Corrado Segre

Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **26** (1917), p. 341–344

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 210–214

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_210>

LXXII.

SUI COMPLESSI LINEARI DI SCHIERE RIGATE, O REGOLI

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. XXVI, 1917-1° semestre, pp. 341-344.

1. Quando le rette dello spazio ordinario si rappresentano nel modo noto coi punti di una varietà quadratica R dello S_5, le sezioni di R coi piani di questo spazio sono imagini, in generale, di schiere di generatrici rettilinee di quadriche ordinarie; a meno che i piani giacciano in R, nel qual caso si ottengono le ordinarie stelle di raggi e i sistemi piani rigati.

Dirò, per brevità, *regolo* per significare « schiera di generatrici di una quadrica ordinaria »: includendo però nel concetto di *regolo* anche la detta degenerazione in stelle, o piani rigati.

Seguendo il metodo iperspaziale ora ricordato, ho potuto giungere, attraverso alla geometria dei piani di S_5, a risultati notevoli sulla geometria dei regoli, e quindi anche delle quadriche ordinarie.

In attesa della pubblicazione completa di queste ricerche [*] ne estraggo qui alcuni enunciati, omettendo le dimostrazioni.

2. Ricordiamo che i regoli sono ∞^9; e che in generale sono a coppie *incidenti*, cioè situati in una stessa quadrica.

Due regoli, che giacciano in una stessa congruenza lineare di rette, determinano un *fascio di regoli*: costituito da quei regoli della congruenza che han comuni le due rette (distinte o infinitamente vicine) d'intersezione dei due regoli dati. I regoli di un fascio

[*] V. la Memoria: *Sulla geometria delle schiere rigate o regoli e in particolare sui complessi lineari di tali enti*, questo volume, p. 264 [N. d. R.].

stanno in generale su quadriche (di un fascio schiera) passanti per uno stesso quadrilatero sghembo, di cui solo due lati opposti sono rette dei regoli.

Ciò premesso, chiamo *complesso lineare di regoli* un insieme algebrico di regoli, tale che in un fascio generico di regoli ve ne sia *uno* solo. Un tale insieme abbraccerà ∞^8 regoli.

I complessi lineari di regoli sono ∞^{19}.

3. Dato un complesso lineare di regoli, se di ogni suo regolo si prende il regolo incidente, si otterranno i regoli di un altro complesso lineare.

La coincidenza di un complesso lineare di regoli con quello che in tal modo gli è associato, avviene solo nei due casi particolari seguenti.

Si fissi una quadrica φ da considerarsi come *inviluppo*, od una f da riguardar come *luogo*. Le ∞^8 quadriche-luoghi armoniche a φ, o le ∞^8 quadriche-inviluppi armoniche a f, costituiscono un sistema lineare; sicchè in un fascio-schiera ve n'è in generale una sola. Ne segue che i regoli giacenti nelle quadriche dell'uno, oppure dell'altro sistema lineare, formano, secondo la definizione del n^0 2, un complesso lineare.

Così le due specie diverse di sistemi lineari ∞^8 di quadriche, provenienti dal considerar le quadriche come superficie di 2^0 ordine, o come inviluppi di 2^a classe, vengono subordinate ad un unico concetto, molto più ampio: quello di complessi lineari di regoli.

Sono solo ∞^9, sì nell'una che nell'altra specie, questi particolari complessi, provenienti da sistemi lineari di quadriche.

4. Un altro esempio speciale di complessi lineari di regoli, dipendenti ancora da sole 9 costanti, si ha nell'insieme di tutti i regoli, ognun dei quali è in uno stesso complesso lineare di rette con un regolo fisso (*nucleo*).

5. Consideriamo un complesso lineare *generale* di regoli, Γ. Ad esso si connettono strettamente (son forme invariantive) due quadriche f, φ.

La quadrica f è il luogo dei centri di quelle stelle che, riguardate come regoli (n^0 1), fan parte di Γ. Dualmente φ è l'inviluppo dei piani sostegni dei sistemi piani rigati che, come regoli, stanno in Γ.

Si posson anche definire f e φ in quest'altro modo. Le quadriche di cui ambi i regoli stanno in Γ sono precisamente quelle ∞^7

che, come luoghi, sono armoniche ad una quadrica-inviluppo fissa φ, e come inviluppi sono armoniche ad una quadrica-luogo fissa f.

In altre parole, il dato complesso Γ (insieme col suo associato nel senso del principio del n⁰ 3) appartiene sempre ad un *fascio di complessi* determinato da due complessi lineari armonici rispettivamente ad una quadrica-luogo e ad una quadrica-inviluppo (complessi particolari del n⁰ 3).

Dirò f e φ gli *appoggi* di Γ.

6. Sono pure determinati da Γ due regoli α, β, che chiamerò invece i *cardini* di Γ.

In una congruenza lineare di rette stanno ∞^3 regoli; e se la congruenza è generica, solo ∞^2 di questi sono in Γ. Ma esistono infinite congruenze lineari, che possiam chiamare *totali* per Γ, nel senso che *ogni* loro regolo appartiene a Γ. Queste congruenze si hanno da due determinati regoli α, β, così: son le congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene due rette di α e due rette di β.

Si giunge anche ad α, β colla seguente proposizione. Il complesso dato Γ sta sempre in un fascio con due complessi della specie particolare definita al n⁰ 4. I nuclei di questi due complessi saranno appunto α e β.

Indicherò con A, B le due quadriche (che suppongo non singolari) su cui stanno i regoli α, β.

7. I regoli α, β, e quindi anche le quadriche A, B, sono strettamente legati alle f, φ.

La f sta in un fascio di quadriche con A, B; e così φ sta nella schiera di quadriche determinata da A e B.

Per determinare il complesso Γ si posson prendere ad arbitrio i due regoli cardini α, β; e poi anche, entro al fascio AB, la quadrica d'appoggio (luogo) f, oppure, entro la schiera AB, la quadrica d'appoggio (inviluppo) φ. Con ciò Γ risulta individuato.

Si ha dunque, fra le quadriche del fascio e della schiera che son determinati dalle quadriche A, B di due dati regoli α, β, una corrispondenza biunivoca. Dette f e φ due quadriche omologhe, rispettivamente del fascio e della schiera, il loro legame (con α, β) si può esprimere così: per ogni coppia di rette incidenti di α e β, quella retta del loro fascio che è tangente ad f è pure tangente a φ.

8. Un'altra maniera di presentare la corrispondenza tra le f e le φ (di cui l'ultima proposizione può riguardarsi come un corollario)

deriva dalla considerazione di quelle congruenze di rette, *totali* (n⁰ 6) per Γ, che sono *speciali.*

Le direttrici di tali congruenze sono le ∞^3 rette di un complesso quadratico T di BATTAGLINI. Se p è una di esse, la congruenza lineare speciale di cui è direttrice stabilisce fra i punti e i piani di p una corrispondenza proiettiva, che fa corrispondere ai quattro punti d'incontro di p con rette di α, β i quattro piani che congiungono p rispettivamente alle stesse rette (1). Orbene, in questa stessa proiettività ai punti d'incontro di p con f rispondono i piani tangenti a φ passanti per p.

Così, se per un punto qualunque P si tirano le ∞^1 rette del complesso quadratico T definito dall'incidenza sui due dati regoli α, β; e per ciascuna p di quelle ∞^1 rette si costruisce il piano π, che corrisponde a P nella proiettività che è data tra punti e piani di p; gli ∞^1 piani π saranno tutti tangenti ad una stessa quadrica φ della schiera AB; e questa φ non muterà se P si muoverà su una quadrica f del fascio AB.

9. Invece di partire dai due regoli cardini α, β (nn. 7 e 8), si può, per determinare il complesso Γ, partire dalle due quadriche d'appoggio f e φ, prese ad arbitrio.

Date f e φ, sono ancora ∞^1 (un fascio) i complessi lineari Γ. Le quadriche contenenti i loro cardini formano un sistema Σ, semplicemente infinito, ellittico, d'indici puntuale e planare 3; sistema che contiene f e φ, e che si può definire come l'insieme delle quadriche passanti per 8 punti O associati rispetto a un tetraedro (cioè fra loro omologhi nel G_8 di collineazioni involutorie definite dal tetraedro), e tangenti a 8 piani ω, pure associati rispetto a quel tetraedro. I punti O sono gli 8 punti di contatto di f con generatrici di φ; e dualmente i piani ω sono quei piani tangenti a φ che passan per le generatrici di f tangenti a φ. Due regoli α, β di quadriche di Σ si posson assumere come cardini di un complesso Γ (del fascio), quando le loro rette uscenti da un punto O sono in un piano con quella generatrice di φ che tocca f in O; o dualmente, scambiando fra loro f e φ, O e ω. Naturalmente, con tale scelta le

---

(1) La proiettività così richiesta fra 4 punti e 4 piani di p è una condizione che può servire per definire il complesso T di BATTAGLINI. Veggasi su questa definizione (*per incidenza su due regoli*) una mia Nota: *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del* BATTAGLINI, Rend. Palermo, 42, 1917 [V. questo volume, pp. 197-209].

quadriche A, B di α, β riesciranno in un fascio con f, e in una schiera con φ.

10. Quando si conoscano per un complesso lineare di regoli Γ, sì i cardini α e β, che le quadriche di appoggio f e φ, la costruzione di Γ si farà facilmente, considerando Γ come comune ai due fasci di complessi definiti rispettivamente da α, β e da f, φ. (Ne deriva anzi qualche nuova relazione tra $\alpha, \beta, f, \varphi$).

Accennerò invece ad una costruzione di Γ, che si può fare quando son dati i due cardini α, β, e poi un regolo qualunque ε di Γ. Si considerino le ∞^2 congruenze lineari di rette, ognuna delle quali contiene una coppia di rette di ciascuno dei regoli di $\alpha, \beta, \varepsilon$. (Si ottiene ogni congruenza siffatta, ad esempio, come intersezione dei complessi lineari di rette che congiungono α e β ad una coppia di rette di ε). Riguardando ciascuna congruenza come la base di un fascio di complessi lineari di rette, si pensi per ognuno di questi complessi il birapporto che con esso (come quarto elemento) determinano i tre complessi di quel fascio passanti per $\alpha, \beta, \varepsilon$. Tre qualunque complessi lineari di rette (rispettivamente per tre arbitrarie delle dette congruenze), ai quali spettino in tal modo dei birapporti, il cui prodotto sia uguale a 1, si taglieranno sempre in un regolo di Γ. E si otterranno così tutti gli ∞^8 regoli di Γ.