Corrado Segre

Sur la génération projective des surfaces cubiques. (Extrait d'une lettre adressée à M. le Prof. R. Sturm)

Arch. der Math. und Physik, Vol. **10** (1906), p. 209–215

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 188–196

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_188>

LXX.

SUR LA GÉNÉRATION PROJECTIVE DES SURFACES CUBIQUES

Extrait d'une lettre adressée à M. le Prof. R. STURM.
« Archiv der Mathematik und Physik », III Reihe, Band X, 1906, pp. 209-215.

Dans votre admirable biographie de CREMONA (1) il y a un passage sur les surfaces du 3e ordre, auquel je voudrais, avec votre permission, ajouter quelques éclaircissements pour les lecteurs de l'*Archiv*.

En analysant le Mémoire de CREMONA (2), après avoir parlé de la représentation de ces surfaces sur un plan, vous dites (p. 200):

« *Um nun zu erkennen, dass jede kubische Fläche so abbildbar ist, wird der Versuch gemacht, zu beweisen, dass jede durch drei kollineare Bündel erzeugt werden kann, welche Erzeugung, wie* CLEBSCH *gezeigt hat* (3), *zu einer eindeutigen Abbildung führt. Aber dieser Beweis* (Nr. 118) (4) *muss als nicht gelungen angesehen werden. Die Fläche wird zunächst durch duploprojektive (oder trilineare) Ebenenbüschel (nach* AUGUST*) erzeugt, aber die Umwandlung dieser Erzeugung in diejenige durch kollineare Ebenenbündel ist nicht richtig. Diese Erzeugung ist nicht immer möglich* ».

(1) Archiv der Math. und Phys., (3) 8, 1904, pp. 11 et 195.

(2) *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,* Journal für Math., 68, 1868, p. 1 [*Opere matematiche* di L. CREMONA, III, pp. 1-121]. Il est reproduit, comme l'on sait, dans les *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung,* Berlin, 1870.

(3) Journal für Math., 65, 1866, p. 359.

(4) *Grundzüge,* Nr. 230.

Or, il est bien vrai (inutile de le dire, après vous!) que la démonstration de CREMONA n'est pas complète. Cependant on peut ajouter que l'idée, sur laquelle elle s'appuie, est très bonne et capable de porter au résultat voulu!

Il s'agit précisément de la considération que CREMONA fait vers la fin de ce n⁰ 118, de trois *faisceaux* de plans duplo projectifs, ou trilinéaires, comme cas particulier de trois *réseaux* (Bündel) projectifs.

Cette considération n'est pas bien expliquée par CREMONA; et lorsqu'il dit d'appliquer la méthode exposée au n⁰ 45 [5] pour substituer aux trois faisceaux trois réseaux généraux projectifs, on ne voit pas bien comment cette méthode pourrait s'appliquer.

Mais on arrive à cela sans difficulté au moyen de la représentation analytique! Il est sûr que CREMONA se sera inspiré des considérations analytiques des géomètres anglais [6] dans l'étude synthétique qu'il a faite, dans le *Mémoire* et dans les *Preliminari*, des courbes et surfaces engendrées par des systèmes projectifs, ou, plus en général, représentées par des matrices. La possibilité, pour de telles variétés, de changer les systèmes projectifs générateurs, possibilité que CREMONA démontre géométriquement, dans le cas de trois réseaux, au n⁰ 45 cité, est évidente dans la représentation analytique.

D'ailleurs, lorsqu'on engendre une surface cubique générale F^3 par des faisceaux trilinéaires, AUGUST [7] remarque qu'on peut représenter ces faisceaux par des équations

$$A_2 + \lambda A_3 = 0, \quad B_3 + \mu B_1 = 0, \quad C_1 + \nu C_2 = 0, \tag{1}$$

la correspondance trilinéaire étant exprimée par:

$$\lambda\mu\nu = 1. \tag{2}$$

Il s'ensuit que la surface sera représentée par

$$A_2 B_3 C_1 + A_3 B_1 C_2 = 0. \tag{3}$$

---

(5) *Grundzüge*, Nr. 154.

(6) CAYLEY, *On the order of certain Systems of Algebraical Equations*, Cambr. and Dubl. Math. Journ., 4, 1849, p. 132 (= Coll. Math. Papers, I, p. 457). — SALMON, *On the order of certain Systems of Equations*, Quart. Journal, 1, 1857, p. 246. — Puis, les traités de SALMON.

(7) *Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis*, Berlin, 1862.

C'est justement l'équation d'une F^3 générale, rapportée à deux trièdres conjugués, que CAYLEY (en collaboration avec SALMON ?) avait donnée en 1849 ([8]). On la rencontre plus tard dans un Mémoire bien connu de SCHLÄFLI ([9]), qui fait sur elle (p. 114) la remarque suivante ([10]). On peut écrire (3) ainsi:

$$\begin{vmatrix} 0 & A_2 & A_3 \\ B_1 & 0 & B_3 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

De là «par combinaisons linéaires des lignes et des colonnes» (c'est-à-dire en multipliant par un déterminant cubique, à éléments constants), on tire la forme plus générale:

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ r' & s' & t' \\ r'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Par suite les différents points de la F^3 correspondent aux rapports $\alpha : \beta : \gamma$ au moyen des formules:

$$\begin{cases} \alpha r + \beta s + \gamma t = 0 \\ \alpha r' + \beta s' + \gamma t' = 0 \\ \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' = 0. \end{cases} \tag{6}$$

On reconnait dans ces équations la génération que GRASSMANN avait fait connaître en 1855 ([11]), de la surface cubique par trois réseaux

---

([8]) *On the triple tangent Planes of Surfaces of the third Order,* Cambr. and Dubl. Math. Journ., 4, p. 118 (= Coll. Math. Papers, I, p. 445). La déclaration de CAYLEY, à la fin de ce Mémoire, est relative à la collaboration avec SALMON. D'après elle, il me semble qu'on puisse bien attribuer cette équation à CAYLEY.

([9]) *An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order,* etc., Quart. Journal, 2, 1858, pp. 55 et 110.

([10]) W. FRANZ MEYER la relève aussi, au n° 7 de son projet d'article sur les surfaces cubiques, pour *l'Encyclopädie der math. W.,* 1896.

([11]) *Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen,* Journal für Math., 49, p. 47 (= Ges. Werke, 2. Bd., 1er Th., p. 180). Ce travail porte la date de juillet 1852.

projectifs de plans. En effet, si les combinaisons linéaires dont parle SCHLÄFLI sont faites avec des coefficients convenables (généraux), on obtient que $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ soient linéairement indépendants, c'est-à-dire qu'ils déterminent un *véritable* réseau de plans. Et de même pour les deux autres réseaux (6). Il y a donc ici une démonstration de la possibilité d'appliquer la génération de GRASSMANN à toute F^3 générale. Mais SCHLÄFLI n'en parle pas dans son Mémoire ! Il se borne à tirer des équations (6) des conséquences sur les droites de la surface, les « *double-six* », etc.

Cependant nous savons à-présent, par les lettres de SCHLÄFLI à STEINER [12], que SCHLÄFLI avait très bien vu, dès 1854, comment la possibilité de représenter la surface cubique par l'équation (5) ou (3) entraîne comme conséquence la génération par trois réseaux projectifs de plans. Il disait même (dans la 3e lettre citée) que de l'équation (3) on peut passer aux faisceaux (1), liés par (2), et de ceux-ci par multiplication aux réseaux projectifs (6).

Or, ce que CREMONA a voulu faire pour arriver géométriquement à la génération de GRASSMANN, revient aussi précisément au passage des équations (1) et (2) aux (6), correspondant à la transformation de (4) en (5). C'est donc une voie bonne ! Le passage par les faisceaux de plans en correspondance trilinéaire (obtenus en projetant la F^3 par trois de ses droites, qui ne se coupent pas) donne un moyen simple et sûr pour démontrer géométriquement la génération par trois réseaux projectifs de plans. Nul doute que le raisonnement géométrique de CREMONA ne puisse se compléter !

Quant à la possibilité — dont vous dites un mot — de cette génération, veuillez remarquer que CREMONA avertit bien [13] : 1°) qu'il s'agit de la F^3 *générale*, c'est-à-dire sans points doubles ; 2°) que l'on fait abstraction de la réalité des éléments.

A-t-on recherché si — tout en conservant cette 2e réserve — on peut ôter la 1e ; c'est-à-dire si la génération de GRASSMANN s'étend à *toutes* les F^3 *singulières* ? Je ne le sais pas. Mais c'est une recherche qui porte à un résultat bien simple. Dans l'hypothèse

---

(12) « *Der Briefwechsel zwischen Jakob* STEINER *und Ludwig* SCHLÄFLI », *herausgegeben von J. H.* GRAF : Mitteilungen der naturforsch. Gesellsch., Bern, 1896. Voir les lettres de SCHLÄFLI 27 Mai, 7 Juin et 29 Nov. 1854, aux pages 136, 137, 152. (C'est évidemment par une faute d'impression que la 3e lettre porte pour titre « STEINER *an* SCHFÄFLI »).

(13) Voir la note à la fin de la p. 1 du *Mémoire* ; puis le commencement du n° 118 cité, et la note relative.

qu'une surface cubique puisse être engendrée par trois réseaux projectifs (6), on pourra toujours (comme le remarque aussi SCHLÄFLI) trouver des valeurs α, β, γ (où par ex. $\alpha \neq 0$) telles que les plans (6) correspondants se coupent suivant une droite, c'est-à-dire telles qu'on ait identiquement

$$k(\alpha r + \beta s + \gamma t) + k'(\alpha r' + \ldots) + k''(\alpha r'' + \ldots) \equiv 0,$$

en désignant par k, k', k'' des constantes convenables (et par ex. $k \neq 0$). Alors l'équation (5) de la surface pourra se transformer ainsi:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} 0 & ks + k's' + k''s'' & kt + k't' + k''t'' \\ \alpha r' + \beta s' + \gamma t' & s' & t' \\ \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' & s'' & t'' \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'ensuit que la F^3 devra contenir, non seulement la droite déjà considérée

$$\alpha r' + \beta s' + \gamma t' = 0, \quad \alpha r'' + \beta s'' + \gamma t'' = 0,$$

mais aussi l'autre

$$ks + k's' + k''s'' = 0, \quad kt + k't' + k''t'' = 0.$$

Or, si ces droites n'en forment qu'une seule, l'équation (7) prouve qu'elle sera une droite *double* de la surface; par suite celle-ci contiendra ∞ droites. Donc: *la surface cubique qui contient une seule droite, c'est-à-dire* (14) *la surface qui a un point uniplanaire tel que les 3 droites passant par lui coïncident (surface de 4e classe, espèce XX dans la classification de* SCHLÄFLI), *ne peut pas être engendrée par trois réseaux projectifs de plans.*

Et c'est là la seule surface cubique qui ne puisse être engendrée ainsi! Car, pour toute autre F^3 douée de points multiples, il y aura certainement (15) un point double ou triple, par lequel passent deux droites *distinctes* de la surface. Soient $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1 = x_3 = 0$

(14) SALMON, *On the triple tangent Planes to a Surface of the third Order*, Cambr. and Dubl. Math. Journ., 4, 1849, p. 252 (Voir à la p. 258). — SCHLÄFLI, *On the distribution of Surfaces of the Third Order into Species*, etc., Phil. Trans., 153, 1863, p. 193.

(15) Voir, par exemple, SCHLÄFLI, loc. cit.

ces deux droites. On voit alors facilement qu'on peut représenter la F^3 ainsi

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & p & q \\ x_3 & r & s \end{vmatrix} = 0,$$

où p, q, r, s sont des fonctions linéaires des coordonnées. Cela prouve mon assertion.

Je reviens aux générations de la surface cubique générale par faisceaux trilinéaires et par réseaux projectifs. Dans le Mémoire cité de GRASSMANN on trouve plusieurs générations de cette surface (sans la démonstration de leur validité générale), embrassées dans l'énoncé suivant : « *Der Durchschnitt dreier aus einem Gebilde zweiter Stufe durch Projektion ableitbarer Ebenenbüschel ist eine Oberfläche dritter Ordnung* ». Ici, pour GRASSMANN, le mot « *Ebenenbüschel* » s'applique à deux espèces *(Stufen)* de formes géométriques : les *faisceaux* et les *réseaux* de plans.

Vous avez déjà remarqué depuis longtemps (16) que, si l'on prend là trois faisceaux de plans, on a la génération de la F^3 par faisceaux trilinéaires retrouvée par AUGUST. Et les autres cas — non pas seulement celui classique des trois réseaux, mais aussi ceux de deux réseaux et un faisceau, ou bien d'un réseau et deux faisceaux ! — sont aussi très remarquables (17). Mais ce qui me semble surtout digne d'attention, c'est le fait, en ligne générale, de poser un lien projectif, c'est-à-dire par voie de projections et sections, non pas seulement entre des formes *(Gebilde)* de même espèce *(Stufe)*, comme l'on faisait avant GRASSMANN, mais aussi *entre des formes d'espèces différentes.*

La considération des projectivités entre de telles formes ne jouit pas, même chez les auteurs modernes, d'une grande faveur : tandis qu'elle pourrait souvent être très utile.

Elle revient — on le sait — à considérer des projectivités *singulières* ou *dégénérées* entre des formes de même espèce (18).

---

(16) Dans la biographie de GRASSMANN, Math. Ann., XIV, 1878, p. 1 : voir la fin de la p. 19. — Voir aussi, pour les différentes générations des surfaces cubiques : STURM, Math. Ann., XXIII, 1884, pp. 308 et 599.

(17) Ainsi SCHRÖTER (Journal für Math., 96, 1884, p. 283) dit que ces deux constructions « *vor den früheren vielleicht noch den Vorzug verdienen* ».

(18) Il est remarquable que SCHLÄFLI, dans la lettre citée du 29 Nov. 1854, considère aussi les équations (1), avec la condition (2), comme représentant trois

Supposons, par exemple, pour rester dans les applications aux surfaces cubiques, que l'on ait un réseau de plans

$$\alpha r + \beta s + \gamma t = 0 \tag{9}$$

en correspondance projective avec une autre forme de 2[e] espèce, par ex. un plan Σ, dont j'indiquerai par $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ les coordonnées des points. Alors les $\alpha\beta\gamma$ seront des formes linéaires des λ; et, en les substituant dans (9), l'équation du réseau prendra la forme

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0. \tag{10}$$

On aura une *dégénération* dans la correspondance s'il arrive que, dans cette équation (10), l'une des formes P_i vienne à manquer; ou plus généralement s'il arrive que ces formes viennent à être liées par une identité linéaire

$$l_1 P_1 + l_2 P_2 + l_3 P_3 \equiv 0. \tag{11}$$

Alors les plans (10) correspondant à des points $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$ généraux formeront seulement un *faisceau,* et non plus un réseau! Seulement le point $(l_1 l_2 l_3)$ sera exceptionnel; car le plan qui lui correspond dans le réseau sera complètement indéterminé. À chaque plan du faisceau correspondront dans Σ les ∞^1 points d'une droite passant par le point exceptionnel l; et la correspondance donnée se réduira à une projectivité entre le faisceau de plans et le faisceau des droites de Σ passant par l. On peut poser

$$P_i \equiv a_i A + b_i B,$$

où A et B donnent deux plans du faisceau. Alors on aura

$$\Sigma \lambda_i P_i \equiv \mu_1 A + \mu_2 B,$$

où μ_1, μ_2 sont des formes linéaires connues de $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Ces expressions des μ en fonctions des λ donnent une représentation directe de la projectivité entre le faisceau de plans et la forme Σ.

---

réseaux *(Ebenengebüsche)* projectifs dégénérés. « *Von den letzteren ist freilich jedes Gebüsch in einen Ebenenbüschel ausgeartet, aber ihre gegenseitige Beziehung ist doch diejenige dreier projectivischen Ebenengebüsche...* ».

D'après cela, on comprend bien quelle sorte de lien on obtient entre deux ou trois formes, si on les suppose toutes en correspondance projective avec Σ.

Supposons qu'il s'agisse de trois faisceaux. Alors on pourra représenter les paramètres non homogènes de leurs plans $\mu_1 : \mu_2$, etc., comme quotients de formes linéaires en $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. De là, en éliminant ces dernières variables, on tire une équation trilinéaire entre ces paramètres. C'est la représentation directe de la correspondance trilinéaire entre les trois faisceaux.

Revenons une dernière fois aux surfaces cubiques. Lorsqu'on représente une F^3 par une équation-déterminant

$$|A_{ik}| = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{12}$$

où les A_{ik} sont des formes linéaires de $x_1, \ldots, x_4$, il convient de considérer en même temps l'équation

$$\sum_{i,k} \lambda_i \, \mu_k \, A_{ik} = 0. \tag{13}$$

En y fixant $\mu_1\mu_2\mu_3$, elle représente, avec les paramètres variables $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, un réseau de plans. Et en changeant successivement les μ, on obtient de (13) *un système linéaire* ∞^2 *de réseaux, projectifs entre eux,* en prenant comme correspondants les plans qui proviennent des mêmes valeurs des λ. La F^3 peut être engendrée par trois quelconques de ces réseaux. Or on peut toujours déterminer les μ de façon que le réseau correspondant se réduise à un faisceau, c'est-à-dire que les trois plans $\Sigma\mu_k A_{1k}$, $\Sigma\mu_k A_{2k}$, $\Sigma\mu_k A_{3k}$ se rencontrent suivant une droite : une droite de la surface ! Il y a ainsi, dans le système ∞^2 de réseaux (13), en général, 6 réseaux qui dégénèrent en des faisceaux de plans. On peut en prendre 0, 1, 2, 3 parmi les trois réseaux avec lesquels on veut engendrer la F^3 : et on aura les quatre différentes générations de GRASSMANN !

De tels systèmes linéaires de formes projectives, analogues à (13), se présentent naturellement dans l'étude de toutes les variétés algébriques qui peuvent être représentées par des matrices à éléments linéaires. M. SCHUR a appelé l'attention sur eux (19) ; et

---

(19) *Über die durch collineare Grundgebilde erzeugten Kurven und Flächen,* Math. Ann., XVIII, 1881, p. 1.

M. REYE en a fait plus tard une large étude [20]. Il y a lieu, aussi en général, de considérer, dans ces systèmes, des formes dégénérées en formes d'espèce inférieure. Alors il arrive encore que les liens entre plusieurs de ces formes se réduisent, par dégénération, non seulement à des projectivités entre les formes inférieures, mais aussi à des relations plurilinéaires. C'est là un fait, qui ne me semble pas avoir attiré suffisamment l'attention des géomètres : les correspondances plurilinéaires, comme relations projectives dégénérées entre des formes d'espèce supérieure.

Turin, le 25 Mars 1905.

---

(20) *Über lineare Mannigfaltigkeiten projektiver Ebenenbüschel und collinearer Bündel oder Räume*, Journal für Math., 104, 106, 108 (1889 et suiv.).