I Grandi Matematici Italiani online

Corrado Segre

Corrado Segre

Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **20** (1884-85), p. 487–504

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 1–17

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_1>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*
http://www.bdim.eu/

LVI.

CONSIDERAZIONI INTORNO ALLA GEOMETRIA DELLE CONICHE DI UN PIANO E ALLA SUA RAPPRESENTAZIONE SULLA GEOMETRIA DEI COMPLESSI LINEARI DI RETTE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XX, 1884-85, pp. 487-504.

Le coniche di un piano, considerate come inviluppi (o come luoghi), formano una varietà lineare a 5 dimensioni, in cui occorre considerare certe varietà *fondamentali* rispettivamente a 4 ed a 2 dimensioni, che sono costituite dalle coniche degenerate in coppie di punti e in punti doppi. La geometria proiettiva delle coniche del piano coincide appunto, come vedremo, colla geometria di una varietà lineare a 5 dimensioni in cui si consideri come fondamentale il gruppo di quelle trasformazioni lineari che mutano in se stesse le dette varietà fondamentali. Di qui la necessità di studiare accuratamente le proprietà di queste quando si voglia fare (da quel punto di vista) una geometria proiettiva delle coniche del piano. Nel presente lavoro io mi propongo appunto di fare tale studio e di darne qualche applicazione [1]; molte altre applicazioni se ne potrebbero fare, tutte atte a mostrare l'importanza di quel modo di considerare

---

[1] Fu specialmente in seguito ad una domanda rivoltami dal signor CAYLEY, che mi decisi a ricercare le proprietà di quelle due varietà fondamentali. I risultati, che così trovai, coincidono in parte (v. n. 1-5) con alcuni di quelli ottenuti dal signor VERONESE nella Memoria: *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* (Atti Acc. Lincei, (3) 19, 1884), come quegli ebbe la cortesia di avvertirmi prima della pubblicazione di quella. Ciò malgrado li ho qui esposti nel modo con cui io vi giunsi, modo che è alquanto diverso da quello seguito dal signor VERONESE e preferibile ad esso pel mio scopo.

la geometria delle coniche, ma occupazioni d'ordine affatto diverso m'impedirono di dilungarmi su esse. Mi sono però fermato alquanto intorno alla questione della rappresentazione della varietà delle coniche di un piano sulla varietà dei complessi lineari di rette dello spazio, affine di analizzarla, per così dire, completamente, e di mostrare che a tale rappresentazione non si deve dare eccessiva importanza nè per la geometria delle coniche, nè per quella della retta.

Le varietà fondamentali nello spazio costituito dalle coniche di un piano.

1. Le coniche di un piano π, considerate come inviluppi di rette (2), costituiscono uno spazio lineare a cinque dimensioni S_5, di cui esse sono i *punti*. I sistemi lineari semplici (schiere), doppi, tripli, quadrupli di coniche formano le *rette* S_1, i *piani* S_2, gli *spazi* S_3 e gli S_4 di S_5.

In una schiera vi sono 3 coniche ridotte a coppie di punti e in un sistema lineare triplo vi sono 4 coniche ridotte a coppie di punti coincidenti, cioè a punti doppi (poichè le coniche del fascio armonico a quel sistema hanno 4 punti comuni). Dunque le coniche di π degenerate in coppie di punti e quelle degenerate in punti doppi formano in S_5 rispettivamente una varietà cubica a 4 dimensioni M_4^3 ed una superficie del 4^0 ordine a due dimensioni F_2^4. Se una schiera di coniche contiene una conica degenerata in un punto doppio, questa conta due volte fra le tre coniche degeneri della schiera: dunque in S_5 ogni retta passante per un punto di F_2^4 taglia ivi due volte M_4^3, cioè F_2^4 è superficie doppia per la varietà M_4^3 (3).

---

(2) Quando non dirò espressamente il contrario sottintenderò sempre che le coniche si considerino come inviluppi di rette e non come luoghi di punti. Con S_n intenderò uno spazio lineare ad n dimensioni, e con M_n^g, F_n^g, ecc., una varietà ad n dimensioni di grado g; inoltre (a differenza da altri miei lavori) userò qui le parole *retta* e *piano* nel senso di spazi lineari ad 1 e 2 dimensioni.

(3) Analogamente si vede che nell'S_9 costituito dalle quadriche dello spazio ordinario considerate come inviluppi quelle che si riducono a coniche, a coppie di punti ed a punti doppi costituiscono rispettivamente una M_8^4, una M_6^{10} e una M_3^8; queste ultime due varietà sono rispettivamente doppia e tripla per la prima. Lo studio delle tre varietà che così si presentano nella geometria delle quadriche sarebbe fondamentale per questa e forse ci occuperà più tardi.

La superficie F_2^4 è rappresentata univocamente sui punti (doppi) di π, e la varietà M_4^3 sulle coppie di punti di π. In un sistema lineare quadruplo le coniche degenerate in punti doppi formano, come luogo di questi, una conica: dunque la sezione di F_2^4 fatta con un S_4 qualunque corrisponde ad una conica di π come luogo di punti, e viceversa. Le ∞^5 curve *normali* del 4^o ordine C^4 determinate su F_2^4 dagli ∞^5 S_4, ovvero questi stessi S_4, corrispondono così alle ∞^5 coniche di π *considerate come luoghi*. Siccome poi ogni retta di π è incontrata dalle coniche di questo piano in due punti, così le corrisponderà su F_2^4 una curva incontrata dagli S_4 in due punti, cioè una conica; sicchè alle ∞^2 rette di π corrispondono su F_2^4 ∞^2 coniche. E poichè due rette di π hanno comune un punto e per due punti di π passa una retta, le ∞^2 coniche di F_2^4 sono tali che due di esse si tagliano in un punto e che per due punti di F_2^4 ne passa una sola determinata.

2. Una schiera di coniche di π, la quale non contenga solo 3 coppie di punti, ma sia composta tutta di coppie di punti può essere di due specie diverse. Una 1^a specie è costituita dalle coppie di punti di un'involuzione su una retta, una 2^a specie dalle coppie determinate da un punto fisso e da un punto mobile su una retta (non passante in generale per quello); una schiera appartenente ad entrambe le specie sarà costituita dalle coppie di punti di un'involuzione *parabolica*. La retta corrispondente in S_5 ad una *schiera di coppie di punti* è tutta contenuta in M_4^3 e nel 1^o caso incontra F_2^4 in due punti, corrispondenti ai due punti doppi dell'involuzione, nel 3^o caso la tocca in un punto, nel 2^o non la incontra affatto.

Ne segue facilmente che i sistemi lineari doppi di coniche di π composti interamente di coppie di punti sono pure di due specie: un sistema di 1^a specie è costituito da tutte le coppie di punti di una retta, un sistema di 2^a specie è costituito da tutte le coppie di punti di π che contengono un punto fisso (4). In un sistema di

(4) Nelle mie *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, 19, 1884 [V. queste «Opere», III, pp. 485-501]), ho studiato tutte le specie possibili di fasci di quadriche composti totalmente di coni di data specie. Da essa si ha appunto in particolare (v. n^0 26) che le sole specie di schiere di coppie di punti sono le due che sopra accennai. Quanto ai sistemi lineari doppi, perchè un tal sistema sia composto tutto di coppie di punti, dovrà potersi ottenere congiungendo mediante schiere di coppie di punti una tale schiera ad una coppia fissa. Ora se questa schiera è di 1^a specie, la coppia fissa

1ª specie vi sono infiniti punti doppi formanti una retta, mentre in un sistema di 2ª specie vi è un solo punto doppio.

A queste due specie di sistemi lineari doppi di coppie di punti corrispondono due specie di piani in M_4^3. Un piano di 1ª specie è il piano di una conica di F_2^4 corrispondente alla retta di π, che contiene le coppie di punti del sistema a cui quello corrisponde. La tangente in un punto a quella conica corrisponde all'involuzione parabolica su quella retta di π avente per punto doppio il punto corrispondente a quello; quindi ad una coppia di punti della retta corrisponde nel piano di 1ª specie considerato il punto comune alle due tangenti alla conica nei punti che su questa corrispondono ai due punti della detta coppia. Si ritrova così l'*Uebertragungsprincip* di HESSE, ma da un punto di vista più elevato, poichè qui la corrispondenza usata da HESSE tra i punti di un piano e le coppie di punti di una retta fa parte della corrispondenza tra i punti di M_4^3 e le coppie di punti di π (5) (V. anche la nota al n⁰ seguente). Un piano di 2ª specie è invece il luogo delle rette tangenti a F_2^4 in un suo punto, corrispondente al punto fisso comune a tutte le coppie del sistema doppio di 2ª specie che rappresenta il piano, ossia è piano tangente di quella superficie. Esso corrisponde proiettivamente a π: in fatti ad ogni suo punto corrisponde in π una coppia, di cui un punto essendo fisso si può trascurare considerando solo l'altro; allora ai punti di una retta qualunque del piano di 2ª specie corrisponderanno in π (una schiera di 2ª specie di

---

dovrà stare sulla retta che è sostegno della schiera ed allora ogni altra coppia di punti su questa retta apparterrà ad una stessa involuzione insieme con la coppia fissa e con una determinata coppia dell'involuzione formante quella schiera. Se invece la schiera fissa è di 2ª specie, la coppia fissa dovrà avere un punto nel punto fisso di quella schiera, ed è chiaro che ogni altra coppia godente di questa proprietà sarà con quella e con una determinata coppia della schiera fissa in una stessa schiera di 2ª specie. (Se la schiera fissa è insieme di 1ª e di 2ª specie, la coppia fissa potrà essere rispetto ad essa nella 1ª o nella 2ª relazione). Nel 1º caso il sistema doppio di coppie di punti ottenuto è quello appunto che chiamai di 1ª specie, nel 2º caso è quello di 2ª specie.

Non esistono *schiere di punti doppi*; ne segue che F_2^4 non contiene alcuna retta.

(5) Inoltre in questo modo quel principio di trasporto non compare più come un ingegnoso artifizio, ma bensì come proveniente naturalmente dal fatto che le coppie di punti di una retta formano un sistema lineare doppio di coniche-inviluppi nel quale i punti doppi della retta stessa formano un sistema semplice quadratico.

coppie di punti, cioè) i punti di una retta, sicchè realmente la corrispondenza tra i due piani sarà proiettiva.

3. La varietà M_4^3 contiene dunque due serie di ∞^2 piani (e nessun altro piano, come risulta dal ragionamento fatto); in altri termini essa è determinata dalla superficie F_2^4 in due modi diversi: come luogo dei piani contenenti le coniche di questa superficie e come luogo dei piani tangenti di questa. Risulta poi immediatamente dalle cose dette che per ogni punto di M_4^3 passano un piano di 1ª specie e due di 2ª specie, che due piani di diversa specie non s' incontrano in generale, ma possono incontrarsi in una tangente di F_2^4, mentre due piani di 1ª specie s'incontrano sempre in un punto di F_2^4 e due piani di 2ª specie s'incontrano in un punto qualunque di M_4^3; ecc.

Consideriamo un piano tangente fisso π' di F_2^4: ogni suo punto P' ha per imagine in π una coppia di punti, di cui uno fisso corrispondente (come doppio) al punto di contatto di F_2^4 con π' e l'altro mobile P corrispondente al punto di contatto di F_2^4 col secondo piano tangente di questa superficie passante per P'. La corrispondenza tra P e P' nei due piani π e π' è proiettiva (n^0 2). Dunque: *i piani tangenti di* F_2^4 *incontrano alcuni di essi scelti ad arbitrio in punti corrispondenti di piani proiettivi* (6). *La varietà* M_4^3 *si può quindi generare come luogo dei piani congiungenti i punti corrispondenti di tre piani proiettivi.*

4. Poichè due piani aventi un punto comune stanno in un S_4, segue che due piani della stessa serie di M_4^3 stanno in un S_4, il quale conterrà anche, com'è facile vedere, un piano di specie diversa. Così se quei due piani sono di 1ª specie, l'S_4 che li congiunge conterrà il piano delle tangenti alle due coniche di F_2^4 gia-

---

(6) Questa proprietà dei piani tangenti di F_2^4 è analoga a quella delle tangenti di una conica. Ciò corrisponde ad un'analogia tra la nostra rappresentazione di M_4^3 (luogo di quei piani tangenti) sulle coppie di punti di un piano π e la rappresentazione di Hesse di un piano sulle coppie di punti di una retta. Come in questa seconda rappresentazione si sceglie sul piano una conica proiettiva alla retta e si fa corrispondere al punto d'intersezione di due sue tangenti la coppia dei punti della retta corrispondenti ai punti di contatto di queste, così nella nostra rappresentazione al punto di M_4^3 in cui si tagliano due piani tangenti di F_2^4 si fa corrispondere la coppia dei punti di π corrispondenti ai punti di contatto di quei piani.

centi in quelli nel loro punto comune, cioè il piano tangente in questo ad F_2^4; e poichè passa per un piano tangente a questa superficie, quell'S_4 le sarà esso stesso tangente. Viceversa un S_4 tangente ad F_2^4 in un suo punto la taglia in due coniche passanti per questo punto. Quindi l'S_4 congiungente due piani di 2ª specie di M_4^3, cioè due piani tangenti di F_2^4, taglia questa superficie in due coniche coincidenti nell'unica conica che passa pei due punti di contatto di quelli, ossia tocca F_2^4 lungo tutta quella conica e contiene perciò il piano di questa e gli ∞^1 piani tangenti nei punti di essa ad F_2^4; esso si dirà *tangente doppio* per questa superficie.

Abbiamo visto (n⁰ 1) che gli S_4 di S_5 (o meglio le sezioni che essi determinano su F_2^4) corrispondono alle coniche di π come luoghi; tra essi gli ∞^4 S_4 tangenti di F_2^4 corrisponderanno alle coniche di π degenerate in coppie di rette e gli ∞^2 S_4 tangenti doppi alle coniche di π degenerate in rette doppie. Considerato poi co' suoi punti un S_4 tangente di F_2^4 corrisponde ad un sistema lineare quadruplo di coniche (inviluppi) di π rispetto a cui due date rette sono coniugate, ed un S_4 tangente doppio di F_2^4 ad un sistema lineare quadruplo di coniche tangenti ad una data retta. Quegli S_4 e questi formano rispettivamente due varietà a 4 ed a 2 dimensioni, di cui sarebbe assai facile studiare direttamente le proprietà; ma possiamo invece enunciare queste immediatamente valendoci di un'opportuna osservazione.

5. La corrispondenza nominata ripetutamente tra gli S_4 di S_5 e le coniche-luoghi di π è *lineare*; in fatti gli S_4 di un fascio tagliano F_2^4 in quartiche aventi 4 punti comuni e quindi hanno per corrispondenti un sistema di coniche di π aventi 4 punti comuni, cioè un fascio di coniche, e viceversa ad un fascio di coniche di π corrisponde un fascio di S_4. Dunque, essendo realmente lineare la corrispondenza tra la varietà delle coniche-luoghi di π e la varietà degli S_4 di S_5 (7), lo studio di essa è già contenuto in quello che abbiamo fatto, almeno in parte, della corrispondenza lineare tra la varietà delle coniche-inviluppi di π e la varietà dei punti di S_5. Basterà nei risultati ottenuti sostituire agli enti di π e di S_5 quelli che loro corrispondono per dualità. Allora ai punti di M_4^3 (coppie di punti in π) e di F_2^4 (punti doppi in π) corrisponderanno (coppie

(7) Si noti bene che era necessario assicurarsi di questo per poter trarre la conclusione a cui giungiamo.

di rette in π, cioè) gli S_4 tangenti di F_2^4 e (rette doppie di π, cioè) gli S_4 tangenti doppi. Dunque:

Gli S_4 tangenti di F_2^4 formano una varietà di 3ª classe a 4 dimensioni M_4^3 corrispondente per dualità a M_4^3, e gli S_4 tangenti doppi di F_2^4 una varietà di 4ª classe a 2 dimensioni Φ_2^4 corrispondente per dualità a F_2^4. In Φ_2^4 stanno, come inviluppi di S_4, ∞^2 coni quadrici aventi per *sostegni* dei piani, e questi (pure come inviluppi di S_4) formano la M_4^3. Gli S_4 di un tal cono quadrico corrispondono alle rette di π passanti per un punto fisso, ossia ai sistemi lineari quadrupli delle coniche tangenti rispettivamente a quelle rette; tutti questi sistemi hanno comuni solo quelle coniche degenerate in coppie di punti per le quali un punto è il punto fisso. Ma a questo sistema di coppie di punti corrisponde il piano tangente a F_2^4 nel punto corrispondente a quello fisso. Dunque quegli ∞^2 piani sostegni di coni quadrici, piani i quali corrispondono per dualità a quelli di 1ª specie di M_4^3, sono i piani di 2ª di questa, cioè i piani tangenti di F_2^4. Per dualità poi M_4^3 contiene come inviluppi oltre a quei piani i piani di 1ª specie di M_4^3 e questi godranno rispetto a M_4^3 di proprietà corrispondenti per dualità a quelle di cui godono i piani di 2ª specie di M_4^3 rispetto a questa. Brevemente diremo adunque che le due serie di piani di M_4^3 (o di M_4^3) si corrispondono reciprocamente per dualità.

Così dalle proposizioni dimostrate alla fine del n⁰ 3 segue che: i piani delle coniche di F_2^4, cioè i piani di 1ª specie di M_4^3 sono proiettati da alcuni di essi scelti ad arbitrio mediante sistemi proiettivi di S_4, sicchè la M_4^3 può generarsi come luogo dei piani comuni agli S_4 corrispondenti di tre tali sistemi proiettivi.

6. Una retta di S_5, la quale incontri F_2^4 in un punto, è l'imagine di una schiera di coniche in cui vi sia un punto doppio, cioè di una schiera di coniche aventi un doppio contatto. Ne segue che il cono di 4⁰ ordine a tre dimensioni che proietta F_2^4 da un punto qualunque è l'imagine della serie delle coniche di π bitangenti ad una conica fissa (corrispondente a quel punto): le varie proprietà note di questa serie di coniche, cioè dei *circoli nella geometria piana non-euclidea*, si otterrebbero con notevole facilità ed eleganza dalla considerazione di quel cono (8). — Se poi in particolare il punto da

(8) Mi limiterò qui ad un'applicazione semplicissima di questo concetto. Siano α, β due coniche di π aventi doppio contatto con una terza γ, e siano

cui si proietta F_2^4 sta su M_4^3, il cono che così si ottiene sarà l'imagine di una serie di coniche passanti per due punti fissi, o più brevemente dei *circoli di un piano euclideo.* Quel cono acquista in tal caso un piano doppio: il piano di 1ª specie di M_4^3, il quale passa pel vertice del cono; una sezione fatta su esso con un S_4 sarà perciò una superficie di 4º ordine dotata di una retta doppia (e contenente quindi ∞^2 coniche) ed inoltre (v. nº 9) base di un fascio di coni quadrici di quell'S_4. Tale sezione è dunque una superficie che io già studiai altrove da quest'ultimo punto di vista e da cui dedussi con proiezione le proprietà della superficie romana di STEINER e de' suoi casi particolari [9]. Come lo studio di quel cono coincide collo studio della varietà dei cerchi di un piano, così lo studio di quella superficie, che ne è una sezione, coinciderà collo studio del sistema doppio dei cerchi armonici, come inviluppi, ad una conica fissa.

Coniche armoniche e loro imagini.

7. Una conica considerata come inviluppo ed un'altra considerata come luogo sono *armoniche* quando nella schiera di coniche che le congiunge (considerata come forma di 1ª specie) la prima costituisce l'elemento polare lineare della seconda rispetto alla terna di coniche degeneri, ossia (ciò che è lo stesso) quando nel fascio di coniche che le congiunge la seconda costituisce l'elemento polare

---

rispettivamente A, B e C i punti che rappresentano le tre coniche in S_5: le rette AC, BC taglieranno F_2^4 in due punti A', B', e la retta che congiunge questi starà su M_4^3 e sarà incontrata dalla retta AB in uno C' dei 3 punti che questa ha comuni con M_4^3. Considerando la schiera (di coppie di punti e di 1ª specie, v. nº 2), che ha per imagine la retta $A'B'C'$ avremo dunque che i due poli di contatto di α, β con γ sono divisi armonicamente da una delle 3 coppie di punti appartenenti alla schiera $\alpha\beta$: teorema noto (specialmente sotto la forma correlativa) sulle coniche bitangenti ad una conica fissa.

(9) V. *Étude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions*; Math. Ann., XXIV, pp. 313-444, [V. queste «Opere», III, pp. 339-484]. — Il sig. VERONESE nella Memoria citata considerò invece la superficie di STEINER come proiezione di F_2^4 direttamente sullo spazio ordinario, sicchè lui ed io giungemmo nello stesso tempo con una curiosa coincidenza a due nuovi modi (non diversi sostanzialmente) di studiare quell'interessante superficie.

lineare della prima rispetto alla terna di coniche degeneri. Ne segue che al sistema quadruplo delle coniche-inviluppi armoniche ad una conica-luogo fissa di π corrispondono i punti dell'S_4 polare (lineare) del punto corrispondente a quella conica fissa, rispetto alla varietà M_4^3. Ora in quel sistema quadruplo le coniche ridotte a punti doppi costituiscono appunto la conica fissa considerata, sicchè a questa, come luogo di punti, corrisponderà il detto S_4 (o la sua intersezione con F_2^4). Dunque: *un punto ed un* S_4, *i quali rappresentino la stessa conica come inviluppo e come luogo sono polo e polare rispetto ad* M_4^3. Quindi, per dualità, essi saranno pure polo e polare rispetto a M_4^3, sicchè le due varietà (di punti e di S_4) M_4^3 e M_4^3 sono in tal relazione che considerando di un punto l'S_4 polare lineare rispetto ad M_4^3 e di questo S_4 il punto che ne è polare lineare rispetto a M_4^3, si ritorna al primo punto.

Segue pure dalla natura della relazione armonica tra due coniche che al sistema quadruplo delle coniche-luoghi armoniche ad una conica-inviluppo fissa di π corrispondono i punti della M_4^2 polare quadratica del punto corrispondente a questa conica fissa rispetto ad M_4^3. Per dualità, ecc. ecc.

8. La M_4^2 polare di un punto P rispetto ad M_4^3 passa (in forza delle note proprietà dei gruppi polari nelle forme di 1ª specie) per la superficie doppia di M_4^3, cioè per F_2^4, ed incontra inoltre M_4^3 in ogni punto tale che l'S_4 tangente in esso a questa varietà passi per P. Ora ad una retta tangente ad M_4^3 in un suo punto corrisponde una schiera di coniche in cui due coniche degeneri coincidono nella coppia di punti di π corrispondente a quel punto, coppia congiunta da una tangente comune a tutta la schiera; quindi l'S_4 tangente in un punto ad M_4^3 rappresenta il sistema quadruplo delle coniche tangenti ad una retta fissa, ossia è (n^0 4) un S_4 tangente doppio di F_2^4 e tocca M_4^3 non solo nel punto considerato, ma lungo tutto un piano di 1ª specie corrispondente alla retta fissa. Dunque la M_4^2 polare di P rispetto ad M_4^3 taglia questa varietà secondo una $M_3^{2.3}$ avente F_2^4 per superficie doppia e composta di ∞^1 piani di 1ª specie. La M_4^2 contiene due distinti sistemi di ∞^3 piani ([10]); ma quegli ∞^1 piani della $M_3^{2.3}$ tagliandosi a due a due in un punto solo (n^0 3) apparterranno ad uno stesso sistema.

([10]) V. anche pel seguito la mia Memoria: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. Acc. Torino, (2) 36 [V. queste « Opere », III, pp. 25-126]).

I due sistemi di ∞^3 piani della M_4^2 polare di P rispetto ad M_4^3 si comportano dunque in modo diverso rispetto ad F_2^4. Per vedere meglio ciò consideriamo un S_3 passante per P e per uno di quei piani: taglierà ancora M_4^2 in un piano di sistema diverso da quello. Quell'S_3 taglia poi M_4^3 in una superficie cubica ordinaria a 4 punti doppi nei punti d'intersezione dell'S_3 con F_2^4, ed il punto P gode rispetto a questa superficie cubica della proprietà che la sua quadrica polare rispetto ad essa si scinde nei due piani considerati. Ora è facile scorgere che, per ogni superficie cubica a 4 punti doppi dello spazio ordinario, dei 10 punti, le cui quadriche polari si scindono in coppie di piani (punti doppi dell'Hessiana) solo 4 non stanno sulla superficie e la coppia polare di ciascuno di essi si compone di un piano passante per 3 punti doppi e di un piano passante solo pel quarto. Dunque: *Nella* M_4^2 *polare di un punto qualunque rispetto ad* M_4^3 *(punto che non stia su questa varietà) i piani dell'un sistema secano in un punto la* F_2^4 *e quelli dell'altro sistema la secano in tre punti.*

Tra i piani della M_4^2 ve ne sono però, come vedemmo, ∞^1 formanti una $M_3^{2\cdot 3}$ e secanti F_2^4 secondo coniche e che appartengono ad uno stesso sistema. Tra quelli dell'altro sistema ve ne sono di quelli che tagliano uno qualunque dei primi secondo una retta e quindi la sua conica in due punti e che perciò contengono 2 e quindi 3 punti di F_2^4. Dunque gli ∞^1 piani della M_4^2 secanti la F_2^4 secondo coniche appartengono allo stesso sistema che i piani secanti in un sol punto.

Nel piano π questi risultati s'interpretano senza difficoltà. Così avremo che in un sistema lineare quadruplo di coniche-luoghi, vale a dire nel sistema delle coniche-luoghi armoniche ad una conica-inviluppo fissa, esistono due serie di ∞^3 sistemi lineari doppi di coniche-inviluppi: nei sistemi dell'una serie esiste un punto doppio e quindi la Jacobiana si scinde in un punto ed una curva di 2ª classe; in quelli dell'altra serie esistono 3 punti doppi e la Jacobiana si scinde in 3 punti, cioè tutte le coniche hanno comune un triangolo coniugato (circoscritto, com'è facile vedere, alla conica inviluppo fissa).

9. Supponemmo al n⁰ precedente che il punto P non appartenesse ad M_4^3. Se invece P sta su M_4^3, la sua M_4^2 polare degenera in un cono di 2ª specie avente per sostegno la retta polare di P rispetto a quella conica di F_2^4 il cui piano passa per P. In fatti uno spazio S_3 passante per questo piano taglia M_4^3 oltre che nel

piano stesso in una quadrica ordinaria; il piano polare di P rispetto a questa passa per la retta considerata e genera col variare di S_3 la M_4^2 polare di P. Dall'essere adunque quella M_4^2 un cono quadrico di 2ª specie segue che essa può ottenersi proiettando dalla retta che ne è sostegno una quadrica ordinaria e che essa contiene in conseguenza due sistemi distinti di ∞^1 spazi ordinari: però è facile vedere che essi non si comportano in modo diverso rispetto a F_2^4, ma solo rispetto ai due punti in cui la retta sostegno del cono M_4^2 incontra F_2^4.

Anche la rappresentazione su π conduce agli stessi risultati. Al cono M_4^2 polare di P corrisponde la serie delle coniche rispetto a cui due dati punti A, B di π sono coniugati (p. e. la serie delle iperboli equilatere del piano), alla retta che ne è sostegno la schiera di 1ª specie delle coppie di punti armoniche con quella. I due sistemi di ∞^1 S_3 contenuti in quel cono corrispondono a quelle serie lineari triple di coniche-inviluppi appartenenti a quella serie (quadratica) quadrupla, le quali si compongono delle coniche rispetto a cui uno dei due dati punti ha per polare una retta fissa passante per l'altro. — Siccome poi all'S_4 che tocca M_4^3 in P, e quindi lungo il piano di 1ª specie passante per P, corrisponde la serie delle coniche tangenti alla retta AB, sicchè all'intersezione di quell'S_4 col cono M_4^2 corrispondono le due serie delle coniche tangenti a quella retta rispettivamente in A ed in B, così quell'intersezione scomponendosi in due S_3, quell' S_4 sarà tangente al cono M_4^2.

Consideriamo un punto H di M_4^3 e la retta polare di esso rispetto alla conica di F_2^4 giacente nel piano di 1ª specie passante per H. I coni M_4^2 polari dei punti di questa retta rispetto ad M_4^3 formano fascio ed hanno, per quanto dimostrammo, per sostegni delle rette passanti per H; inoltre essi sono tutti tangenti all'S_4 che tocca M_4^3 lungo il piano di 1ª specie nominato. La base di quel fascio di coni sarà evidentemente il cono a 3 dimensioni che proietta F_2^4 da H, sicchè noi vediamo che una sezione di questo cono fatta con un S_4 si può considerare come la base di un fascio di coni quadrici a 3 dimensioni dell'S_4 i quali siano tutti tangenti ad uno stesso S_3 ed abbiano i vertici su una retta; l'asserzione fatta alla fine del n⁰ 6 è dunque provata.

Gruppi di trasformazioni.

10. Una trasformazione proiettiva del piano π in se stesso muta le coniche in coniche, i sistemi lineari di coniche-inviluppi

in sistemi lineari e le coniche degeneri in coniche degeneri. Dunque le corrisponde una trasformazione proiettiva di S_5 in cui F_2^4 non muta. Viceversa ogni tale trasformazione di S_5 corrisponde evidentemente ad una trasformazione proiettiva di π; sicchè:

La superficie F_2^4 *si trasforma in se stessa con* ∞^8 *trasformazioni proiettive di* S_5 (11). *La geometria proiettiva del piano coincide colla geometria proiettiva di* S_5 *nella quale però si fissi la superficie* F_2^4, *cioè si prenda per «gruppo fondamentale»* (12) *il gruppo delle suddette* ∞^8 *omografie che mutano questa superficie in se stessa.*

Possiamo poi aggiungere (v. anche n⁰ 6): *La geometria metrica generale del piano coincide colla geometria proiettiva di* S_5 *nella quale però si fissi* F_2^4 *ed un punto, il quale si prenderà su* M_4^3 *se quella geometria metrica diventa euclidea.*

11. Una correlazione in π determina una corrispondenza lineare tra le coniche-inviluppi e le coniche-luoghi e tra punti e rette di π e quindi determina in S_5 una corrispondenza reciproca (tra i punti e gli S_4), nella quale F_2^4 e Φ_2^4 si corrispondono (e così pure M_4^3 e M_4^3); questa corrispondenza non costituisce un *sistema nullo,* cioè non sta ogni punto sull'S_4 corrispondente, poichè altrimenti, accadendo ciò in particolare pei punti di F_2^4, su π ogni punto dovrebbe stare sulla retta corrispondente, il che non può essere, com'è noto, se la correlazione di π non degenera (13). Viceversa ogni reciprocità di S_5 in cui F_2^4 e Φ_2^4 si corrispondano produce in π una correlazione (non degenere, sicchè quella reciprocità non può costituire un sistema nullo). Dunque:

Vi sono in S_5 ∞^8 *correlazioni che fanno corrispondere le* F_2^4 *e* Φ_2^4.

In una di queste correlazioni consideriamo la M_4^2 luogo dei punti che stanno sugli S_4 corrispondenti: le corrisponde in π il sistema delle coniche-inviluppi armoniche alle corrispondenti coniche-luoghi; ed all'intersezione della M_4^2 con F_2^4 corrisponde la conica luogo dei punti di π che stanno sulle rette corrispondenti. Dunque quell'intersezione si ridurrà alla C^4 corrispondente a questa conica; vale a dire quella M_4^2 tocca F_2^4 lungo una quartica.

(11) In ognuna di queste trasformazioni tre punti doppi sono su F_2^4 e gli altri tre su M_4^3 nelle intersezioni mutue dei piani tangenti in quelli a F_2^4.

(12) V. Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Erlangen, 1872.

(13) Così resta anche dimostrato che la F_2^4 non può essere tutta contenuta nella M_4^2 luogo dei punti che stanno sugli S_4 corrispondenti.

Tra le ∞^8 correlazioni considerate di S_5 quelle che sono involutorie corrispondono alle correlazioni involutorie di π, cioè alle polarità rispetto alle coniche di π. Dunque: *vi sono* ∞^5 *quadriche* M_4^2 (*tangenti lungo quartiche a* F_2^4) *rispetto a cui le* F_2^4 *e* Φ_2^4 *sono polari l'una dell'altra.* È facile vedere quali serie di coniche corrispondano in π a una qualunque di queste quadriche considerata come luogo e come inviluppo. Queste quadriche furono pure incontrate dal sig. VERONESE (loc. cit., n^0 18), il quale non considerò invece le ∞^8 correlazioni ed omografie di S_5 sopra studiate.

Corrispondenza tra la geometria delle coniche e quella dei complessi lineari di rette.

12. I complessi lineari di rette di uno spazio Σ a 3 dimensioni [14], formano una varietà lineare a 5 dimensioni, in cui quelli *speciali* costituiscono una varietà quadratica a 4 dimensioni (non degenere), la *quadrica di rette.* Si può dunque far corrispondere i complessi lineari di Σ alle coniche di π *linearmente* (cioè sì che le serie lineari dei primi e dei secondi enti si corrispondano pure) ed il modo più generale e più diretto per ottenere le proprietà di questa corrispondenza consiste nel considerare uno stesso S_5 sia come lo spazio costituito da quei complessi, sia come lo spazio costituito da quelle coniche, sicchè ogni punto di S_5 rappresenti sia un complesso di Σ, sia una conica di π. Allora in S_5 vi saranno da considerare le F_2^4 e M_4^3 rappresentanti le coniche degeneri di π e la M_4^2 rappresentante la varietà dei complessi lineari speciali: esse rappresenteranno anche rispettivamente le varietà dei complessi e delle coniche che corrispondono alle coniche degeneri ed ai complessi speciali. Quindi le proprietà di quegli enti di S_5 si tradurranno in altrettante proprietà della corrispondenza [15].

---

[14] O, come diremo talvolta per brevità, *i complessi* di Σ.

[15] Il metodo qui tenuto è sempre da usarsi quando si vogliano far corrispondere linearmente tra loro due varietà lineari ad ugual numero di dimensioni di enti geometrici, come punti, linee, superficie, ecc. In esso si applica il fatto evidente che tutte quelle proprietà di una varietà lineare che dipendono unicamente dalla sua linearità e dalla sua estensione (*Mannigfaltigkeit*) sussistono pure per tutte le varietà lineari aventi la stessa estensione, qualunque ne siano gli elementi. Questo fatto mette in luce l'importanza della geometria proiettiva ad n dimensioni, quando all'elemento o *punto* dello spazio in essa considerato non si attribuisca alcun carattere speciale: da ciascun risultato, a cui essa conduce,

13. Nella corrispondenza lineare più generale la M_4^2 avrà una posizione qualunque rispetto alle F_2^4 e M_4^3; sicchè conchiuderemo:

Nella corrispondenza lineare generale tra le coniche di π ed i complessi lineari di Σ alle rette di Σ, come complessi speciali, corrispondono in π le coniche (inviluppi) di un sistema quadruplo quadratico; alle coniche degenerate in coppie di punti od in punti doppi corrispondono rispettivamente i complessi lineari di una varietà cubica 4 volte infinita e di una varietà quartica 2 volte infinita (le proprietà di queste varietà sono contenute nei numeri prec.). Alle coniche di quel sistema quadruplo quadratico degenerate in coppie di punti o in punti doppi (punti doppi i quali formano una curva di 4° *ordine) corrispondono rispettivamente le rette di un certo complesso cubico (contenente due serie di* ∞^2 *rigate quadriche, ecc.) e quelle di una certa rigata di* 8° *grado composta di rette doppie di quel complesso, ecc. ecc.*

Risulta pure dalle cose precedenti che alle trasformazioni proiettive (e reciproche) di Σ (cioè omografie di S_5 le quali mutano in sè la M_4^2 ([16])) corrispondono quelle trasformazioni lineari delle coniche di π che mutano in sè il sistema quadruplo quadratico

---

si potrà poi, fissando che quel punto sia l'elemento di diverse varietà, ottenere più proposizioni diversissime in apparenza fra di loro. In questo lavoro già se ne vede un esempio; mi sia permesso citarne un altro nel legame tra le geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere che io mostrai altrove (Atti Acc. Torino, XIX, pp. 159-186, [V. queste «Opere», III, pp. 262-287]).

Il signor VERONESE nelle sue importanti ricerche di geometria ad n dimensioni si pone da un punto di vista diverso, in quanto che per lui «l'elemento «generatore (di uno spazio) non è già un elemento di natura qualsiasi, «ma il punto tale quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio» (Mem. cit., nota alla fine dell'introduzione). Con ciò mi pare che, mentre scema quella gran fecondità della geometria a più dimensioni, a cui ho accennato, si va incontro all'obbiezione che il punto, quale si concepisce nel nostro spazio e appunto pel modo con cui qui lo concepiamo, non è più concepibile fuori di esso, ove potrebbe anche non esistere. Nè sembra che, lasciando indeterminata la natura dell'elemento di uno spazio ad n dimensioni si venga a perdere (come pensa quello scienziato) la facoltà di rappresentare le figure e costruzioni di quello mediante figure e costruzioni dello spazio ordinario; anzi il numero delle rappresentazioni viene così ad accrescersi immensamente, potendosi prendere nello spazio ordinario come rappresentanti degli elementi di quelle figure e costruzioni non più soltanto i punti, ma infinite altre specie ivi esistenti di enti geometrici. Credo perciò preferibile non fissare la natura dell'elemento dello spazio che si considera se non quando si vuol scendere alle applicazioni.

([16]) V. KLEIN, *Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen,* Math. Ann., IV, p. 356.

considerato, trasformazioni che non sono in generale proiettive per π; e così pure che alle trasformazioni proiettive di π (cioè omografie di S_5 le quali mutano in sè la F_2^4) corrispondono quelle trasformazioni lineari dei complessi lineari di Σ che mutano in sè la varietà quartica 2 volte infinita (o la varietà cubica 4 volte infinita) considerata, e che non sono in generale trasformazioni proiettive di Σ. Quindi è chiaro che con questo metodo non si ha una corrispondenza tra le geometrie proiettive del piano π e dello spazio Σ (17).

14. Possiamo ottenere tra le due varietà di coniche e di complessi lineari delle corrispondenze più particolari scegliendo in modo particolare la posizione della M_4^2 rispetto alle F_2^4 e M_4^3. Vi sarebbero certe posizioni particolari che condurrebbero a corrispondenze non prive d'interesse, ma il caso più notevole è quello in cui la M_4^2 è la polare quadratica rispetto ad M_4^3 di un punto che non vi sia contenuto (18).

In tal caso i due sistemi di ∞^3 piani contenuti nella M_4^2, cioè per Σ i piani rigati e le stelle di rette, si comportano in modo diverso rispetto a F_2^4 (n^0 7), in quanto che gli uni ne contengono 3 elementi e gli altri uno solo. La F_2^4 giacendo su M_4^2 darà in Σ un sistema di rette, di cui dunque ogni piano rigato, ad esempio, conterrà 3 rette e ogni stella 1 retta sola (oppure viceversa). Vi sono però ∞^1 stelle (v. alla fine del n^0 7) che contengono invece un cono quadrico di rette del sistema; tali stelle formano (l'intersezione della M_4^2 con M_4^3, cioè) un particolare complesso di 3^0 grado. Da tutto ciò si conchiude che quel sistema di rette si compone delle corde di una cubica sghemba di Σ e quel complesso delle rette unisecanti di questa cubica. Tale curva costituisce dunque l'ente fondamentale per Σ. Quanto al piano π, in esso sarà fondamentale la conica armonica, come inviluppo, alla serie delle coniche-luoghi rappresentata da M_4^2. Dunque:

---

(17) Quest'osservazione fu già fatta dal KLEIN, a p. 19 delle *Vergleich. Betrachtungen.*

(18) Escludo il caso in cui il punto sia contenuto in M_4^3 perchè allora la M_4^2 polare degenera in un cono (n^0 9) e quindi non potrebbe più rappresentare la quadrica di rette. In altri termini, una corrispondenza lineare tra le rette dello spazio e le iperboli equilatere di un piano (considerate come inviluppi) non è possibile, perchè di queste due varietà quadratiche l'una è generale, mentre l'altra è degenere.

Si può rappresentare i complessi lineari di rette dello spazio Σ sulle coniche di un piano π in modo che ai complessi lineari speciali, cioè alle rette di Σ, corrispondano le coniche armoniche, come luoghi, ad una conica fissa C^2 *di π. Allora vi sarà in Σ una cubica sghemba* C^3 *le cui corde corrisponderanno ai punti doppi di π considerati come coniche degeneri; le rette che incontrano questa cubica in un punto corrispondono alle coppie di punti congiunte da una tangente alla conica* C^2.

Da quest'ultimo fatto, conseguenza immediata delle cose viste, segue che la corrispondenza tra i complessi lineari di Σ e le coniche di π si può intendere definita nel seguente modo. Una conica C^2 di π ed una cubica C^3 di Σ sono punteggiate proiettivamente. Al punto d'incontro delle tangenti in due punti arbitrari a C^2 considerato come conica degenere corrisponde la corda di C^3 congiungente i due punti di questa che corrispondono a quelli. Allora si scorge senza difficoltà che è determinata in modo unico quella retta appoggiata su C^3 che corrisponde ad una coppia di punti (come conica degenere) data ad arbitrio su una tangente a C^2 ed in generale è perfettamente determinato il complesso lineare che corrisponde ad una conica qualunque di π (perocchè sarà determinata la rigata quartica di corde di C^3 in esso contenuta, e questa rigata individua il complesso lineare che la contiene) ([19]).

15. Ricordando i risultati del n⁰ 10 si ha: *la geometria proiettiva delle coniche di un piano coincide colla geometria dei complessi lineari in cui è fondamentale il gruppo delle trasformazioni lineari di questi le quali mutano in se stessa una cubica gobba (cioè la serie di complessi lineari speciali costituita dalle corde della cubica).* Ma questo gruppo non è quello delle trasformazioni *proiettive* che mutano in sè la cubica, bensì un gruppo più vasto in cui le rette

---

([19]) Se nella rappresentazione considerata si sostituiscono alle coniche-inviluppi di π le coniche polari di C^2 rispetto ad esse si ottiene una nuova rappresentazione, nella quale ai complessi speciali o rette di Σ corrispondono le coniche circoscritte a triangoli circoscritti a C^2, e se ne hanno immediatamente le principali proprietà. La rappresentazione così ottenuta dello spazio rigato su quel sistema di coniche fu trovata dal sig. CREMONA in una lettera al sig. BELTRAMI (Giornale di matem., 10, 1872) e più tardi venne studiata più diffusamente (insieme con quella da noi considerata) dal signor ASCHIERI, che pensò di prenderla come base di uno sviluppo metodico della geometria della retta (V. *Sulla rappresentazione dello spazio rigato con un sistema di coniche sul piano,* Rend. Ist. Lombardo, (2) 12, 1879, pp. 265 e 341. — *Fondamenti per una geometria dello spazio composto di rette,* Mem. Ist. Lombardo, (3) 15, 1883, p. 75).

non si mutano generalmente in rette. Così pure: *la geometria proiettiva dei complessi lineari coincide colla geometria delle coniche di un piano in cui è fondamentale il gruppo delle trasformazioni lineari di queste le quali mutano in se stessa la serie delle coniche-luoghi armoniche ad una stessa conica;* ma questo gruppo non si compone tutto di trasformazioni proiettive, cioè di trasformazioni che mutino le coniche degeneri in coniche degeneri. Volendo solo considerare trasformazioni proiettive nel piano e nello spazio osserviamo che la M_4^2 si muta in se stessa per ogni omografia di S_5 che muti in sè la F_2^4 ed il punto avente quella M_4^2 per polare rispetto ad M_4^3. Considerando adunque il gruppo formato da queste omografie avremo:

La geometria delle trasformazioni proiettive dello spazio ordinario con una cubica fissa coincide colla geometria delle trasformazioni proiettive del piano con una conica fissa (cioè colla geometria metrica generale del piano).

A questo risultato si poteva anche giungere direttamente ed immediatamente notando che entrambe quelle geometrie (ed in generale la geometria delle trasformazioni proiettive di S_n con una C^n normale fissa) coincidono colla geometria proiettiva delle forme razionali di 1ª specie (algebra delle forme binarie) ([20]), il che si accorda con quanto dicemmo alla fine del n⁰ precedente sul modo di ottenere la corrispondenza considerata imaginando punteggiate proiettivamente la cubica e la conica fisse.

Dalle considerazioni svolte negli ultimi numeri risulta, se non erro, evidente che la rappresentazione esaminata per ultimo dei complessi lineari sulle coniche di un piano (rappresentazione di cui qui abbiamo trovato le proprietà fondamentali per una via affatto nuova ed atta a mostrarcene la natura intima), benchè interessante per se stessa, non può considerarsi come un mezzo importante di ricerca nè per la geometria proiettiva della retta e dei suoi complessi lineari nè per la geometria proiettiva del piano e delle sue coniche, e che in particolare non sarebbe vantaggioso prenderla a fondamento per una geometria dello spazio di rette, come il sig. ASCHIERI volle fare.

Torino, Gennaio 1885.

([20]) In fatti una trasformazione lineare (binaria) in una C^n normale di S_n, determina un'omografia in S_n, che muta C^n in se stessa, e viceversa ogni tale omografia di S_n determina una trasformazione lineare binaria su C^n. V. FRANZ MEYER, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883), p. 398.