOGLIATTI, coadiuvato dal prof. D. GALLARATI e dalla dott.a M. T. PAROLETTI BONARDI.

Anche in questo, come nei tre volumi precedenti, i lavori sono stati riprodotti integralmente nel loro testo originale; correggendo, senza rilevarle, evidenti sviste tipografiche; aggiungendo nel testo, in pochissimi punti, entro parentesi quadre, qualche necessaria parola o citazione chiarificatrice; e riservando ad apposite note a piè di pagina, contrassegnate con la sigla N. d. R., osservazioni di qualche rilievo.

costituito dai complessi speciali. Gioca qui in modo sostanziale il concetto delle rappresentazioni iperspaziali in spazi i cui elementi possono essere enti delle specie più svariate. Sullo stesso concetto, che ritorna continuamente nella produzione scientifica di C. SEGRE, è basata la Memoria LVI (che risponde ad una domanda posta all'A. dal CAYLEY, e che è simultanea alla classica Memoria del VERONESE sulla F^4 di S_5 che ne porta il nome), nella quale si perviene con metodo puramente sintetico, ed ormai classico, alle proprietà della detta F^4 e della M_4^3 delle sue corde partendo dalla rappresentazione delle coniche-inviluppi d'un piano sui punti d'un S_5 .

I lavori LVII, LIX, LX, LXI, pubblicati tra il 1885 ed il 1886, trattano di omografie e di correlazioni. La Memoria LVII è basata sullo studio approfondito e sulla classificazione delle omografie, in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, che l'A. aveva già fatto nella Memoria XLIX (v. p. 304 del III vol.). In essa si considerano dapprima, in generale, quelle omografie dell' S_n che mutano in sè una quadrica dell' S_n stesso, per poi interpretarle, quando $n = 5$, come omografie e correlazioni dello spazio ordinario; a questo scopo occorre anche uno studio delle correlazioni in un S_n qualsiasi; la Memoria si occupa pure delle omografie e delle correlazioni che mutano in sè un complesso lineare di rette. Tutta la ricerca è imperniata sulla teoria, di WEIERSTRASS, dei divisori elementari d'un determinante, teoria che l'A. aveva già largamente sfruttato nella sua dissertazione di laurea sulle quadriche e sulla geometria della retta. Carattere più elementare ha la Memoria LIX, nella quale, con eleganti procedimenti sintetici e senza uscire dal campo reale, si tratta di omografie tra forme di prima specie, di omografie armoniche, si introduce l'importante concetto di involuzione unita d'una proiettività sulla retta, passando poi ai fasci di omografie, ecc.; si tratta di nozioni fondamentali, che son poi passate, com'è ben noto, nei trattati di geometria proiettiva. Nella breve Nota LX troviamo, attraverso un'elegante dimostrazione analitico-geometrica, la costruzione che da uno spazio fondamentale di punti uniti di un'omografia dell' S_n in sè conduce allo spazio fondamentale di S_{n-1} uniti coniugato con quello. La Nota LXI infine, ricca essa pure di risultati nuovi, a cui l'A. vuol dare soltanto il carattere di esercitazioni, tratta di proprietà metriche delle correlazioni nello spazio ordinario, specialmente nel caso, parabolico, in cui al piano improprio corrisponde un punto improprio.

Un altro gruppo assai importante è costituito dai lavori LXIII, LXIV, a cui si può ravvicinare LXV, pubblicati tra il 1887 ed il

1888. Prendendo lo spunto dallo studio, fatto dal GEISER nel 1869, della quartica piana generale come contorno apparente d'una F^3 da un suo punto, la grande Memoria LXIV estende questo concetto alle ipersuperficie cubiche dello spazio a quattro dimensioni. Dopo uno studio preliminare approfondito delle proprietà generali di tali V_3^3 e dei loro contorni apparenti sullo spazio ordinario, specialmente nei casi in cui sulla V_3^3 esistono dei piani, si passa ad una discussione minuziosa delle V_3^3 generabili con tre reti proiettive di spazi ed aventi quindi dei punti doppi (da 6 a 10), e in particolare di quelle con linee doppie semplici o complicate; sempre esaminando le proprietà delle superficie dello spazio ordinario che si possono avere come contorni apparenti di quelle V_3^3 (tra esse in particolare la F^4 di KUMMER con 16 punti doppi), nonchè i sistemi di rette che si ottengono per proiezione nello spazio ordinario da quelli esistenti sulla V_3^3 . Infine, la rappresentazione d'una V_3^3 razionale di S_4 su un S_3 e la sua simultanea proiezione su un S_3 , o da un suo punto o da un punto esterno, conducono a vari tipi di trasformazioni doppie e triple dello spazio ordinario. Il caso più interessante di tali V_3^3 , cioè quello in cui essa possiede 10 punti doppi, varietà a cui si usa dare il nome dell'A., è sviluppato maggiormente nel lavoro LXIII (alcuni risultati del quale si trovano anche in ricerche simultanee di geometria della retta del CASTELNUOVO). La breve Nota LXV dimostra per via sintetica alcuni risultati dei due lavori precedenti e ne sviluppa varie conseguenze; notevole assai la configurazione di cinque piani associati dell' S_4 alla quale si perviene per via del tutto elementare.

I lavori di cui finora s'è detto, comparsi tutti nel quadriennio dal 1885 al 1888, e che, coi lavori precedenti ripubblicati nel terzo volume, costituiscono un apporto fondamentale alla costruzione della geometria proiettiva degli iperspazi, sono simultanei ad altri lavori (sulle rigate algebriche, sui sistemi lineari di curve piane, sugli elementi immaginari) nei quali l'A. incomincia a rivolgere la sua prodigiosa attività anche ad altri campi, nei quali pure raggiungerà poi un altissimo livello.

Per brevità non ci tratteniamo a lungo su altri lavori minori, che, alternandosi in parte coi precedenti, giungono fino al 1906. Essi sono: la lettera LXII al KLEIN del 1887, dove si dimostra sinteticamente che è lineare una $M_{\sigma+1}$ per ogni punto della quale passino più di due suoi R_σ , e che è quadratica quella $M_{\sigma+1}$ se quegli R_σ sono due; la Nota LXVI, del 1888, ove una considerazione elementare di geometria proiettiva prova che un sistema ∞^{n-1} di rette dell' S_n

possiede $n - 1$ varietà focali, preludio alle ricerche del Nostro nel campo della geometria differenziale, che hanno poi avuto inizio nel 1907; la Nota LXVII del 1892 che contiene due lettere scritte all'A. dal CAPORALI e nelle quali questi espone alcune sue ricerche sulle C^4 piane; la Nota LXVIII del 1894 con cui l'A. accompagna la pubblicazione dell'ultima parte d'una voluminosa ricerca del DE PAOLIS (di cui più diffusamente nella commemorazione LXXX), aggiungendo qualche cenno sul contenuto di alcuni manoscritti inediti del DE PAOLIS stesso; la lettera LXX ad R. STURM del 1906, sui legami tra la generazione proiettiva delle F^3 con tre fasci di piani trilineari e quella con tre reti di piani proiettive, rilevando il caso d'impossibilità di questa seconda generazione. Un cenno particolare va fatto per la Nota LXIX, del 1900, in cui l'A., interpretando alcune formole numerative di H. SCHUBERT, stabilisce dimensione ed ordine delle varietà di cui è detto nel titolo, sia per matrici rettangolari, sia per matrici quadrate o generali o simmetriche.

Tra il 1916 ed il 1920 ritroviamo un gruppo di lavori di maggior mole, tutti più o meno collegati tra di loro. Alla base dei lavori LXXI, LXXII, LXXIII, LXXIV, pubblicati tra il 1916 ed il 1918, sta la Memoria LXXIII, dedicata ai complessi lineari di piani dell' S_5 . Partendo dall'osservazione che la condizione d'incidenza di due piani dell' S_5 è bilineare alternata nelle coordinate dei piani stessi, ed utilizzando anche la teoria delle corrispondenze trilineari tra forme di prima specie, vi si determinano i gruppi di due o più piani legati tra loro linearmente, si ritrova in modo mirabilmente semplice che un complesso lineare generale di piani dell' S_5 è sempre combinazione lineare di due ben determinati complessi speciali, costituiti cioè ciascuno dai piani incidenti ad uno stesso piano: si hanno così i due cosiddetti « cardini » del complesso lineare di piani (già prima incontrati da LANDSBERG, REICHEL, WEITZENBÖCK, VENERONI); si estende questa proprietà considerando le terne di piani coniugati rispetto al complesso lineare; si studiano i complessi lineari singolari ed i fasci di complessi lineari, ecc.; il tutto con metodi sia sintetici che analitici armonicamente fusi, e sempre in relazione con la V_9 dell' S_{19} i cui punti rappresentano, al modo di GRASSMANN, i piani dell' S_5 , varietà che viene largamente utilizzata e studiata. Considerando poi insieme nell' S_5 un complesso lineare di piani ed una quadrica non specializzata, si giunge alla nozione d'un complesso lineare di schiere rigate, o regoli, di cui la Memoria LXXIV tratta diffusamente e con ricchezza di particolari (la Nota LXXII ne riassume i risultati). Questa ricerca ha condotto l'A. ad

una nuova definizione di un complesso quadratico di rette del BATTAGLINI, come insieme delle rette per ciascuna delle quali la quaterna dei punti d'intersezione con due regoli dati è proiettiva alla quaterna dei piani che da essa proiettano le quattro rette dei regoli passanti per quelle intersezioni; questa costruzione viene approfondita espressamente nella Memoria LXXI. La Memoria LXXV, del 1919, in cui si studiano i connessi dell'ordinario spazio rigato rappresentati da un'equazione bilineare alternata tra coordinate di retta, presenta punti di contatto sia con la LXXIV, in quanto utilizza un certo sistema di coordinate per i regoli che là era stato introdotto; sia colla LXXVII, del 1920, in cui vien fatto uno studio molto esteso delle corrispondenze quadrilineari tra quattro forme di prima specie. E la rappresentazione di tali forme sui regoli di due quadriche, concetto fondamentale della ricerca, rientra in cose più generali, esposte nella Nota Lincea LXXVI, pure del 1920, sul modo di facilitare lo studio di corrispondenze algebriche mediante opportune interpretazioni dei campi tra cui esse sono poste.

2. I 13 lavori raccolti nella seconda parte del presente volume sono disseminati tra il 1888 (lavoro LXXVIII) ed il 1922 (lavoro XC); la varietà dei caratteri che essi presentano contribuisce assai bene a lumeggiare e completare la figura dell'A. Questi lavori si possono raggruppare nel modo seguente.

LXXXII è una breve recensione in cui l'A., su invito del NOETHER, presenta all'Accademia delle scienze di Torino il noto studio storico di BRILL e NOETHER sullo sviluppo della teoria delle funzioni algebriche. LXXXIII, LXXXVIII, LXXXIX, XC sono brevi commemorazioni, tenute le prime tre all'Accademia delle scienze di Torino e l'altra ai Lincei; la brevità non vieta all'A. di cogliere, con pochi tratti magistrali, gli aspetti più salienti e caratteristici della posizione scientifica dei commemorati. Di maggior mole sono le commemorazioni di R. DE PAOLIS, G. BRUNO, G. VERONESE⁽²⁾ (LXXX, LXXXI, LXXXVII); esse sono biografie complete, sia delle vicende umane che di quelle scientifiche. Lo stesso carattere presenta il lungo e profondo studio su STAUDT (LXXVIII), pubblicato come prefazione alla traduzione italiana, dal SEGRE stesso promossa,

(²) Una brevissima commemorazione di G. VERONESE era stata letta dal Nostro all'Accademia delle scienze di Torino nell'adunanza del 18 novembre 1917 (Atti Acc. Torino, LIII, 1917-18, p. 2).

fatta dal PIERI, della classica « *Geometrie der Lage* ». L'acume storico e l'accuratezza estrema dell'informazione bibliografica, pregi che già si possono notare nei lavori sinora ricordati (nonchè nella Nota sulla storia del principio di corrispondenza che si trova a p. 185 del I vol.) rifulgono in modo singolare nei lavori LXXXIV e LXXXVI; il primo, con grande ricchezza di documentazione storica, formula fondatamente l'ipotesi che l'opera di G. SACCHERI, anche se portata alla ribalta solo nella seconda metà dell'800, deve aver influito sullo sviluppo della geometria non-euclidea più di quanto da vari autori si ritiene; il secondo rivendica a MONGE la priorità, rispetto a MALUS, della scoperta delle sviluppabili focali d'una congruenza *generale* di rette, e ad HAMILTON la priorità della scoperta della legge, detta comunemente di CHASLES, secondo cui varia il piano tangente ad una rigata lungo una sua generatrice non singolare.

La conferenza LXXXV, tenuta al congresso internazionale di Heidelberg nel 1904, e tradotta in polacco un anno dopo, fa un quadro completo dello stato e dei caratteri delle ricerche geometriche di quell'epoca e sui loro rapporti con l'analisi, segnalando con lungimiranza l'importanza di certi indirizzi di ricerche che già allora promettevano di avere quello sviluppo che, in seguito, hanno poi effettivamente avuto.

Rimane il lavoro LXXIX, uno dei più antichi di questa seconda parte del volume (risale al 1891; tradotto in inglese nel 1904), che esige un commento particolare. Si tratta fondamentalmente di consigli dati ai giovani che intendono dedicarsi alle ricerche matematiche in genere, ed a quelle geometriche in particolare. Da un lato questo lavoro presenta un notevole interesse storico, perchè strettamente collegato allo stato delle scienze matematiche in quei tempi ormai lontani, visto da uno dei più valenti matematici dell'epoca; da un altro lato bisogna riconoscere che i consigli ai giovani che vi si leggono, sul modo di saggiare le proprie attitudini alla ricerca scientifica, sul modo di valutare l'importanza d'una questione da sottoporre a studio, sulla necessità di conoscere a fondo i capolavori dei grandi maestri, sulla necessità di non restringere la propria attività scientifica ad un campo troppo limitato, ecc., conservano un carattere di permanente attualità: ancora oggi, dopo oltre settanta anni che sono state scritte, la lettura di quelle considerazioni si può utilmente consigliare ai giovani che si sentono attratti dalle ricerche matematiche.

3. I quattro volumi delle « Opere » non contengono tutto ciò che C. SEGRE ha pubblicato: varie cose, per ragioni diverse, sono state omesse.

Anzitutto, com'è ovvio, il poderoso articolo « *Mehrdimensionale Räume* », di 204 pagine, pubblicato nella grande enciclopedia tedesca delle scienze matematiche; articolo ultimato alla fine del 1912, ma finito di stampare solo nel 1920. Non occorre rammentarne i pregi; esso è veramente degno di uno scienziato di così grande valore e che tanta parte ha avuto nella costruzione della geometria iperspaziale; esso è un quadro perfetto dei risultati ottenuti in un settantennio di lavoro in questo campo dove i matematici italiani hanno avuto una parte di primo piano.

Il lavoro di cui s'è detto alla fine del n° prec., pubblicato nel primo volume della « Rivista di matematica », ha dato luogo ad una discussione tra P.A. ed il direttore della rivista stessa, G. PEANO⁽³⁾. La controversia tra i due illustri matematici dell'università di Torino verte sui §§ VI ed VIII del lavoro del SEGRE. Lasciando da parte la seconda di tali obiezioni, che ha carattere logico e riguarda i legami tra la geometria ordinaria e la geometria iperspaziale definita con un sistema di postulati, fermiamoci invece sulla prima osservazione del PEANO. Essa si può sintetizzare nelle frasi seguenti. Afferma C. SEGRE nel detto § VI, ed illustra con vari esempi tolti dalla storia delle matematiche, che « allorquando si tratta solo di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea », che « accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare il rigore ». Oppone G. PEANO che « il difetto di rigore in lavori di matematica non si può... in alcun modo difendere o scusare... È falsa una proposizione se vi si può trovare un caso d'eccezione...; non si può considerare come ottenuto un risultato finchè esso non è rigorosamente provato ». Basta l'enunciazione dei due punti di vista per capirne la profondità: se è vero che le vie per cui si può giungere ad un risultato possono essere le più impensate, tortuose ed imprecise, è pur vero che alla scoperta deve seguire l'assestamento logico, il quale però può anche concludersi molto tempo dopo, senza che perciò ci si debba imporre di ignorare quel risultato e di

(³) G. PEANO, *Osservazioni del direttore sull'articolo precedente*; Rivista di matematica, I, 1891, pp. 66-69. — C. SEGRE, *Una dichiarazione*; id., pp. 154-156. — G. PEANO, *Risposta*; id., pp. 156-159. La « *Dichiarazione* » di C. SEGRE non è stata qui ripubblicata.

non trarne conseguenze (si pensi ad es., con C. SEGRE, a ciò che è accaduto nella geometria numerativa, ove l'assestamento logico è venuto assai dopo che numerosi risultati, riconosciuti poi esatti, erano stati dedotti da principii ancora nebulosi). Una discussione come questa potrebbe esser sempre attuale.

Un'altra polemica ebbe a sostenere C. SEGRE con P. DEL PEZZO dopo la pubblicazione dello studio sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche (Memoria XVIII a p. 327 del I vol.)⁽⁴⁾. Non ne riferiamo i particolari: i due lavori di C. SEGRE che vi si riferiscono non aggiungono nulla di sostanziale alla Memoria XVIII.

Esorbita dal quadro della presente pubblicazione, e perciò non vi è stato compreso, il discorso « *Le previsioni* » che il SEGRE ha tenuto il 18 novembre 1918 per l'inaugurazione dell'anno accademico all'Università di Torino⁽⁵⁾: è un'esposizione a carattere divulgativo, con larga esemplificazione storica e ricca bibliografia, dell'importanza che ha nelle scienze il prevedere nuovi fatti.

Infine, volendo essere completi, non si possono passare sotto silenzio varie recensioni nel « *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* »⁽⁶⁾, e numerose relazioni, redatte dal SEGRE, e da lui presentate insieme con altri correlatori: la relazione del concorso internazionale per la « *medaglia GUCCIA* », letta dal SEGRE il 6 aprile 1908 al IV congresso internazionale dei matematici⁽⁷⁾; la relazione sul concorso al premio reale per la matematica, letta il 6 gennaio 1916 all'Accademia dei Lincei⁽⁸⁾; infine le numerose relazioni

(4) P. DEL PEZZO, *Osservazioni su una Memoria del prof. CORRADO SEGRE e risposte ad alcuni suoi appunti*; Atti Acc. Pontaniana, 27, 1897, n° 4, p. 13. — C. SEGRE, *Intorno ad una mia Memoria: Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*; Atti Acc. Torino, XXXII, 1896-97, pp. 521-529. — P. DEL PEZZO, *Replica ad una Nota del prof. CORRADO SEGRE in risposta ad alcune mie osservazioni*; Atti Acc. Pontaniana, 27, 1897, n° 10, p. 7. — C. SEGRE, *Su un problema relativo alle intersezioni di curve e superficie*; Atti Acc. Torino, XXXIII, 1897-98, pp. 19-23. — P. DEL PEZZO, *Contra Segrem*, 1897.

(5) Annuario della R. Università di Torino, 1918-19, pp. 11-25.

(6) Si tratta di circa trenta recensioni di lavori italiani, che si trovano nei vol. 16 del 1884 e 17 del 1885 del *Jahrbuch* (tradotte in tedesco da E. LAMPE); tutte rivelano nell'A., allora agli inizi della sua carriera scientifica, un senso critico precocemente maturo.

(7) Rend. Palermo, XXVI, 1908, pp. 145-151.

(8) Atti Acc. Lincei, Rend. adunanze solenni, III, pp. 23-33.

con le quali il SEGRE ha presentato per la pubblicazione ricerche di vari matematici. Si tratta sempre di analisi accurate, generalmente brevi.

La pubblicazione delle « Opere » di CORRADO SEGRE, uno dei più illustri matematici che l'Italia possa vantare nei tempi moderni, si conclude proprio mentre l'Università di Torino si accinge a celebrarne il centenario della nascita; la presentazione della pubblicazione completa dei quattro volumi di cui le « Opere » si compongono è il migliore omaggio di ammirazione e di gratitudine che l'Unione matematica italiana, ed i continuatori dell'opera Sua, in particolare i Suoi allievi, possano rendere alla Sua memoria in questa occasione.

EUGENIO G. TOGLIATTI

(⁹) Negli Atti dell'Accademia delle scienze di Torino se ne contano ben 25, riguardanti lavori di G. LORIA, G. FANO, F. ENRIQUES, G. CASTELNUOVO, R. DE PAOLIS, B. LEVI, M. PIERI, E. VENERONI, F. SEVERI, G. Z. GIAMBELLI, U. PERAZZO, U. AMALDI, A. COMESSATTI, M. STUYVAERT, E. DEL VECCHIO. Tra esse è notevole per la sua estensione la relazione, letta a quell'Accademia il 31 gennaio 1892, sulla Memoria del DE PAOLIS « *Sulle corrispondenze proiettive sulle forme geometriche fondamentali di prima specie* », della quale si parla pure, più in breve, nella Nota LXVIII e nella commemorazione LXXX.