

CORRADO SEGRE

CORRADO SEGRE

Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **2** (1888), p. 148–149

in: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 167–168

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_167>

LXVI.

UN'OSSERVAZIONE SUI SISTEMI DI RETTE DEGLI SPAZI SUPERIORI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo II, 1888, pp. 148-149.

Quantunque in varie ricerche geometriche pubblicate in questi ultimi anni compaiano quei sistemi di rette di S_n che si presentano spontaneamente come analoghi ai sistemi doppiamente infiniti dello spazio ordinario, cioè i sistemi $n - 1$ volte infiniti, non mi pare che si sia cercato di estendere ad essi le proprietà *focali* notissime di quelli. Questa estensione è molto ovvia; ma nondimeno credo conveniente farne un cenno, essendo essa indispensabile per dare allo studio di quei sistemi di S_n un indirizzo ed uno scopo preciso.

Sia r un raggio qualunque di un sistema ∞^{n-1} di S_n (sistema che può anche non essere algebrico, purchè soddisfi in ogni caso per l'elemento r a certe condizioni di continuità). Cerchiamo tra gl'infiniti raggi del sistema che sono infinitamente vicini ad r quanti sono quelli che lo tagliano, cioè quanti sono i punti di r (che diremo *fuochi*) per ognuno dei quali passa un raggio del sistema infinitamente prossimo ad r . A tal fine consideriamo due S_{n-1} , α e β , i quali taglino r in due punti distinti, A e B . I raggi del sistema tagliano α e β in punti omologhi di una certa corrispondenza, la quale, limitata alle regioni di quegli spazi infinitamente vicine ai due punti omologhi A e B , cioè a quella corrispondenza che vien data dai raggi infinitamente vicini ad r , si riduce ad una collineazione. Ne segue che le due *stelle* di centri A e B contenute rispettivamente in α e β son riferite collinearmente se vi si considerano come omologhe due rette quando sono incontrate da un raggio del sistema infinitamente prossimo ad r . Esse determinano sull' S_{n-2} d'intersezione di α e β un'omografia, i cui punti uniti son congiunti ad r mediante i piani (*focali*) contenenti i raggi cercati incidenti ed infinitamente vicini ad r .

In generale quei punti uniti sono $n - 1$ e quindi altrettanti saranno i fuochi (ed i piani focali) del raggio r . Ma è importante osservare che ogni caso particolare che possa presentare l'omografia considerata dell' S_{n-2} riguardo ai punti uniti conduce ad una specie particolare di singolarità che il raggio r potrebbe presentare.

I fuochi degli ∞^{n-1} raggi del sistema costituiscono una o più varietà (*focali*): nel caso più generale una varietà (riduttibile o no) ad $n - 1$ dimensioni. E le stesse considerazioni che furono usate per lo spazio ordinario, cioè per $n = 3$, da KUMMER e da altri, provano che in generale gli $n - 1$ fuochi di un raggio del sistema sono punti di contatto del raggio stesso con la varietà M_{n-1} focale (e che il piano focale corrispondente ad uno qualunque di essi è tangente a questa negli altri, ossia sta negli $n - 2$ S_{n-1} tangenti alla varietà in quelli). Dunque *in generale un sistema ∞^{n-1} di raggi di S_n è un sistema di rette tangenti $n - 1$ volte ad una varietà M_{n-1} .*

Ma in casi particolari può accadere che il luogo di uno o più fuochi sia una varietà di dimensione inferiore $n - 1 - i$ che deve quindi esser incontrata una o più volte da tutti i raggi del sistema, ed esser luogo di punti *singolari* di questo (punti per cui passano coni di ∞^i raggi), ciascun dei quali va contato i volte tra i fuochi di ogni raggio passante per esso. Così le $n - 1$ condizioni di toccare una M_{n-1} in $n - 1$ punti possono sostituirsi in vari modi mediante condizioni (semplici o multiple) di contatto e d'incontro con varietà di ogni dimensione. Ad esempio un sistema di raggi del 1° ordine (dicendo *ordine* di un sistema il numero dei raggi uscenti da un punto qualunque) non può avere una M_{n-1} focale (giacchè ogni punto che sia fuoco per un raggio è singolare pel sistema).

Torino, Luglio 1888.