Corrado Segre

Congetture intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-Euclidea

Atti della R. Acc. Scienze Torino, Vol. **38** (1902-03), p. 535–547

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 444–455

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_444>

LXXXIV.

CONGETTURE INTORNO ALLA INFLUENZA DI GIROLAMO SACCHERI SULLA FORMAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXXVIII, 1902-1903, pp. 535-547.

1. L'opera del SACCHERI « *Euclides ab omni naevo vindicatus*, etc. », pubblicata a Milano nel 1733, è ora universalmente apprezzata, dopo che E. BELTRAMI ebbe richiamata l'attenzione degli scienziati su di essa, facendone un'accurata analisi, e giustamente proclamando l'autore « *un precursore di* LEGENDRE *e di* LOBATSCHEWSKY » (1); e dopo che dell'opera stessa venne data una traduzione inglese da G. B. HALSTED (2), ed una tedesca da F. ENGEL e P. STÄCKEL in un volume di grandissima importanza (3). Tutti riconoscono ormai che con essa ha veramente principio la geometria non-euclidea: poichè in essa per la prima volta viene svolta una lunga serie di proposizioni, che hanno luogo, se si nega il postulato V d'EUCLIDE. E sebbene le ultime pagine, che intendono dimostrare l'assurdità della *ipotesi dell'angolo acuto*, siano errate, pure le prime 70 pag. (tolte poche frasi isolate), fino alla prop. 32 inclusa, costituiscono un insieme di logica e di acume geometrico che può dirsi

(1) Rend. Acc. Lincei, (4) 5, 1889.

(2) The American Mathematical Monthly, 1894 e seg.

(3) *Die Theorie der Parallellinien von* EUKLID *bis auf* GAUSS, Leipzig 1895. Nel seguito questo volume, arricchito dallo STÄCKEL con una gran copia di notizie storiche e critiche, alle quali dovremo attingere continuamente, sarà indicato per brevità con *P. Th.*

perfetto. Agli elogi che già ne furon fatti da tanti scrittori non occorre qui aggiunger altro! (4)

Il sig. STÄCKEL nella *P. Th.* pp. 38-39 osservava — e ricerche posteriori hanno vieppiù confermato — che il libro del SACCHERI è stato, subito dopo la sua pubblicazione, abbastanza diffuso. Lo si trovava in molte biblioteche, italiane e straniere; e si leggeva il suo titolo in varie altre opere del sec. 18^0 e della 1^a metà del 19^0, sebbene con giudizî quasi sempre superficiali od ingiusti (i tempi erano tutt'altro che maturi per apprezzare le ricerche non-euclidee!). Malgrado quella diffusione, vi è oggidì, nelle pubblicazioni relative alla storia della geometria non-euclidea, una certa tendenza, che non mi pare pienamente giustificata, a negare ogni influenza di quel libro sulla costituzione definitiva della geometria non-euclidea. Così F. ENGEL nel suo lavoro su LOBATSCHEFSKIJ (5), meraviglioso per l'accuratezza e per le fatiche ad esso dedicate, a p. 377 scrive:

« *Allerdings müssen wir gleich hinzufügen, dass* SACCHERI'*s und* LAMBERT'*s Arbeiten sehr bald in Vergessenheit geriethen und erst vor wenigen Jahren wieder entdeckt worden sind, sie scheinen daher auf keinen der spätern Entdecker der nichteuklidischen Geometrie Einfluss ausgeübt zu haben. Höchstens bei* GAUSS *ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass er das Buch von* SACCHERI *oder wenigstens die Abhandlung von* LAMBERT *gekannt hat, doch wissen wir darüber gar nichts* (6). TAURINUS *hatte zwar aus* CAMERER'*s Ausgabe der Euklidischen Elemente ersehen, dass* SACCHERI *und* LAMBERT *Untersuchungen über*

---

(4) In varie note della *P. Th.* è rilevato come il SACCHERI adoperi il *teorema dell'angolo esterno* di un triangolo (EUCLIDE, lib. 1^0, prop. 16), e quindi il postulato della retta infinita, anche quando tratta *l'ipotesi dell'angolo ottuso.* Ciò spiega come poi il SACCHERI giunga alla conclusione che questa ipotesi è assurda: allo stesso modo come, molto tempo dopo, LEGENDRE dimostrava, ammettendo il postulato della retta infinita, un fatto equivalente alla detta conclusione, cioè che la somma degli angoli di un triangolo non può superare due retti. Le accennate note della *P. Th.*, per es. a pp. 52 e 62, non vanno intese nel senso che i ragionamenti del dotto gesuita italiano pel caso della anzidetta ipotesi siano insufficienti o sbagliati! Essi ricorrono ad un postulato, *che non occorreva* per giungere a talune di quelle proposizioni, e che poi si rivela in contraddizione coll'ipotesi stessa. Ma ciò nondimeno son ragionamenti pienamente esatti!

(5) N. I. LOBATSCHEFSKIJ, *Zwei geometrische Abhandlungen*, Leipzig 1899.

(6) Su ciò si può ora dire qualcosa di più preciso: GAUSS ha *certamente* conosciuto l'esistenza delle ricerche di SACCHERI e di LAMBERT; poichè fra i libri da lui posseduti e annotati se n'è trovato uno (di LEHMANN, del 1829), nel quale si parla con lode speciale di quelle ricerche. V. STÄCKEL, FRANZ ADOLPH TAURINUS, Abhandlungen z. Gesch. d. Mathematik, t. 9, 1899, p. 399: v. p. 427.

die Parallelentheorie angestellt hatten, aber diese Untersuchungen selbst kannte er jedenfalls zu der Zeit nicht, wo er seine « Geometriae prima Elementa » schrieb; ähnlich wird es sich mit SCHWEIKART *verhalten haben.* LOBATSCHEFSKIJ *und* J. BOLYAI *endlich haben* SACCHERI *schwerlich jemals auch nur dem Namen nach gekannt, und von* LAMBERT*'s Parallelentheorie haben sie vermuthlich ebensowenig etwas erfahren* ».

Ora sulla parte principale di queste asserzioni mi pare si possano avere dei dubbi. Le congetture che si posson ragionevolmente fare condurrebbero a modificarle alquanto, attribuendo all'opera del SACCHERI una sensibile influenza, diretta od indiretta, sui posteriori scopritori della geometria non-euclidea. Esse portano ad augurare che, per decidere la questione, sian fatte delle ulteriori ricerche *locali*, nei manoscritti lasciati da quegli scienziati e fra i volumi che essi ebbero modo di consultare!

2. Una congettura che non parrà avventata è questa: che coloro, i quali nel campo delle parallele tentarono vie assolutamente nuove, abbian cercato, prima di esporsi al giudizio del pubblico, di conoscere quanto di più importante s'era fatto per dimostrare il postulato V! A tal fine un mezzo che si presentava spontaneo consisteva nel consultare una storia delle matematiche. Orbene vi erano (come pure è detto nella *P. Th.*) due tali storie, ben note ed apprezzate, nelle quali l'opera Saccheriana era nominata tra gli scritti su EUCLIDE: la *Historia matheseos* di J. C. HEILBRONNER pubblicata a Leipzig nel 1742; e il 1º vol. della *Histoire des mathématiques* di J. E. MONTUCLA pubblicato a Parigi nel 1758, e ivi ristampato in edizione accresciuta nel 1799. In questa *Histoire* (7), parlando di coloro che si occuparono di dimostrare l'assioma 11º d'EUCLIDE, MONTUCLA nominava soltanto cinque autori (8), e poi citava l'opera del P. SACCHERI. Come ho ricordato, la *Histoire* era molto diffusa. Il MONTUCLA era molto stimato, in Francia e fuori (9). Per mezzo di questa Storia l'indicazione dell'*Euclides ab omni naevo vindicatus* dev'esser passata sotto gli occhi di molti e molti! È egli probabile che, per esempio, LEGENDRE non abbia letto quelle pagine, e che,

(7) 1ª ed. p. 222; 2ª ed. pp. 209-210.

(8) TOLOMEO, PROCLO, NASSIREDDIN, CLAVIUS e WALLIS.

(9) Era stato nominato membro dell'Accademia di Berlino nel 1755, e poi dell'*Institut*, appena questo fu fondato. V. Biographie universelle, 30, Paris 1821, pp. 44-45.

occupandosi, come fece così a lungo, dal 1794 fino alla morte (1833), di dimostrare il post. V, non abbia tentato di conoscere quei pochi Autori citati dal MONTUCLA? Converrebbe che *a Parigi* si facessero delle ricerche per stabilire se LEGENDRE conobbe l'opera del SACCHERI (10).

3. Un altro scritto, di cui si fa cenno nella *P. Th.*, e *che può aver contribuito moltissimo a far conoscere quello Saccheriano, o almeno a divulgarne alcuni risultati essenziali,* è la dissertazione di G. S. KLÜGEL « *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* » (Gottinga, 1763) (11). In quest'opuscolo, che ha 30 pagine di testo, vengono analizzati poco meno che altrettanti lavori sulle parallele: ma l'analisi più lunga (di quasi 5 pag.) è quella dell'opera del SACCHERI!

Da prima enuncia brevemente il contenuto della prop. 1 e delle prop. 5, 6, 7 relative alla distinzione delle tre ipotesi dell'angolo retto, ottuso, acuto; e spiega come, colle prop. 11 e 12, si giunga a dedurre dalle prime due ipotesi la validità del post. V, e quindi che l'ipotesi dell'angolo ottuso distrugge se stessa.

Riguardo alle numerose proposizioni seguenti, per l'ipotesi dell'angolo acuto, il KLÜGEL fa varie critiche, non tutte giuste (12). Ma — ciò che più importa! — egli rileva ancora chiaramente: la prop. 23, la quale, nell'ipotesi dell'angolo acuto, stabilisce che tre casi posson presentare due rette complanari, cioè o ammettono una perpendicolare comune, o s'incontrano, oppure in un determinato verso si avvicinano sempre più; la prop. 25, da cui deriva che in

---

(10) Si sa che dai tentativi di LEGENDRE due teoremi risultarono dimostrati, i quali poi divennero notissimi, prendendo posto in molti trattati di geometria. Ma fu poi rilevato, per esempio nella Nota del BELTRAMI, e nella *P. Th.*, che essi erano già pienamente stabiliti nel libro del SACCHERI. Dopo ciò, non sembra giusto che quei due teoremi siano chiamati « *teoremi di* LEGENDRE », come ancora si fa da taluni, ad es. da M. DEHN nell'importante scritto « *Die* LEGENDRE'*schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* », Math. Ann., LIII, 1900.

(11) L'esemplare da me consultato appartiene alla Biblioteca Vittorio Emanuele di Roma, e proviene dalla Biblioteca privata di M. CHASLES.

(12) Già in principio della sua analisi era detto così: « *Facile vero est ad iudicandum, fieri non posse, quin humani aliquid patiatur, qui in demonstrando theoremate, quod notioni communi aequiparandum est, tantis ambagibus utitur, ut demonstratio plus quam 100 paginas impleat* ». E qui, a proposito delle proposizioni relative all'ipotesi dell'angolo acuto: « *In his plura superflua reperiuntur, omnia vero longe absunt ab ea elegantia, quae in demonstrationibus geometricis recte requiritur, cuiusque exempla optima veteres dederunt Geometrae* ». Etc.

questo 3⁰ caso la distanza fra le due rette (*parallele !*) diventa minore di qualsiasi lunghezza assegnata; infine la prop. 28, che, al diminuir di quella distanza, l'angolo acuto che essa fa colla retta da cui è calata (*angolo di parallelismo !*) cresce continuamente tendendo a un angolo retto.

Ognun vede che, se anche queste citazioni fatte dal KLÜGEL sono lungi dal rappresentare tutta la copia di risultati del SACCHERI, pure costituiscono già, da sè, una solida base per la geometria non-euclidea! Un ingegno potente, che, a quei tempi, si fosse messo a lavorare intorno al *vecchio enigma* delle parallele, leggendo le proposizioni citate poteva ben trovare in esse (se pur non ricorreva alla fonte prima, al libro di SACCHERI) un forte aiuto per costruire la nuova dottrina!

Molti anni dopo (1808) il KLÜGEL ebbe occasione di ritornare su quest'argomento nell'articolo relativo alle *parallele* del suo *Mathematisches Wörterbuch* (13). Ivi è di nuovo citata la sua dissertazione, e ad essa si rimanda (p. 739) per l'estratto relativo al libro del SACCHERI (14).

4. La dissertazione di KLÜGEL si trova pure citata e lodata nella *Theorie der Parallellinien* che J. H. LAMBERT scrisse (pare) nel 1766, ma non pubblicò mai, probabilmente perchè egli stesso non ne era soddisfatto (15). Oggidì è usanza di metterla insieme coll'opera del SACCHERI, quasi che fosse indipendente da questa: allo stesso

---

(13) 3er Theil, p. 727; pubblicato a Leipzig.

(14) In quell'art., a pp. 730-731, vi è un cenno contro la possibilità delle parallele non-euclidee (le quali, secondo KLÜGEL, dovrebbero riescire in pari tempo secanti e non-secanti!), che prova come il KLÜGEL non avesse ben capito quell'importante concetto del SACCHERI.

Ivi è pure citato (p. 739) un opuscolo del 1787 di « FRANCESCHINI », e questo stesso nome si ritrova nella *P. Th.* pp. 214 e 300. Si deve leggere invece « FRANCESCHINIS ».

Un altro matematico italiano, G. M. PAGNINI — che in una « *Theoria rectarum parallelarum* etc. (auctore J. M. P. C. P.) » pubblicata a Parma nel 1783, e poi in una supplementare « *Epistola ad* ... H. C. SALADINUM » (Parma 1794), ha dato parecchie pseudodimostrazioni del post. V, — parla nella *Epistola* (pp. 6 e 7) dell'opera del SACCHERI, enuncia la distinzione che questi fa delle tre ipotesi e come distrugga quella dell'angolo ottuso, maravigliando poi che impieghi 80 pag. a rigettare l'ipotesi dell'angolo acuto!

(15) LAMBERT morì nel 1777. Quel suo lavoro fu poi stampato nel 1786 nel Magazin für die reine und angewandte Mathematik di J. BERNOULLI e C. F. HINDENBURG; e riprodotto da STÄCKEL ed ENGEL nella *P. Th.*

modo, pare, come si mettono insieme LOBATSCHEFSKIJ e BOLYAI! Così si suol dire che « SACCHERI e LAMBERT avevan riconosciuto la possibilità di 3 ipotesi » ([16]). A me sembra che ciò non sia giusto: poichè LAMBERT aveva appreso dal *Conatuum* di KLÜGEL i teoremi del SACCHERI più sopra ricordati! Anzi: è probabile — come già avvertì, fra altri, M. SIMON — che il matematico svizzero abbia anche preso conoscenza diretta dell'opera del dotto italiano ([17]). Ora nelle prime due parti del lavoro di LAMBERT non vi è nulla di essenziale; importante sarebbe solo la 3ª, e questa procede in modo molto affine al libro di SACCHERI. Vi è la stessa distinzione delle tre ipotesi, e la trattazione di queste procede molto analogamente a quella di SACCHERI. Alcuni ragionamenti sono simili; in qualche questione LAMBERT ottiene qualcosa di più; ma varie proposizioni importanti che si trovano in quello mancano in questo. Chiunque si provi ad esporre, nell'ordine storico, la geometria non-euclidea, dopo che avrà esposto i principali teoremi del SACCHERI troverà in LAMBERT poco da aggiungere! ([18]).

([16]) V. ad es. S. LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, 3er Abschnitt, Leipzig 1893, p. x.

([17]) MAX SIMON, *Euclid und die sechs planimetrischen Bücher* (Abhandlungen zur Geschichte der Math., t. 11, 1901), p. 36: « *Aber* LAMBERT *wurde durch* KLÜGEL *wieder an die Parallelentheorie erinnert, bei* KLÜGEL *ist* SACCHERI *besprochen; das Werk* SACCHERI'*s war schon durch seine Stellung im Orden ein verbreitetes; es ist eigentlich stets erwähnt worden, ...* LAMBERT *lebte in Chur in engstem Zusammenhang mit der gelehrten Welt Churs, wo er den eigentlichen Grund zu seiner wissenschaftlichen Bedeutung gelegt hat; es wäre sehr unwahrscheinlich, dass in dieser speziell von jesuitischer Gelehrsamkeit durchtränkten Atmosphäre den* SACCHERI *nicht kennen gelernt hätte*».

Lo STÄCKEL nella *P. Th.* p. 143 aveva espresso l'opposto parere, senza giustificarlo.

([18]) Con ciò non intendo scemare il merito di LAMBERT, per quanto riguarda le intuizioni geniali rilevate dallo STÄCKEL nella *P. Th.* p. 145. Piuttosto mi permetto di aggiungere che forse qualcuno dei raffronti fatti a p. 144 della *P. Th.* fra SACCHERI e LAMBERT è favorevole a questo ultimo più del necessario. Così non mi pare esatto che la trattazione di LAMBERT dell'ipotesi dell'angolo ottuso sia «almeno in parte indipendente dal *teorema dell'angolo esterno* ». Mi sembra invece che, già al principio di quella trattazione, cioè nel § 53 che è fondamentale per tutto il seguito, si ammetta tacitamente quel teorema!

Nel § 57 di LAMBERT occorre una rettifica. Egli dovrebbe dimostrare che sono incompatibili le due disuguaglianze $AB > EF$, $GH > EF$; e invece pone subito, insieme con queste, la ipotesi non giustificata $AB > GH$ (colla quale si potrebbe procedere più semplicemente che là non sia fatto; poichè da quelle tre disuguaglianze ne seguono rispettivamente altre tre fra gli angoli in B, F, H, le quali risultan subito incompatibili), senz'avvertire che il suo ragionamento si applica anche nell'ipotesi contraria.

5. Sebbene il KLÜGEL poco abbia prodotto di originale, pure ai suoi tempi passava per uno dei maggiori matematici viventi ([19]). Dal 1760 al 1765 aveva studiato all'Università di Gottinga; e l'influenza di A. G. KAESTNER (1719-1800) lo aveva spinto a dedicarsi agli studi matematici; e sotto la guida del KAESTNER stesso aveva composto la sua dissertazione. Poi era divenuto professore nelle Università di Helmstedt e Halle, membro delle Accademie di Pietroburgo, Berlino, Gottinga e Francoforte.

Tanto la dissertazione quanto il vocabolario matematico dovettero diffondersi molto, specialmente in Germania, e venir consultati da coloro che si occupavano della teoria delle parallele: la quale a quei tempi, e poi per tutta la 1ª metà del secolo 19⁰, era, per così dire, all'ordine del giorno in tutto il mondo scientifico ([20]).

A Gottinga in particolare il ricordo del *Conatuum* di KLÜGEL sarà durato a lungo. Il KAESTNER insegnò ivi fino alla morte, ed era insegnante efficacissimo. Egli s'era sempre interessato in modo speciale alla teoria delle parallele; anzi era stato lui, coi suoi scritti e colle sue lezioni, a risvegliare in Germania l'interesse per quell'argomento ([21]); ed aveva raccolto nella sua biblioteca quasi tutto ciò che intorno ad esso era stato pubblicato fin verso il 1770 ([22]). Inoltre vi era a Gottinga, dal 1789 al 1804, un altro ottimo conoscitore delle ricerche sulla teoria delle parallele: K. F. SEYFFER (1762-1822), professore di astronomia e direttore dell'osservatorio astronomico ([23]). Se, verso la fine del secolo 18⁰, un giovane intelligente che studiasse in quell'Università veniva a parlare di quella teoria col KAESTNER o col SEYFFER, niun dubbio che costoro gli avrebbero subito indicato il lavoro di KLÜGEL, come pure quello, da poco comparso, di LAMBERT! ([24]). E se pure nè l'un professore nè l'altro

---

([19]) Allgemeine Deutsche Biographie, Bd. 16, Leipzig 1882, p. 253.

([20]) *P. Th.*, pp. 147 e 211.

([21]) *P. Th.*, p. 139 « ... *und zwar war es* A. G. KAESTNER *der die Wichtigkeit der Untersuchungen über die fünfte Forderung erkannte, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen Gegenstand lenkte und damit eine Bewegung einleitete, die erst in diesem Jahrhunderte ihren Abschluss gefunden hat.* »

([22]) *P. Th.*, p. 140.

([23]) *P. Th.*, pp. 214-215.

([24]) È forse superfluo avvertire che nella biblioteca di Gottinga si trovava sia la dissertazione di KLÜGEL, sia (man mano che usciva) il *Magazin* in cui comparve la *Theorie* di LAMBERT (il SIMON, loc. cit., chiama quel *Magazin* « *das angesehenste deutsche wissenschaftliche Journal der Zeit* »). — Quanto all'opera del SACCHERI, già in *P. Th.*, p. 38, è detto che essa si trovava in quella biblioteca fin dal 1770.

non indicava anche allo studente il libro del SACCHERI, la dissertazione di KLÜGEL poteva servire per dare quell'indicazione: ed il giovane poteva poi consultare quel libro nella biblioteca universitaria!

6. Queste considerazioni si possono applicare anzitutto a GAUSS ed a WOLFANGO BOLYAI, i quali studiarono appunto nell'Università di Gottinga, il 1° dal 1795 al 1798, l'altro dal 1796 al 1799. È notissimo che essi strinsero colà una profonda amicizia; e che entrambi in quegli anni si occuparono delle parallele (25). I sig.i STÄCKEL ed ENGEL (nel lavoro ora citato in nota) rilevano appunto la spinta che a W. BOLYAI può esser stata data per occuparsi di ciò, più che dal vecchio KAESTNER, dal giovane professore SEYFFER, con cui BOLYAI aveva relazioni amichevoli. La stessa cosa vale per GAUSS. Gli studî astronomici e geodetici di questo dovevan metterlo in speciale relazione col SEYFFER. E del resto, secondo narra GIOVANNI BOLYAI (26), suo padre e GAUSS si conobbero appunto in casa di SEYFFER, e poco dopo presero a parlare insieme dell'assioma 11°. Quindi è naturale il supporre che in quegli anni i due valorosi studenti abbian conosciuto le cose del SACCHERI, in tutto od in parte! (27).

---

(25) V. p. es. STÄCKEL-ENGEL: GAUSS, *die beiden* BOLYAI *und die nichteuklidische Geometrie*, Math. Ann., 49, 1897, p. 149.

(26) STÄCKEL, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch* JOHANN BOLYAI, Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, 17, 1901, p. 10.

(27) Per quel che riguarda GAUSS non si vede, in ciò che di lui fu pubblicato finora, nulla che contraddica a questa supposizione. Così l'accenno al triangolo di area massima, contenuto nella lettera di GAUSS a W. BOLYAI 16 dicembre 1799 (Math. Ann., 49, p. 157, oppure *P. Th.*, p. 219), può essere un frutto delle meditazioni sulle parallele di SACCHERI (che permettono di concludere l'esistenza di triangoli coi 3 vertici all'infinito) e sulle aree triangolari di LAMBERT.

Il fatto che GAUSS, in quella lettera e in altre posteriori relative alla geometria non-euclidea, non nomini mai nè SACCHERI, nè LAMBERT non prova nulla contro la suddetta supposizione: poichè quei nomi non si trovano nemmeno nelle lettere di GAUSS finora pubblicate, posteriori al 1829, e quindi appartenenti a un'epoca in cui GAUSS conosceva certamente (n° 1) l'esistenza dei lavori di quei due scienziati!

Si confrontino poi — come già è stato fatto, ad esempio dal sig. STÄCKEL a p. 409 dell'articolo citato su TAURINUS, — le seguenti parole che (nella *Theorie der Parallellinien* § 80; *P. Th.*, p 200) LAMBERT scriveva, dopo d'aver dedotto dall'ipotesi non-euclidea l'esistenza di una *misura assoluta per le lunghezze: « Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch abdringt, die dritte Hypothese möchte doch wahr seyn!»* — si confrontino, dico, con queste altre che GAUSS scriveva a TAURINUS l'8 novembre 1824, dopo d'aver rilevato egli pure che l'ipotesi

Quanto a W. BOLYAI in particolare, si potrebbe dedurre che egli ha veramente preso cognizione di quanto s'era fatto prima di lui intorno alle parallele — o almeno di ciò che egli aveva, per così dire, a portata di mano — dal modo come scriveva nel 1820 al figlio, per dissuaderlo dall'occuparsi di quell'argomento. « *Versuche die Parallelen auch Du nicht... Ich kenne alle Wege bis ans Ende; ich habe keine Idee angetroffen, die ich nicht schon bearbeitet hätte... Ich lieferte weit Besseres, als bis dahin geleistet wurde...* » ; ed altre frasi analoghe (28). D'altronde si sa che WOLFANGO istruì egli stesso il figlio nella matematica, e richiamò la sua attenzione sulle lacune esistenti nella teoria delle parallele. « *Einst äusserte er, derjenige, der einen Beweis für das elfte Axiom fände, verdiente einen Diamanten, so gross als der Erdball. Ein anderes Mal: dem dieses einst gelingen wird, setzt, Sterbliche, ihm ein ewiges Denkmal* ». Così accadde — scriveva, molto tempo dopo, il figlio — che questi, « *durch die ganz eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt* », dal 1817 in poi fece della teoria delle parallele la sua *occupazione prediletta* (29). Da ciò, e particolarmente dalle frasi citate, si può arguire che WOLFANGO non si sarà limitato col figlio a poche parole su quella teoria! Nulla esclude invece che gli abbia comunicato alcune delle cose che egli stesso può aver serbato in mente dalla lettura di SACCHERI, o di KLÜGEL, o di LAMBERT! (30).

---

non-euclidea conduce all'esistenza di una lunghezza assoluta (*P. Th.*, p. 250): « *Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäussert, dass die Euclidische Geometrie nicht die Wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Maass a priori haben würden.* » Non si direbbe che su GAUSS agisse inconsciamente un lontano ricordo delle parole di LAMBERT?

(28) STÄCKEL, *Die Entdeckung* u. s. w., pp. 3, 4. — Nella stessa lettera (p. 3) W. BOLYAI nominava la teoria delle parallele come un « *Flecken der Geometrie* »: frase che ricorda il titolo del libro di SACCHERI, come rileva L. SCHLESINGER nella Festrede: JOHANN BOLYAI, Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung, 12, 1903, p. 166.

Nel *Tentamen* di W. BOLYAI dove si parla dell'assioma XI, non è citato alcuno degli scrittori che se ne occuparono.

(29) *Die Entdeckung* u. s. w., p. 2.

(30) Invece il sig. SCHLESINGER nel discorso dianzi citato, parlando dei primi tentativi di J. BOLYAI (come già STÄCKEL in *Die Entdeckung* u. s. w., pp. 2-3), dice (p. 173) che questi « *schlägt dabei einen ähnlichen Weg ein wie* 1733 SACCHERI *und* 1766 LAMBERT, *deren Arbeiten ihm übrigens unbekannt geblieben waren* ». L'ipotesi che io pongo è di una conoscenza *indiretta,* passando pel padre.

7. Anche su LOBATSCHEFSKIJ è probabile che abbia influito l'opera di SACCHERI, sia pure indirettamente! LOBATSCHEFSKIJ all'università di Kasan ebbe prima (fin verso il 1812) a maestro, poi (fino al 1820) a collega il tedesco J. M. C. BARTELS ([31]). Anche questo scienziato aveva studiato all'università di Gottinga (intorno al 1790), acquistando sotto la guida del KAESTNER profonde cognizioni matematiche. Era compaesano ed amico di GAUSS, che aveva aiutato nei primi studi matematici ([32]), e col quale poi aveva trascorso due anni (1805-1807) in Braunschweig nella massima intimità, prima di recarsi ad insegnare a Kasan. Tenendo sempre presente il fatto già menzionato che la teoria delle parallele era all'ordine del giorno, è supponibile che BARTELS abbia ignorato l'esistenza della dissertazione di KLÜGEL, per non dire dei lavori di SACCHERI e di LAMBERT? Ora BARTELS, insegnante valorosissimo, esercitò la massima influenza su LOBATSCHEFSKIJ il quale ne ebbe sempre la massima stima. LOBATSCHEFSKIJ fin dagli anni 1815-1817, se non prima, si occupò delle parallele, secondo l'indirizzo delle ricerche di LEGENDRE. È possibile che non abbia mai parlato di quella teoria con BARTELS, e che questi non gli abbia indicato, per lo meno, la dissertazione di KLÜGEL? Un uomo serio e prudente quale era LOBATSCHEFSKIJ può aver pubblicato una geometria che osa negare il post. V, senza prima aver fatto quanto era in lui per conoscere i principali tentativi di dimostrazione di quel postulato? Ora, se anche BARTELS non avesse potuto aiutarlo in ciò, non mancavano altri mezzi! A quei tempi erano pienamente apprezzate in Russia, e all'Università di Kasan in particolare, la produzione scientifica tedesca e quella francese. La *Histoire* di MONTUCLA, la dissertazione ed il *Wörterbuch* di KLÜGEL ([33]), ecc. ecc., non saran mai andati fra le mani di LOBATSCHEFSKIJ, conducendolo alla conoscenza, diretta od indiretta, del SACCHERI? — *A Kasan* si dovrebbero fare delle ricerche per risolvere la questione! ([34]).

([31]) Cfr., qui e nel seguito, la biografia di LOBATSCHEFSKIJ nel libro citato dell'ENGEL, p. 349 e seg[i] (nella quale è pur tenuto conto di alcune recenti importanti notizie dovute ad A. WASSILIEF).

([32]) SARTORIUS von WALTERSHAUSEN: GAUSS *zum Gedächtniss*, Leipzig 1856, p. 13.

([33]) Come già s'è ricordato, KLÜGEL apparteneva all'Accademia di Pietroburgo.

([34]) L'affinità tra alcune cose di LOBATSCHEFSKIJ e le analoghe di SACCHERI è notevole. Per es. nel § 102 dei *Neue Anfangsgründe* u. s. w. (ediz. di ENGEL, p. 174) LOBATSCHEFSKIJ per dimostrare che si può dare ad arbitrio l'*angolo di*

8. Infine, anche riguardo alle scoperte di SCHWEIKART e di TAURINUS sarebbero da fare ulteriori ricerche! Lo SCHWEIKART aveva seguito (35) dal 1796 al 1798 nell'Università di Marburg lezioni matematiche da J. K. F. HAUFF, autore di vari scritti sulle parallele: ed aveva a sua volta pubblicato nel 1807 un libro sullo stesso argomento (36). Se dall'esame di questi scritti, o da altre circostanze, si potesse dedurre che egli ha conosciuto la dissertazione di KLÜGEL e il lavoro di LAMBERT, rimarrebbero così spiegati i suoi risultati. Infatti questi — quali sono esposti nel foglio datato « Marburg, dicembre 1818 » e inviato da SCHWEIKART a GAUSS per mezzo di GERLING (37), e nelle lettere al nipote TAURINUS del 1820 e 1824 (38) — derivano tutti, quasi immediatamente, dalle proposizioni di SACCHERI contenute nel *Conatuum* di KLÜGEL e dal teorema di LAMBERT sull'area del triangolo. Rimarrebbe sempre a SCHWEIKART il grande merito di aver saputo emanciparsi dal preconcetto euclideo, anzi che ostinarsi, come SACCHERI e LAMBERT, a ritenere assurda l'ipotesi non-euclidea!

Quanto a TAURINUS, egli dice nella prefazione agli *Elementa* del 1826 (39) che nella sua già citata *Theorie* del 1825 era venuto, *senza saperlo*, a concetti molto simili a quelli che poi (nell'edizione

---

parallelismo, fa un ragionamento affine a quello che aveva fatto SACCHERI (prop. 27) per lo stesso scopo, con una figura che ricorda pure le fig. 9 e 10 di SACCHERI (prop. 11 e 12). Del resto il ragionamento di LOBATSCHEFSKIJ e la relativa figura si trovavano già in TAURINUS, *Theorie der Parallellinien,* 1825 (*P. Th.,* pp. 264-265): come ENGEL ha rilevato. E questi ha pur notato che LOBATSCHEFSKIJ nel § 106 dei *Neue Anfangsgründe* (p. 179, cfr. p. 333) adopera tacitamente, senza dimostrarle, le due prime proposizioni di SACCHERI.

(35) *P. Th.,* p. 243. V. anche, pel seguito, l'articolo di STÄCKEL su TAURINUS già citato.

(36) *Die Theorie der Parallellinien, nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie.* Non son riuscito a procurarmi questo libro. Si sa però (*P. Th.,* p. 243) che esso non parla ancora di geometria non-euclidea; ma « attesta (art. di STÄCKEL su TAURINUS, p. 403) un profondo studio della letteratura relativa alle parallele ». Per esempio vi è riportata (*P. Th.,* p. 141) l'opinione di KAESTNER su questo soggetto.

(37) GAUSS' Werke, 8er Band, Leipzig 1900, p. 180.

(38) *P. Th.,* pp. 248 e 245.

(39) *P. Th.,* pp. 247-248. Qui è anche da notare la frase di TAURINUS relativa all'influenza esercitata su lui dal libro di SCHWEIKART. Dice di avervi imparato « *alle die Methoden zum Beweise der Parallelentheorie, die bis dahin bekannt geworden waren* ». Quali?

di CAMERER degli Elementi d'EUCLIDE, 1824 [40]) aveva visto appartenere a SACCHERI e LAMBERT. Effettivamente le cose non-euclidee di quella *Theorie* (riportate nella *P. Th.*, pp. 262-266) si trovan già tutte, a un dipresso, in SACCHERI; come affini a SACCHERI e LAMBERT sono altre considerazioni contenute in una lettera del 1824 di TAURINUS a GAUSS [41]. Non potrebb'essere che TAURINUS fosse stato condotto a queste cose dalle notizie contenute nel libro dello zio, e dalle comunicazioni avute direttamente da questo [42] (se pure, durante i suoi proprî studi a Gottinga intorno al 1820, non ebbe a ricevere qualche altra influenza antieuclidea)?

---

(40) Riguardo all'*Excursus ad Elementorum* I, 29 di quell'edizione, STÄCKEL (art. su TAURINUS, nota a p. 414) dice che esso «*mit grossem Nachdruck und tiefem Verständnis auf die Untersuchungen von* SACCHERI *und* LAMBERT *hingewiesen hat*».

(41) STÄCKEL su TAURINUS, pp. 404 e segi. Vi è dimostrato che, nella ipotesi dell'angolo ottuso, due rette complanari perpendicolari a una terza devon necessariamente incontrarsi: donde il rigetto di quell'ipotesi.

(42) Si noti che la considerazione (*P. Th.*, p. 265, n° 6) che dà nella *Theorie* di TAURINUS il *parametro* non-euclideo coincide con quella di SCHWEIKART, indicata con *c*) nel foglio inviato a GAUSS!