Corrado Segre

Sophus Lie

Sophus Lie

Boll. di Bibl. e Storia Scienze Mat., Vol. **2** (1898), p. 68–75

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **34** (1898-99), p. 363–366

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 441–443

LXXXIII.

SOPHUS LIE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXIV, 1898-99, pp. 363-366;
« Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche », vol. II, 1898, pp. 68-75.

Permetta l'Accademia che io richiami brevemente la sua attenzione sulla grave perdita che ora le fu annunziata: quella di chi poteva dirsi il creatore della grande teoria dei gruppi continui di trasformazioni. A SOPHUS LIE è interamente dovuta questa teoria, così vasta e così profonda, che riguarda ed interessa tutta quanta la matematica. Egli fu che dal principio della sua vita scientifica (1869) sino alla fine — ahi troppo immatura! — ne pose i fondamenti, la sviluppò, ne fece applicazioni, dimostrandone la grande importanza. Egli stabilì i teoremi fondamentali che caratterizzano un sistema continuo di trasformazioni come gruppo. Con felicissima ispirazione introdusse le *trasformazioni infinitesime* per generare i gruppi, e se ne valse per dare a quelle proprietà caratteristiche la più semplice espressione e per rendere più agevoli e più eleganti tutte le ricerche. Svolse per tutti i gruppi continui, colla massima generalità, i principî di una teoria degl'*invarianti differenziali*, dando così il modo di completare e di estendere l'ordinaria teoria degl'invarianti (projettivi) delle forme algebriche, quella dei parametri differenziali, ecc. Insegnò i metodi per ottenere tutte le varietà invarianti di un gruppo assegnato. Determinò e studiò varie classi speciali di gruppi, ad esempio quelli finiti nei campi delle prime dimensioni: ottenendo pei gruppi ad una variabile il risultato notevolissimo che essi son simili a gruppi projettivi. Ricercò le proprietà interne dei vari gruppi, relative alla loro composizione o *struttura*, fece vedere da quali costanti esse dipendano essenzialmente, e come vengano nel miglior modo illuminate dalla considerazione del così detto *gruppo aggiunto*. Determinò le varie specie di strutture che si possono avere nei gruppi a 2, 3, 4 parametri, ed in altre più ampie classi di gruppi. Infine diede a quella teoria tanti e sì varî concetti e risultati da destare la più profonda ammirazione in chi consideri che sono l'opera di un solo scienziato!

L'indirizzo secondo cui lavorò Lie è da lui stesso caratterizzato come quello che da un lato, seguendo gl'insegnamenti di Monge, applica all'Analisi i concetti geometrici, e particolarmente quelli introdotti nella Geometria moderna da Poncelet e da Plücker; e d'altra parte estende le idee di Lagrange, Abel e Galois sulla trattazione delle equazioni algebriche alla Geometria, ed in particolare alle equazioni differenziali. Dalla arbitrarietà nella scelta dell'ente geometrico che si assume come elemento generatore dello spazio (noto concetto di Plücker) derivò il Lie in tutta la sua generalità la nozione di *trasformazioni di contatto*, delle quali le ordinarie trasformazioni (*puntuali*) son casi particolari. E derivò pure (collegandosi a Monge) una concezione geometrica delle equazioni differenziali, sì ordinarie che parziali, la quale consiste nel riguardare una tal equazione come rappresentante una varietà infinita di particolari elementi geometrici (quelli stessi a cui si applicano le trasformazioni di contatto), e gl'integrali come varietà inferiori contenute in quella e soddisfacienti a certe condizioni. Per tal modo il problema dell'integrazione prese una forma più generale; scomparvero certe eccezioni o distinzioni di casi; la nozione d'integrale apparve soggetta alla legge geometrica di dualità. Le trasformazioni di contatto ed i gruppi di esse applicati alle equazioni differenziali chiarirono le questioni d'integrabilità di queste; in quanto che appunto il fatto di ammettere un gruppo continuo di trasformazioni in sè è quello che caratterizza l'integrabilità di varie classi di equazioni, o la loro riducibilità ad altre più semplici, a tipi determinati: come la risolubilità ed altre proprietà delle equazioni algebriche derivano dai gruppi di sostituzioni che queste ammettono. Così una particolare trasformazione di contatto che è fra le prime e più belle concezioni di Lie, mutando le rette in sfere, gli servì a mutare la geometria projettiva in una geometria metrica, il problema delle asintotiche di una data superficie in quello delle linee di curvatura. E qui, a proposito della geometria differenziale delle superficie, ricorderò ancora fra varie altre le eleganti ricerche di Lie sulle superficie di traslazione, ed in particolare sulle superficie algebriche d'area minima, non che quelle sulle superficie che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni geodetiche.

Del resto quelle accennate non sono ancora tutte le applicazioni che il Lie ha fatto dei gruppi continui alla geometria. Va rilevata in modo speciale l'applicazione ai *fondamenti* di questa scienza. Poichè nella geometria si può riguardare come dato a priori un gruppo continuo di trasformazioni, quello dei movimenti dello spazio, si può cercare quali postulati si possano ammettere per questo gruppo, tali che se ne deducano quelle proprietà che corrispondono all'ordinaria intuizione dello spazio. È questo il problema che, avviato da RIEMANN e più ancora da HELMHOLTZ, fu poi trattato in modo più corretto e completo da LIE; sì da caratterizzare pienamente l'ordinaria geometria euclidea, non che le geometrie non-euclidee.

Le teorie di LIE furono già applicate, oltre che dal loro Autore, da vari altri scienziati a tutti i rami della Matematica. Così il POINCARÉ ha collegato in modo notevole la teoria generale dei numeri complessi a *n* unità a quella dei gruppi semplicemente transitivi di trasformazioni lineari omogenee; e molte ricerche si son fatte in quest'indirizzo. Il PICARD (e, dopo di lui, il VESSIOT) ha adoperato i gruppi continui finiti per estendere alle equazioni differenziali lineari la teoria di GALOIS delle equazioni algebriche. Altri hanno applicato i risultati di LIE alla Meccanica (ed alla Fisica matematica) con buon successo: com'era prevedibile, chi consideri che anche in questa scienza come nella geometria si hanno equazioni differenziali e forme differenziali quadratiche, da integrare o da trasformare. Le superficie e varietà algebriche con gruppi continui di trasformazioni birazionali o di trasformazioni projettive son pure state in questi ultimi tempi oggetto di studî, in particolare da parte di alcuni giovani geometri italiani. E l'interesse dei matematici per tutte queste applicazioni della teoria dei gruppi va sempre crescendo!

La morte di SOPHUS LIE riesce tanto più dolorosa, perchè l'attività con cui egli, anche in questi ultimi anni, pubblicava sempre nuove ricerche faceva sperare che egli desse ancora per lungo tempo i bei frutti del suo potente ingegno alla scienza! Particolarmente è da deplorare che egli non abbia potuto mantenere la promessa fatta nella sua « Theorie der Transformationsgruppen » ed altrove di pubblicare altre ampie opere; una delle quali, da fare come quella in collaborazione coll'ENGEL, intendeva dedicare, non più ai soli gruppi finiti, ma a tutti quanti i gruppi continui (definibili con equazioni differenziali), finiti od infiniti, svolgendovi una completa e molto generale teoria degl'invarianti differenziali, ed una trattazione delle equazioni differenziali dal punto di vista dei gruppi di trasformazioni. Sia permesso augurare che l'ENGEL, suo valoroso discepolo e fedele collaboratore, riesca a compiere da sè, coi materiali lasciati dal maestro, l'importante lavoro!

Torino, 26 Febbraio 1899.