Corrado Segre

Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux

Jour. für die reine und angewandte Math., Vol. **100** (1886), p. 317–330

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 63–77

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_63>

LIX.

NOTE SUR LES HOMOGRAPHIES BINAIRES ET LEURS FAISCEAUX

« Journal für die reine und angewandte Mathematik »,
Band C, 1886, pp. 317-330.

Cette Note a pour but d'établir, par les raisonnements de la géométrie pure de position, une suite de théorèmes en partie nouveaux sur les homographies dans les formes géométriques élémentaires de 1e espèce. Je ne m'appuie en général que sur les propriétés les plus élémentaires des homographies et des involutions, qu'on trouve par exemple dans la *Geometrie der Lage* de v. STAUDT. Ainsi j'exclus absolument de mes considérations les éléments imaginaires (1). J'introduis les symboles de la théorie des opérations (et en particulier des substitutions) pour les homographies, avec le seul but d'abréger le langage ; mais on pourrait immédiatement, si on le voulait, ôter ces symboles, et remplacer quelques petits calculs où ils entrent par des raisonnements qui les exprimeraient en paroles. Les homographies peuvent dans la plupart des propositions être considérées entre deux formes géométriques différentes, tandis que dans quelques-unes il faut qu'elles soient entre les éléments d'une même forme : le lecteur s'en apercevra lui-même sans que je m'arrête chaque fois à le dire. Il remarquera aussi que pour tous les problèmes du 1er degré que nous rencontrerons, les constructions auxquelles nous parviendrons sont linéaires. Il excusera d'ailleurs, à cause de la simplicité de l'objet du travail, une certaine concision dans les démonstrations.

---

(1) Cependant les recherches que j'expose ici ont plusieurs points de contact avec un travail sur la théorie des éléments imaginaires, écrit peu avant celui-ci, et ayant pour titre : *Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica.* (Mem. Acc. Torino, (2) 38, 1886, pp. 3-24 [V. queste « Opere », II, pp. 208-236]).

1. Si deux homographies P, Q sont telles qu'à deux certains éléments différents a, b correspondent dans P les éléments a', b' et dans Q les mêmes éléments en ordre inverse, c'est-à-dire b', a', alors l'homographie PQ^{-1} (2) fera correspondre a et b en sens double et sera par suite une involution. Donc si on nomme mm' un couple quelconque d'éléments correspondants de P et si mn', nm' sont deux couples de Q (de sorte que mn sera un couple de cette involution PQ^{-1}), il s'ensuit que nn' sera un autre couple de P. On caractérise la relation entre ces deux homographies P, Q en disant que PQ^{-1} est une involution, c'est-à-dire est égale à son inverse QP^{-1}, d'où il suit immédiatement que $P^{-1}Q$ et $Q^{-1}P$ sont égales, c'est-à-dire sont une involution; ou bien aussi en disant que l'une quelconque des deux homographies P, Q est le produit de l'autre et d'une involution, ou bien d'une involution et de l'autre. Nous nommerons *harmoniques* deux homographies P, Q qui soient ainsi liées (3).

Il suit évidemment de cette définition que si P, Q sont harmoniques, leurs inverses P^{-1}, Q^{-1} le seront aussi, de même que PR et QR (ou bien RP et RQ), où R indique une homographie quelconque.

Une involution est une homographie harmonique à l'identité.

Si une homographie est *singulière* et a, a' sont ses éléments *singuliers*, ses homographies harmoniques seront celles contenant le couple aa' d'éléments correspondants. Mais nous exclurons en général les homographies singulières.

---

(2) Le *produit* de deux ou plusieurs homographies indique celle qui résulte en les effectuant successivement dans l'ordre dans lequel on les *multiplie* (c'est-à-dire dans lequel on les écrit, de gauche à droite). Q^{-1} indique l'inverse de Q; de sorte que Q est une involution si $Q^{-1} = Q$. L'inverse d'un produit d'homographies est évidemment le produit des inverses de celles-ci prises dans l'ordre contraire.

(3) M. C. STÉPHANOS dans son *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace etc.* publié dans le t. XXII des Math. Ann. a aussi fait un usage continuel des notations que nous employons pour les homographies: il est même, si je ne me trompe, le premier qui en ait fait un si large usage. Il a aussi considéré (p. 320) les homographies que j'appelle *harmoniques* et qui sont caractérisées analytiquement par ce que leur invariant simultané bilinéaire s'annule; mais il s'est borné à montrer qu'une homographie harmonique à une autre est le produit de celle-ci par une involution. Sa méthode d'étudier les homographies au moyen de leur représentation par les points de l'espace pourrait aussi servir à trouver nos résultats, mais en supposant des connaissances sur lesquelles je ne voulais pas m'appuyer.

2. Nous pouvons résoudre dès à-présent deux problèmes sur la construction des homographies harmoniques à des homographies données. Pour cela remarquons que si une homographie P doit être harmonique à une homographie donnée Q et contenir en outre un couple donné aa' d'éléments correspondants, on en connaîtra par cela-même en général un autre couple; car si b' est le correspondant de a dans Q et b le correspondant de a' dans Q^{-1}, P devra aussi contenir le couple bb'. Cependant si aa' était un couple de Q, le nouveau couple bb' de P coïnciderait avec lui.

Maintenant si on donne deux couples aa', bb' d'une homographie P harmonique à l'homographie donnée Q, si ces couples ne sont pas conséquence l'un de l'autre (c'est-à-dire si Q ne contient pas les couples ab', ba'), P sera parfaitement déterminée. En effet on en aura en général immédiatement un autre couple, conséquence de l'un de ces deux; et s'il arrivait que aa', bb' fussent deux couples de Q, de sorte qu'on ne pourrait plus en tirer immédiatement un autre pour P, alors il est évident que l'involution PQ^{-1} devrait être celle dont a, b sont les éléments doubles et que réciproquement, en multipliant l'involution d'éléments doubles a, b par Q, on aurait l'homographie cherchée P.

Si pour P on donne deux homographies Q, R auxquelles elle doit être harmonique et un couple d'éléments correspondants aa', P sera en général déterminée. Car si ce couple n'est pas un couple commun à Q, R, il donnera avec l'une de celles-ci un nouveau couple de P et alors P sera en général parfaitement déterminée (problème précédent) par deux de ses couples et une homographie qui lui est harmonique (on voit aussi quel est le cas exceptionnel d'indétermination). Si au contraire aa' est un couple d'éléments correspondants dans Q et R, l'homographie singulière dont a et a' sont les éléments singuliers satisfera au problème: on verra plus tard dans quel cas celui-ci est aussi satisfait par des homographies (∞) non singulières. Et on verra aussi, vers la fin de cette Note, la construction de l'homographie harmonique à trois données.

3. Si de deux homographies harmoniques P, I l'une I est une involution, on aura (n^0 1) $PI = IP^{-1}$, d'où $IPI = P^{-1}$, ce qui exprime que P sera transformée par l'involution I qui lui est harmonique dans son inverse P^{-1}; et réciproquement.

Si aa', bb', cc', ... sont des couples d'éléments correspondants de P, les involutions harmoniques à P seront (ab', ba'), (ac', ca'), (bc', cb'),... . En donnant un couple d'éléments d'une involution harmonique à P, cette involution est déterminée, pourvu que ce couple ne se compose pas des éléments doubles de P. Cela résulte de la construction (n^0 2) de l'homographie harmonique à une donnée et ayant deux couples donnés ; et l'exception (à laquelle porte cette construction) s'explique par ce fait que, comme les ∞ involutions harmoniques à P la transforment dans son inverse, elles doivent *toutes*, lorsque P a des éléments doubles, les échanger entre eux, c'est-à-dire les avoir pour éléments conjugués.

4. En supposant plus en particulier encore que les deux homographies harmoniques soient toutes les deux des involutions, nous avons (comme cas particulier du n^0 3 ou du n^0 1) que deux involutions harmoniques I, I_1 sont caractérisées par ce que chacune d'elles est transformée en elle-même par l'autre, ou, ce qui est la même chose, qu'elles sont *échangeables,* c'est-à-dire que leur produit est une involution [4]. Cette involution I_2 sera d'ailleurs elle aussi harmonique à I et I_1, car en posant $II_1 = I_1I = I_2$ on en tire $II_2 = I_1$ et $I_1I_2 = I$. On voit aussi tout cela en faisant usage seulement de la première définition d'homographies harmoniques ; car si (ab, cd) est l'involution I et ac est un couple de l'involution I_1 harmonique à I, db en sera un autre couple, c'est-à-dire I_1 sera (ac, db), et le produit de I, I_1 dans un ordre quelconque sera l'involution $I_2(ad, bc)$ évidemment harmonique à I et I_1.

Si de deux involutions harmoniques l'une est hyperbolique (ou parabolique), ses éléments doubles seront conjugués dans l'autre. D'ailleurs deux involutions harmoniques ne peuvent pas être elliptiques toutes les deux, puisque, si les couples ab, cd se séparent, les couples ac, db ne peuvent plus se séparer.

Il y a toujours une involution déterminée harmonique à deux involutions données. Car si celles-ci ne sont pas hyperboliques toutes les deux, on sait qu'elles auront commun un couple d'éléments conjugués et ceux-ci seront les éléments doubles de l'involution cherchée. Et si elles sont hyperboliques toutes les deux, l'involution qui contient leurs couples d'éléments doubles sera celle dont il s'agit.

---

(4) Il est bon de rappeler cette proposition presque évidente, que si P, Q sont deux correspondances uniformes quelconques, c'est la même chose de dire : que P est transformée en soi-même par Q ; ou que Q est transformée en soi-même par P ; ou enfin que P, Q sont *échangeables*, c'est-à-dire que $PQ = QP$.

5. Une involution quelconque est transformée en soi-même soit par elle-même, soit par toutes les involutions qui lui sont harmoniques. Voyons maintenant si une homographie non involutive P a une involution qui la transforme en elle-même, c'est-à-dire qui lui soit échangeable.

Remarquons avant tout que si deux éléments quelconques a, α ont pour correspondants dans $P\,a'$, α' et dans $P^{-1}\,a_1$, α_1, on aura

$$a\alpha a_1\alpha_1 \overline{\wedge}\, a'\alpha' a\alpha \overline{\wedge}\, a\alpha a'\alpha',$$

d'où

$$a\alpha a_1 a' \overline{\wedge}\, a\alpha\alpha_1\alpha'. \tag{1}$$

Or supposons qu'il existe une involution I échangeable à P, et soit α le conjugué de a dans I: alors $a'\alpha'$ et $a_1\alpha_1$ seront aussi des couples d'éléments conjugués de I; donc

$$a\alpha\alpha_1\alpha' \overline{\wedge}\, \alpha a a_1 a', \tag{2}$$

et en comparant avec (1)

$$a\alpha a_1 a' \overline{\wedge}\, \alpha a a_1 a', \tag{3}$$

c'est-à-dire α sera le conjugué harmonique de a par rapport à a_1a'. Donc s'il existe une involution échangeable à P, il n'y en a qu'une seule ; car dans une telle involution, pour obtenir le conjugué α de chaque élément a, on a une construction qui, au moyen de P, le détermine parfaitement.

Inversement, tout en laissant pour a un élément quelconque, supposons dans (1) que α soit le conjugué harmonique de a par rapport à a_1a', c'est-à-dire qu'on ait la relation (3) : celle-ci comparée avec (1) donnera (2), qui prouve l'existence d'une involution ($a\alpha$, $a_1\alpha_1$, $a'\alpha'$), involution évidemment échangeable à P. Ainsi nous concluons :

Etant donnée une homographie quelconque P, *si de chaque élément on construit le conjugué harmonique par rapport aux deux éléments qui lui correspondent dans* P *et dans son inverse, on aura le conjugué du premier élément dans une involution bien déterminée* I, *qui coïncide avec* P *si celle-ci est une involution, et qui dans le cas contraire est la seule involution qui soit échangeable à* P.

Si P a des éléments doubles x, y différents ou coïncidents, l'existence de cette involution peut être établie plus facilement ; car on sait qu'alors (xy, aa, a_1a') sera une involution, et par suite le conjugué harmonique α de a par rapport à $a_1 a'$ sera aussi son conjugué dans l'involution ayant x, y pour éléments doubles. Pour le cas où xy coïncident (le seul pour lequel dans l'énoncé précédent nous n'excluons pas les involutions paraboliques) cette nouvelle démonstration est indispensable, car la première suppose que l'involution I ne soit pas parabolique.

Nous nommerons toujours I *l'involution double* de P (5). Si l'une des deux P, I a des éléments doubles, on voit immédiatement que l'autre les aura aussi pour éléments doubles.

6. Les involutions harmoniques à P la transforment (n⁰ 3) en P^{-1}; mais P et P^{-1} ont évidemment une même involution double I: donc ces involutions transforment I en elle-même. Ainsi: *les involutions harmoniques à une homographie sont aussi harmoniques à son involution double.* Les involutions harmoniques à P sont d'ailleurs *toutes* celles harmoniques à I, car une involution harmonique à P (aussi bien qu'une involution harmonique à I) est complètement déterminée par un couple quelconque d'éléments (n⁰ 3).

7. *Une homographie est déterminée par son involution double* I *et un couple d'éléments correspondants* aa': car si $\alpha\alpha'$ sont les conjugués de ceux-ci dans I et on construit a_1 tel que $a\alpha a_1 a'$ soit harmonique, l'homographie cherchée devra avoir pour couples d'éléments correspondants $a_1 a$, aa', $\alpha\alpha'$; et inversement l'homographie déterminée par ces couples aura I pour involution double.

Il y a donc une infinité d'homographies ayant une involution double donnée I: ce système d'homographies jouit de propriétés importantes.

La condition pour que deux homographies qui ne soient pas toutes les deux des involutions, soient échangeables est qu'elles aient une même involution double. Cette condition est nécessaire, car l'une des deux homographies, qui ne soit pas involutive, laissera invariable l'autre et par suite son involution double. Elle est aussi suffisante, c'est-à-dire si P, P_1 ont une même involution double I et a', a_1 sont les correspondants d'un élément quelconque a respectivement dans P,P_1, et

(5) Évidemment l'involution harmonique à deux involutions données I_1, I_2 est l'involution double du produit de celles-ci $I_1 I_2$: cela en donne une construction *linéaire* au moyen de I_1 et I_2.

a'', a_1' leurs correspondants respectivement dans P_1, P, ces deux derniers éléments coïncideront : car les involutions (a_1a', aa_1'), (a_1a', aa''), harmoniques respectivement à P, P_1, seront aussi (n^0 6) harmoniques à I et ayant en outre un couple commun (qui n'est pas le couple d'éléments doubles de I) devront coïncider.

De cette propriété des homographies ayant une même involution double, d'être échangeables entre elles, on tire immédiatement cette autre : *Si dans les* ∞ *homographies* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ *qui ont une involution double donnée* I, *on prend de deux éléments quelconques* a *et* b *les correspondants* $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 \ldots$ et $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 \ldots$, *on aura*

$$aa_1a_2a_3 \ldots \barwedge bb_1b_2b_3 \ldots .$$

En effet cette relation représente l'homographie ayant I pour involution double et le couple ab d'éléments correspondants ; car comme cette homographie-ci est échangeable à P_i, elle aura $a_i b_i$ pour éléments correspondants. En remarquant que dans ce système d'homographies celles-ci sont deux-à-deux inverses l'une de l'autre, il s'ensuit que pour avoir toutes les homographies ayant commune avec une donnée P l'involution double, c'est-à-dire échangeables avec P, il suffit pour chaque élément a dont les correspondants dans P et P^{-1} sont a' et a_1, de construire l'élément a_i tel que le groupe $aa'a_1a_i$ soit projectif à un groupe fixe ; alors a_i sera le correspondant de a dans une de ces homographies ([6]).

Ajoutons enfin que, comme le produit de deux homographies échangeables P, Q est échangeable avec chacune d'elles (car $P(PQ) = P(QP) = (PQ)P$), il suit que le produit de deux ou plusieurs homographies ayant une même involution double a aussi cette même involution double.

([6]) La première démonstration synthétique de l'existence d'un système d'homographies échangeables à une homographie donnée et la construction que nous avons exposée de ce système au moyen de celle-ci sont dues à M. Pasch (*Beweis eines Satzes über projective Punktreihen*, t. 91 de ce Journal, p. 349). Cette construction est la généralisation de celle, que nous avons vue au n^0 5, de l'involution double d'une homographie, qui est due à M. Schroeter (ce Journal, t. 77, p. 120). Enfin la manière par laquelle dans ce n^0 7 nous avons obtenu les propriétés d'un système d'homographies ayant une même involution double est identique (bien que j'y sois arrivé indépendamment) à celle dont se sert M. H. Wiener dans sa *Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden* (Darmstadt, Brill, 1885) ; cependant ma démonstration du théorème fondamental du n^0 5 est tout-à-fait nouvelle et elle est, si je ne me trompe, la plus simple (synthétique) que l'on puisse en donner.

8. *Deux homographies quelconques* P, Q *ont toujours commun un couple d'involutions correspondantes ; elles en ont communs une infinité si elles sont harmoniques.* En effet, soit I une involution à laquelle corresponde soit par P soit par Q une même involution I' : alors par rapport à PQ^{-1} l'involution I correspondra à elle-même. Et inversement si une involution I correspond à soi-même par rapport à PQ^{-1}, il est bien évident que par rapport à Q et par rapport à P (qui est le produit de PQ^{-1} et Q) il lui correspondra une même involution I'. Donc si PQ^{-1} est une involution, c'est-à-dire si P, Q sont harmoniques, il y aura une infinité de couples I, I' d'involutions correspondantes communs à P, Q : les I seront l'involution PQ^{-1} et toutes celles qui lui sont harmoniques, et analoguement les I' seront $P^{-1}Q$ et celles qui lui sont harmoniques. Si au contraire P, Q ne sont pas harmoniques, I devra être l'involution double de l'homographie PQ^{-1} (ou de QP^{-1}) et analoguement I' sera l'involution double de $P^{-1}Q$ (ou de $Q^{-1}P$).

Quelles que soient P, Q, en indiquant par I, I' les involutions doubles de PQ^{-1} et de $P^{-1}Q$, on voit que si I et (en conséquence aussi) I' sont hyperboliques, en indiquant respectivement par $mn, m'n'$ leurs éléments doubles, P et Q auront communs deux couples d'éléments correspondants mm', nn'. Si au contraire I, I' sont elliptiques, P et Q n'auront pas de couples d'éléments correspondants communs. Si enfin I, I' sont paraboliques, c'est-à-dire l'homographie PQ^{-1} (ou $P^{-1}Q$) a un seul élément double, P et Q auront commun un seul couple : on peut dire alors que P et Q sont *tangentes* dans ce couple. (C'est seulement dans ce dernier cas que notre énoncé considère aussi les couples d'involutions correspondantes paraboliques).

9. Nous allons nous occuper inversement du système des homographies qui ont un couple donné d'involutions correspondantes I, I' de même espèce (hyperboliques ou elliptiques) et avant tout nous établirons qu'on détermine deux telles homographies si l'on en donne en outre un couple aa' d'éléments correspondants (7).

Nommons P une homographie satisfaisant à ces données et d'un élément b différent de a cherchons le correspondant b' dans P. Les

(7) On pourrait prouver cela un peu plus simplement en traitant séparément le cas où I, I' sont hyperboliques et celui où elles sont elliptiques. La démonstration que nous en verrons n'exige pas cette séparation et a en même temps l'avantage de donner la construction de l'élément correspondant à un élément quelconque dans l'homographie cherchée.

involutions données I, I' soient $I(aa_1, bb_1)$ et $I'(a'a'_1, b'b'_1)$: puisque P transforme I en I', dans P se correspondront non seulement a et a', b et b', mais aussi a_1 et a'_1, b_1 et b'_1, de sorte que

$$a'a'_1 b'b'_1 \barwedge aa_1bb_1 .$$

D'ailleurs, comme I, I' et a, b, a' sont donnés, a_1, b_1, a'_1 le seront aussi : donc dans cette relation les seuls éléments inconnus seront b', b'_1, éléments conjugués dans I', et cette relation prouve qu'ils se correspondent en outre dans une homographie S ayant $a'a'_1$ pour éléments doubles et bien déterminée. Or il existe deux couples différents d'éléments correspondants communs à S et I' ; c'est-à-dire SI', homographie (involutive, puisque S, I' sont harmoniques) dont les éléments doubles font partie de ces couples (n⁰ 8), a certainement deux éléments doubles différents : en effet, suivant que aa_1, bb_1 se séparent ou non, I' (qui est de même espèce que I) est une homographie entre formes concordantes ou opposées, et S entre formes opposées ou concordantes, de sorte que leur produit SI' sera toujours une homographie entre formes opposées ([8]). Ayant construit l'un $b'b'_1$ de ces couples communs à I et I', l'homographie déterminée par les couples d'éléments correspondants aa', bb', $a_1a'_1$, $(b_1b'_1)$ satisfera au problème. Celui-ci a donc toujours deux solutions.

10. Considérons toujours tout le système des ∞ (n⁰ 9) homographies qui ont un couple donné I, I' d'involutions (de même espèce) correspondantes. Si P, Q sont deux quelconques d'entre elles nous avons déjà remarqué (n⁰ 8) que PQ^{-1} (de même que QP^{-1}) transformera I en elle-même, c'est-à-dire ou 1⁰) elle aura I pour involution double, ou bien 2⁰) elle sera une involution harmonique à I ; et inversement, P étant donnée, si on prend une homographie Q de façon qu'elle soit liée à P par l'une ou l'autre de ces relations, par rapport à Q les I, I' seront correspondantes, c'est-à-dire Q appartiendra au système.

Or soient P_1, P_2 deux homographies du système liées à P par la première relation : P_1P^{-1} et PP_2^{-1} auront I pour involution double et en conséquence la même chose aura lieu pour leur produit $P_1P_2^{-1}$ (n⁰ 7). Au contraire soient Q_1, Q_2 liées à P par la 2ᵉ relation (har-

---

([8]) On a ainsi une démonstration nouvelle et très simple de la proposition que v. Staudt prouve au n⁰ 83 de ses *Beiträge zur Geometrie der Lage* au moyen des sections coniques.

moniques par suite à F) : alors comme les involutions Q_1P^{-1} et PQ_2^{-1} sont harmoniques à I, leur produit $Q_1Q_2^{-1}$ aura I pour involution double. Enfin si P_1, Q_1 sont avec P respectivement dans la 1e et la 2e relation, de sorte que P_1P^{-1} a I pour involution double et PQ_1^{-1} est une involution harmonique à I, cette PQ_1^{-1} sera aussi harmonique à P_1P^{-1} (n^0 6), et le produit de P_1P^{-1}, PQ_1^{-1}, c'est-à-dire $P_1Q_1^{-1}$, sera une involution, qui devant transformer I en elle-même, comme ses deux facteurs (et ne pouvant pas coïncider, comme on voit facilement, avec I même), sera harmonique à I. Nous avons donc la proposition suivante :

Les homographies ayant un couple donné I, I′ *d'involutions correspondantes (elliptiques ou hyperboliques) forment deux différents faisceaux. Deux homographies quelconques de même faisceau sont telles que le produit de l'une par l'inverse de l'autre a* I *pour involution double ; tandis que deux homographies de faisceaux différents sont harmoniques et donnent pour produit de l'une par l'inverse de l'autre une involution harmonique à* I.

Nous dirons ces deux faisceaux *harmoniques* l'un de l'autre.

11. Nous avons encore évidemment du n^0 précédent la proposition suivante:

Étant donnée une homographie P *et un de ses couples d'involutions correspondantes* I, I′, *on obtient les deux faisceaux d'homographies déterminés par ce couple* I, I′ *ainsi : celles de même faisceau avec* P *en multipliant les homographies qui ont* I *pour involution double par* P ; *celles de l'autre faisceau en multipliant les involutions harmoniques à* I *par* P.

Cette construction s'applique encore si I, I' sont paraboliques. Dans ce cas (exclus dans l'énoncé du n^0 10) le couple I, I', c'est-à-dire celui des éléments doubles (singuliers) m, m' de ces involutions, ne détermine plus les faisceaux ; mais, en donnant en outre une homographie P dans laquelle I, I', c'est-à-dire m, m', se correspondent, on a par cette construction respectivement un faisceau contenant P et composé des homographies tangentes à celle-ci et entre elles dans le couple mm' (v. la fin du n^0 8), et un autre faisceau harmonique à celui-ci et composé de même d'homographies tangentes entre elles dans le couple mm'. D'ailleurs entre ces deux faisceaux passent encore les mêmes relations qu'en général entre deux faisceaux harmoniques, car les raisonnements du n^0 10 valent encore parfaitement.

Si I, I' sont hyperboliques et mn, $m'n'$ sont respectivement leurs éléments doubles, les deux faisceaux harmoniques se composent respectivement des homographies contenant les couples d'éléments correspondants mm', nn' et de celles contenant les couples mn', nm' ; cela en simplifie l'étude. Le cas précédent, où I, I' sont paraboliques, pourrait en suivre comme limite, en faisant coïncider n, n' respectivement avec m, m'.

Deux homographies quelconques P, Q *déterminent toujours parfaitement un faisceau qui les contient*, car (n^0 8) elles ont toujours commun un certain couple d'involutions correspondantes I, I' tel que PQ^{-1} a I pour involution double. Lorsque P et Q sont données, ce faisceau se construit linéairement en multipliant les différentes homographies qui ont avec PQ^{-1} la même involution double I par P; par exemple on aura ainsi immédiatement l'homographie de ce faisceau qui a un couple donné d'éléments correspondants.

Remarquons enfin qu'en supposant que I, I' coïncident on a que les deux faisceaux harmoniques particuliers qui transforment une involution I en elle-même se composent l'un des homographies ayant I pour involution double, et l'autre des involutions harmoniques à I.

12. Du fait que les homographies d'un faisceau se construisent en multipliant les homographies ayant une certaine involution double par une même homographie (n^0 11), on tire immédiatement, en se servant d'une proposition du n^0 7 :

La série des éléments $a_1 a_2 a_3 \dots$ *qui correspondent à un même élément* a *dans les* ∞ *homographies* $P_1, P_2, P_3, \dots$ *d'un faisceau quelconque, reste projective à elle-même en variant* a.

En particulier en prenant pour ce faisceau le faisceau des involutions harmoniques à une involution donnée, l'on a une proposition connue, qu'on pouvait aussi établir directement [9].

Ce théorème général donne une forme plus simple pour la construction linéaire exposée au n^0 précédent des homographies du faisceau déterminé par deux homographies quelconques données P, Q. Remarquons en effet que $PQ^{-1}P$ est une homographie de ce faisceau, car elle s'obtient en multipliant PQ^{-1} (dont l'involution double a une même correspondante dans tout le faisceau) par P (v. n^0 11). Donc si pour chaque élément a on trouve les correspondants a', a'' et a''' dans P, Q et $PQ^{-1}P$, et on construit a_i de façon que le groupe $a'a''a'''a_i$ soit projectif à un groupe fixe, a_i sera le correspondant de

(9) Voir aussi le travail cité de M. H. WIENER, p. 39.

a dans une homographie du faisceau: et on obtient ainsi toutes les homographies du faisceau en variant le groupe fixe. Cependant cette nouvelle construction suppose que P et Q ne soient pas harmoniques, car autrement $PQ^{-1}P$ coïnciderait avec Q.

En donnant pour une homographie un couple d'involutions correspondantes (elliptiques ou hyperboliques) I, I' et un couple d'éléments correspondants, sa construction était (n^0 9) un problème toujours possible du 2^e degré. Maintenant nous voyons en outre que si l'on indique lequel des 2 faisceaux déterminés par le couple I, I' on veut considérer, en donnant une homographie de ce faisceau, le problème devient linéaire, et nous en avons la solution.

13. Étant données deux homographies P, Q, toutes celles qui sont dans le faisceau harmonique au faisceau contenant P, Q sont harmoniques à celles-ci; et elles sont les seules homographies harmoniques à ces deux, car une homographie de ce premier faisceau, de même qu'une homographie harmonique à P, Q (n^0 2) est parfaitement déterminée par un couple d'éléments correspondants. Donc *les homographies harmoniques à deux homographies sont aussi harmoniques à tout le faisceau qui contient celles-ci et forment le faisceau harmonique à celui-ci* [10].

Parmi les homographies harmoniques à P, Q il y en a une seule qui soit une involution: l'involution harmonique aux involutions doubles de P, Q (et seulement lorsque ces involutions doubles coïncident il y a tout un faisceau d'involutions harmoniques à P, Q). Donc, *dans chaque faisceau d'homographies il y a en général une involution déterminée.*

En considérant deux faisceaux harmoniques nous obtenons ainsi:

Les involutions doubles des homographies d'un faisceau forment elles-mêmes un faisceau, étant harmoniques à l'involution contenue dans le faisceau d'homographies harmonique à celui là.

---

[10] De là et du n^0 11 il suit que pour qu'il y ait une homographie non singulière harmonique à deux homographies données P, Q et contenant un couple d'éléments correspondants mm' commun à celles-ci, il faut que P, Q soient tangentes dans ce couple: alors chaque homographie du faisceau harmonique à celui déterminé par P, Q satisfait aux conditions données. Cela comble une lacune qui était restée vers la fin du n^0 2. Il suit aussi de la proposition ci-dessus et d'une remarque faite au n^0 1 que: *en multipliant les homographies d'un faisceau par une homographie quelconque (ou inversement), l'on obtient de nouveau les homographies d'un faisceau.*

Il y a en général deux involutions mutuellement harmoniques qui transforment l'une dans l'autre deux involutions données.

14. Considérons un faisceau d'homographies ayant commun le couple d'involutions correspondantes I, I' ; soient P, Q deux de ses homographies et soit R une homographie non involutive échangeable à I, c'est-à-dire ayant I pour involution double. Comme QP^{-1} aura aussi I pour involution double et par suite ne changera pas R (n^0 7), les deux homographies P et (le produit de QP^{-1} et P, c'est-à-dire) Q transformeront R dans une même homographie R' (ayant I' pour involution double). Ainsi : *toutes les homographies du faisceau ont communs* ∞ *couples* R, R′ *d'homographies correspondantes : les* R *sont les homographies ayant* I *pour involution double, les* R' *sont celles ayant* I' *pour involution double.* On prouve en outre par un raisonnement analogue (en supposant seulement que P, Q appartiennent respectivement aux deux faisceaux harmoniques déterminés par les involutions correspondantes I, I') que : *d'un couple d'homographies correspondantes commun aux homographies d'un faisceau on obtient un couple commun aux homographies du faisceau harmonique en remplaçant l'une des deux homographies par son inverse.*

Inversement *toutes les homographies qui transforment l'une dans l'autre deux homographies projectives non involutives* R, R′ *forment un faisceau.* Nous disons que les deux homographies R, R' sont *projectives* lorsqu'il y a une homographie P qui transforme R en R'. Or ce que nous avons dit au commencement de ce n^0 sert aussi à prouver que dans ce cas on obtient ∞ homographies Q, qui sont toutes celles qui transforment R en R', en multipliant les homographies échangeables à R par P : ce qui donne bien un faisceau d'homographies (n^0 11).

15. Au moyen de la notion du faisceau d'homographies nous pouvons résoudre le problème linéaire le plus général que l'on puisse poser sur les homographies, c'est-à-dire : *construire une homographie harmonique à trois homographies données* P, Q, R. L'homographie cherchée devra appartenir au faisceau harmonique à celui qui contient P et Q : donc si I, I' est le couple d'involutions correspondantes commun à P et Q (et il suffira de construire I), l'homographie cherchée sera représentable par I_1P, I_1 étant une involution inconnue harmonique à I. Il faut encore, et il suffit, que I_1P soit harmonique à R, c'est-à-dire, en multipliant par P^{-1}, ce qui n'altère pas l'harmonie (n^0 1), que I_1 soit harmonique à RP^{-1}. En général il y aura

donc une seule solution : on construira I_1 harmonique à I (involution double de QP^{-1}) et à l'involution double de RP^{-1}, et l'homographie $I_1 P$ sera celle cherchée. Le problème sera indéterminé si I est l'involution double de RP^{-1}, c'est-à-dire si R appartient au faisceau de P, Q ; ce qui est bien naturel.

On pourrait encore continuer ces recherches : il y aurait par exemple à étudier les homographies qui sont tangentes à des homographies données (ainsi on costruirait facilement les homographies d'un faisceau qui sont tangentes à une homographie donnée), etc. Mais nous nous arrêterons là.

16. Seulement, pour finir, nous ferons remarquer comment notre théorie trouve une application intéressante dans la démonstration des propriétés de l'*hexagramme de* PASCAL.

Lorsque cette théorie s'applique aux homographies dans les séries de points d'une conique, on voit tout-de-suite que l'axe d'une homographie est aussi axe pour toutes les homographies ayant la même involution double et en particulier pour cette involution double ; et que les axes (ou les pôles) de deux involutions harmoniques sont conjugués par rapport à la conique. De là il suit (n^0 13) que les axes des homographies d'un faisceau forment un faisceau (si ce faisceau d'homographies n'a pas une involution double fixe) ; et que deux faisceaux harmoniques d'homographies ont pour axes les droites de deux faisceaux dont les centres sont conjugués par rapport à la conique.

Maintenant soient 1 2 3 4 5 6 six points d'une conique. L'homographie déterminée entre les points de la conique par les couples d'éléments correspondants (14, 36, 52), par exemple, a pour axe la droite de PASCAL de l'hexagone simple 1 2 3 4 5 6 : l'étude de la configuration formée par les 60 droites de PASCAL est ainsi contenue dans celle des relations entre les 60 homographies déterminées par les six points divisés en couples. Considérons les deux ternes d'homographies :

(4) (14, 36, 52) ; (16, 32, 54) ; (12, 34, 56) ;

(5) (14, 32, 56) ; (12, 36, 54) ; (16, 34, 52).

Il est bien visible (n^0 1) que chacune des (4) est harmonique avec chacune des (5). Donc ces deux ternes appartiennent respectivement à deux faisceaux harmoniques d'homographies. Ainsi les 3 droites de

PASCAL représentées par (4) passent par un même point et celles représentées par (5) par un autre point conjugué de celui-là par rapport à la conique. On trouve ainsi les 10 couples de points conjugués de STEINER.

On prouve aussi facilement que les homographies

(16, 52, 43); (21, 54, 36); (14, 32, 65)

appartiennent à un même faisceau harmonique à la

(12, 34, 56).

On en tire l'existence des 60 points de KIRKMAN, et on a en même temps une proposition qui établit un nouveau lien géométrique entre ces points et les droites de PASCAL auxquelles on sait qu'ils correspondent. Etc. etc. ([11]).

Turin, le 27 Mars 1886.

([11]) On pourrait faire une autre espèce d'applications de notre théorie à celle des coniques en supposant que les homographies dont il s'agit soient entre deux faisceaux fixes de droites d'un même plan, et en faisant correspondre à chaque homographie entre ceux-ci la conique qu'ils engendrent. Alors à l'harmonie entre deux homographies correspond un lien particulier entre deux coniques (*orthogonalité* par rapport à deux points fixes de celles-ci comme *absolu*); aux faisceaux d'homographies correspondent des faisceaux de coniques, etc. En supposant au contraire que les homographies soient, par exemple, entre deux faisceaux fixes de plans, on aurait des propriétés, en partie nouvelles, des surfaces du 2e ordre.