

# CORRADO SEGRE

---

CORRADO SEGRE

## Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie

*Atti R. Acc. Scienze Torino*, Vol. **19** (1883-84), p. 159–186

*in*: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 262–287

<[http://www.bdim.eu/item?id=GM\\_Segre\\_CW\\_3\\_262](http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_262)>

## XLVII.

# SULLE GEOMETRIE METRICHE DEI COMPLESSI LINEARI E DELLE SFERE E SULLE LORO MUTUE ANALOGIE

«Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XIX, 1883-84, pp. 159-186.

---

In seguito ai lavori di LIE e di KLEIN<sup>(1)</sup> è noto che la geometria dello spazio ordinario, quando si prende per gruppo fondamentale di trasformazioni<sup>(2)</sup> il gruppo delle inversioni (o trasformazioni per raggi reciproci) si può considerare come identica alla geometria proiettiva di un complesso lineare. Ai punti dello spazio ordinario corrispondono le rette del complesso lineare, alle sfere ed ai circoli di quello le congruenze lineari e le rigate quadriche (*Regelschaaren*) di questo. Come in un fascio di sfere vi sono due sfere singolari o sfere nulle, così in un fascio di congruenze lineari contenute nel complesso lineare vi sono due congruenze lineari speciali (dalle direttrici coincidenti). — Se invece di considerare le rette di un complesso lineare si considerano tutte le rette dello spazio, le analogie, facendo astrazione dal numero delle dimensioni degli spazi considerati, rimangono ancora perfettamente: la geometria proiettiva dello spazio di rette e dei complessi lineari di

---

(<sup>1</sup>) V. LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., V, pp. 145-256. — KLEIN, *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann., V, pp. 257-277. — KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872.

(<sup>2</sup>) Pel concetto importantissimo, e forse non abbastanza noto, del gruppo fondamentale di trasformazioni veggansi i lavori citati di KLEIN ed inoltre la sua seconda Memoria: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann., VI, pp. 112-145.

queste corrisponde perfettamente alla geometria delle inversioni dello spazio ordinario di punti e delle sfere. La ragione intima di queste analogie sta nel fatto che tanto l'una quanto l'altra geometria equivalgono alla geometria di uno spazio lineare rispettivamente a 5 ed a 4 dimensioni, in cui il gruppo fondamentale di trasformazioni consta delle trasformazioni lineari che non mutano una quadrica fissa non degenerare rispettivamente a 4 ed a 3 dimensioni, la quale nell'un caso ha per elemento ciò che si suol chiamare *retta*, nell'altro caso ciò che si suol chiamare *punto*. In altri termini quelle due geometrie non sono altro che le *geometrie metriche* di spazi lineari rispettivamente a 5 ed a 4 dimensioni, quando in ciascuno di questi spazi si prenda per *assoluto* una quadrica non specializzata. In questo modo si vede anche che se si considera l'*angolo* (o *distanza*) di due complessi lineari colla quadrica di rette per assoluto, vale a dire coll'introduzione del rapporto anarmonico determinato da due tali complessi coi due complessi speciali del loro fascio, a questo *angolo* corrisponde appunto l'*angolo* di due sfere inteso nel senso ordinario, poichè è noto<sup>(3)</sup> che quest'angolo corrisponde appunto all'assumere per assoluto nello spazio di sfere la quadrica dei punti-sfere.

Ma la ricerca di analogie tra le geometrie metriche *ordinarie* (*euclidee*) delle rette e dei punti non pare che finora sia stata fatta; eppure tali analogie esistono e non sono meno notevoli che quelle dianzi accennate tra la geometria proiettiva delle rette e la geometria delle inversioni dei punti. Noi ci proponiamo appunto di mostrarle in questa Nota: vedremo come esse siano tali che la geometria metrica ordinaria dei punti e delle sfere può considerarsi come caso particolare di quella delle rette e dei complessi lineari, quando si scambino tra loro le parole *punto* e *retta*, *sfera* e *complesso lineare*. E il fondamento di queste analogie verrà da noi trovato nel fatto che entrambe quelle geometrie metriche ammettono, per così dire, due *assoluti*, dei quali l'uno è la quadrica di rette o la quadrica dei punti, e l'altro è nella geometria metrica delle rette una quadrica degenerare, la quale determina il complesso delle rette secanti l'assoluto euclideo, e nella geometria metrica dei punti l'insieme di quelle sfere che si riducono a piani. Ora questi secondi assoluti, rappresentati rispettivamente da una nuova quadrica e da un piano, sono tali che questo può considerarsi come caso particolare di quello.

---

(3) V. CREMONA, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* (Mem. Acc. Lincei, (2) 3, n° 27).

Analiticamente poi giungeremo allo stesso risultato in conseguenza del fatto che, usando coordinate lineari generali di sfere e di complessi lineari (e, come casi particolari, di punti e di rette), vedremo che l'espressione del momento di due rette, ovvero del prodotto della distanza di queste per la tangente del loro angolo, si riduce, con una particolarizzazione delle funzioni che vi entrano, all'espressione della distanza di due punti in coordinate pentasferiche generali. Indi stabiliremo alcuni dei teoremi più noti e più importanti riguardanti i complessi lineari, i loro assi, i loro parametri, i loro mutui momenti, ecc., mediante l'uso delle coordinate più generali di retta e di complesso lineare, cosa che non crediamo sia stata fatta finora (poichè quei teoremi furono tutti dimostrati o sinteticamente, o analiticamente, ma coll'uso di sistemi di coordinate assai particolari<sup>(4)</sup>), e che costituisce pure uno scopo della presente Nota. La generalità del sistema di riferimento vedremo accrescere eleganza alle dimostrazioni senza renderle più lunghe: così noi troveremo senza difficoltà le coordinate più generali dell'asse di un complesso lineare dato e ne dedurremo le più importanti proprietà di questo asse. Come casi particolari poi delle proposizioni e delle formule così trovate, avremo delle proposizioni e delle formule riguardanti la geometria metrica delle sfere, le quali anzi varranno per uno spazio euclideo ad un numero qualunque di dimensioni. Vedremo ad esempio che all'asse e al parametro di un complesso lineare corrispondono il centro ed il quadrato del raggio di una sfera, e che alla relazione nota tra l'angolo di due sfere, i loro raggi e la distanza dei loro centri corrisponde una relazione, che crediamo nuova, tra l'angolo di due complessi lineari, i loro parametri e le quantità determinanti la posizione relativa dei loro assi.

### § 1.

Le sfere dello spazio ordinario formano una varietà lineare a 4 dimensioni, di cui i fasci costituiscono i sistemi lineari semplicemente infiniti, le stelle costituiscono i sistemi lineari doppiamente

---

<sup>(4)</sup> Per dimostrazioni sintetiche di quei teoremi sui complessi lineari v. REYE, *Geometrie der Lage* (2<sup>te</sup> Auflage, 2<sup>te</sup> Abteilung, pp. 69-77), e D'OVIDIO, *Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari* (Atti Acc. Torino, XVI, 1881). Per dimostrazioni analitiche poi veggasi la *Neue Geometrie des Raumes* di PLÜCKER e la Memoria di DRACH, *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe* (Math. Ann., II, pp. 128-139).

infiniti, ecc. Esse si possono dunque considerare come rappresentate dai *piani* (spazi lineari a 3 dimensioni) di uno spazio lineare a 4 dimensioni  $S_4$ . I fasci di sfere saranno rappresentati dai fasci di *piani* di questo spazio, e siccome in ciascuno di essi vi sono due *sfere nulle*, cioè sfere degenerate in coni, ed una sola sfera di raggio infinito, cioè ridotta ad un piano (ed al piano all'infinito), così concludiamo che in  $S_4$  i *piani* rappresentanti le sfere nulle involuppano una quadrica (a 3 dimensioni)  $R$ , ed i *piani* rappresentanti le sfere infinite, cioè rappresentanti i piani dello spazio ordinario, passano per un elemento fisso  $a$ . Siccome *non* esiste una sfera nulla, tale che ogni altra sfera nulla determini con essa un fascio di sfere nulle, così la quadrica  $R$  non può essere degenerare, cioè avere un piano doppio <sup>(5)</sup>. Vi sono però delle sfere notevoli in quanto che godono della proprietà di essere nello stesso tempo sfere nulle e sfere infinite: le sfere cioè che si compongono, oltre che del piano all'infinito, di un piano tangente all'assoluto euclideo (cerchio immaginario all'infinito). Queste sfere formano  $\infty^1$  fasci, ciascuno dei quali corrisponde ad un punto di contatto di questo assoluto, punto che va riguardato come centro di tutte le sfere di quel fascio; e tutti quei fasci hanno poi comune una sfera, quella che si riduce al piano all'infinito contato doppiamente. Vediamo così come nello spazio  $S_4$  i *piani* passanti per  $a$  e tangenti ad  $R$  formano un solo sistema di  $\infty^1$  fasci aventi tutti comune un *piano*  $\alpha$  corrispondente a quella sfera: donde segue immediatamente che l'elemento  $a$  sta su  $R$  ed ha questo *piano*  $\alpha$  per *piano* tangente. — I punti dello spazio ordinario essendo in generale centri di sfere nulle da essi individuate potremo intenderli rappresentati dai piani tangenti ad  $R$  che rappresentano queste sfere nulle, o meglio ancora dagli elementi di contatto di quei piani con  $R$ . In questo modo i punti dello spazio ordinario saranno rappresentati univocamente nello spazio  $S_4$  dagli elementi di  $R$ , i quali perciò chiameremo anche *punti*. Però siccome nello spazio ordinario tutti i punti all'infinito sono centri di una stessa sfera nulla, il piano all'infinito doppio, ed inoltre ogni punto il quale oltre ad essere all'infinito stia sull'assoluto euclideo

---

(5) Per la proposizione su cui qui ci basiamo e per altre, di cui dovremo servirci, riguardanti la teoria generale delle quadriche, ci sia permesso rinviare il lettore alla nostra Memoria: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, che si sta stampando nelle Memorie di quest'Accademia [questo volume, p. 25-126].

può considerarsi come centro di un fascio di sfere composte del piano all'infinito e di piani tangenti all'assoluto nel punto stesso, così l'elemento  $a$  di  $R$  rappresenterà nello stesso tempo tutti i punti all'infinito dello spazio ordinario, mentre ogni punto all'infinito posto sull'assoluto euclideo sarà rappresentato da una  $\infty^1$  di elementi di  $R$  formanti un *raggio* passante per  $a$  e giacente nell'intersezione di  $R$  con  $\alpha$  <sup>(6)</sup>. — Notiamo poi che nello spazio ordinario due sfere sono ortogonali quando sono coniugate armoniche rispetto alle due sfere nulle del loro fascio: dunque in  $S_4$  i *piani* rappresentanti due sfere sono coniugati rispetto alla quadrica  $R$  quando queste sfere sono ortogonali. In particolare, se l'una delle sfere è nulla la condizione perchè l'altra ne contenga il centro, sarà che il punto di contatto con  $R$  del *piano* rappresentante la prima sfera stia sul *piano* rappresentante la seconda. Ne segue immediatamente che i punti dello spazio ordinario i quali stanno su una sfera sono rappresentati in  $S_4$  dai punti di  $R$  posti sul *piano* rappresentante quella sfera; cosicchè in questo modo di vedere le sfere dello spazio ordinario, considerate come luoghi di punti, figurano in  $S_4$  come le *sezioni piane* della quadrica  $R$  a 3 dimensioni. Quelle tra queste sezioni che hanno un punto doppio, cioè che sono fatte con *piani* tangenti ad  $R$ , costituiscono le sfere nulle e quei punti doppi sono precisamente i punti doppi o centri di queste sfere. Quelle sezioni invece che passano per  $a$  costituiscono le sfere ridotte a piani. I *piani* poi di  $S_4$  i quali passano per  $a$  e sono tangenti ad  $R$  (in punti posti, per conseguenza, sul *piano*  $\alpha$ ), e le sezioni che i *piani* stessi determinano in  $R$ , rappresentano quelle sfere dello spazio ordinario le quali si riducono a piani tangenti all'assoluto euclideo (sfere di raggio indeterminato). — Similmente è chiaro che ogni spazio lineare a 2 dimensioni contenuto in  $S_4$  taglierà  $R$  secondo gli  $\infty^1$  punti di un cerchio, il quale si ridurrà ad una coppia di rette secanti l'assoluto euclideo, cioè di *rette nulle*, se quello spazio è tangente ad  $R$ , e ad una retta qualunque insieme con una retta all'infinito se quello spazio passa per  $a$ . Si vede pure che gli  $\infty^3$  *raggi* (spazi lineari ad 1 dimensione) contenuti in  $R$  costituiscono nello spazio ordinario il complesso delle rette nulle o secanti dell'assoluto, perocchè cia-

---

(<sup>6</sup>) Tutti questi risultati sulla rappresentazione dello spazio ordinario di punti in una quadrica a 3 dimensioni furono ottenuti dal KLEIN nei lavori citati mediante una *proiezione stereografica*; qui abbiamo voluto mostrare un modo diretto di trovarli.

scuno di essi contiene un punto dell'intersezione di  $R$  con  $\alpha$ , cioè un punto dell'assoluto.

Ciò premesso, assumiamo un sistema qualunque di 5 coordinate lineari omogenee  $x_1, x_2, \dots, x_5$  per gli elementi dello spazio  $S_4$ ; allora la quadrica  $R$  avrà una certa equazione quadratica:

$$R_{xx} = \sum R_{ik} x_i x_k = 0,$$

ed il piano  $\alpha$  avrà una cert'altra equazione lineare:

$$\alpha_x = \sum \alpha_l x_l = 0,$$

e siccome queste due superficie devono essere tangenti, tra i coefficienti  $R_{ik}$  ed  $\alpha_l$  passerà questa (sola) relazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0.$$

I punti dello spazio ordinario avranno così 5 coordinate omogenee  $x_i$ , soddisfacenti però alla condizione  $R_{xx} = 0$ . Se poniamo

$$R_{xx'} = \sum \frac{1}{2} \frac{\partial R_{xx}}{\partial x_i} x'_i = \sum R_{ik} x'_i x_k,$$

allora la condizione, perchè i due punti  $x, x'$  stiano su una stessa retta nulla, sarà che essi siano coniugati rispetto ad  $R$ , cioè che  $R_{xx'} = 0$ . Ogni punto  $x$  all'infinito sarà poi caratterizzato, per quanto dicemmo, dal soddisfare oltre che l'equazione  $R_{xx} = 0$  l'equazione lineare  $\alpha_x = 0$ .

I punti che stanno su una sfera soddisferanno ad un'equazione lineare tra le  $x_i$ . Se i coefficienti di quest'equazione si rappresentano con  $R_{ci} = (\partial R_{cc} / \partial c_i) : 2$  (il che si può sempre fare poichè il discriminante di  $R$  non è nullo), vale a dire se quest'equazione si scrive così:

$$R_{cx} = \sum R_{ci} x_i = \sum R_{ik} c_k x_i = 0,$$

noi diremo che le  $c_i$  sono le *coordinate* di quella sfera: in altri termini noi assumeremo come coordinate di una sfera determinata dall'intersezione di  $R$  con un certo piano le coordinate del polo di questo piano rispetto ad  $R$ . La sfera  $c$  si ridurrà ad una sfera nulla, il cui centro avrà le stesse  $c_i$  per coordinate, se  $R_{cc} = 0$ , e si ridurrà ad un piano dello spazio ordinario (col piano all'infinito) quando  $\alpha_c = 0$ .

L'angolo  $\widehat{cc'}$  di due sfere di coordinate  $c_i, c'_i$ , nel senso ordinario di quella parola, coincide, come già notammo, colla *distanza*

(nel senso di CAYLEY e KLEIN) delle sfere stesse, quando per *assoluto* si prenda la quadrica delle sfere nulle<sup>(7)</sup> ed è quindi dato, per la nota formula di CAYLEY, dalla formula :

$$\cos \widehat{cc'} = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}} \sqrt{R_{c'c'}}}.$$

Quell'angolo sarà retto se le due sfere sono ortogonali, sicchè in questo caso si avrà:  $R_{cc'} = 0$ , condizione che si sarebbe pure dedotta dal dover essere i due *piani* di  $S_4$  rappresentanti quelle sfere coniugati rispetto ad  $R$ .

Cerchiamo ora la distanza  $\overline{xx'}$  tra due punti  $x, x'$  di coordinate date  $x_i, x'_i$  (soddisfacenti alle condizioni  $R_{xx} = 0, R_{x'x'} = 0$ ). Per questo notiamo che i due punti individuano questa distanza a meno del segno, sicchè solo il quadrato della distanza sarà una funzione ad un sol valore delle  $x_i, x'_i$ . Questa funzione dovrà essere omogenea di grado zero, sia nelle  $x_i$ , sia nelle  $x'_i$ , poichè non può alterarsi se le  $x_i$  ovvero le  $x'_i$  si moltiplicano per un fattore qualunque. Inoltre scrivendo che la funzione stessa ha un valor dato e supponendo che le  $x'_i$  siano date si deve avere l'equazione nelle  $x_i$  di una sfera (di centro  $x'$ ), cioè un'equazione la quale, tenendo conto della  $R_{xx} = 0$ , sia lineare. Dunque quella funzione è espressa da un fratto in cui numeratore e denominatore sono forme lineari nelle  $x_i$ , e, per la stessa ragione, nelle  $x'_i$ . Ora quella funzione deve annullarsi solo quando i due punti  $x, x'$  stanno su una retta nulla, cioè quando  $R_{xx'} = 0$ , mentre essa deve diventare infinita solo quando l'uno dei due punti stessi sia all'infinito, il che accade solo, come vedemmo, quando  $\alpha_x = 0$  oppure  $\alpha_{x'} = 0$ . Dunque quella funzione non può differire che per un fattor numerico da  $R_{xx'}/(\alpha_x \alpha_{x'})$ . E siccome le funzioni  $R_{xx}, \alpha_x$  non cessano, uguagliate a zero, di rappresentare gli enti visti, se vengono moltiplicate per un fattore numerico qualunque, così noi possiamo supporre che l'una o l'altra delle funzioni stesse venga moltiplicata per un tale fattore numerico, che

---

(7) Questo, che fu dimostrato analiticamente dal CREMONA, nella Memoria citata, risulta immediatamente per via sintetica dal fatto che le sfere di un fascio corrispondono proiettivamente ai loro piani tangenti in un punto comune, e gli angoli mutui di questi piani, cioè di quelle sfere, si ottengono, com'è noto, scegliendo per assoluto in quel fascio di piani i due piani tangenti al cerchio immaginario all'infinito, cioè i due piani tangenti nel punto considerato alle due sfere nulle del fascio.

si abbia precisamente :

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}} \quad (8).$$

## § 2.

Procederemo in modo simile per stabilire in coordinate generali di rette le formule fondamentali di geometria metrica della retta. La retta può considerarsi come l'elemento  $x$  di una quadrica non degenera  $R$  a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni  $S_5$ : le sue coordinate  $x_i$  soddisfano dunque all'equazione di questa quadrica

$$R_{xx} = \sum R_{ik} x_i x_k = 0.$$

(8) Benchè la via tenuta per giungere a questo risultato ci sembri preferibile, pure indicheremo un altro modo di giungervi, il quale in sostanza differisce poco da quello tenuto dal nostro caro amico GINO LORIA nel suo lavoro sulle sfere [Mem. Acc. Torino, (2) 36, 1884]. Rispetto a tre assi cartesiani ortogonali siano

$$S_i = \alpha_i (x^2 + y^2 + z^2) - 2l_i x - 2m_i y - 2n_i z + p_i = 0,$$

dove  $i = 1, 2, \dots, 5$ , le equazioni di 5 sfere qualunque [linearmente indipendenti]. Ogni altra sfera potrà rappresentarsi con  $\sum x_i S_i = 0$  e le  $x_i$  si potranno perciò assumere come sue coordinate. Il quadrato del suo raggio sarà evidentemente espresso da

$$\frac{l_x^2 + m_x^2 + n_x^2 - \alpha_x p_x}{\alpha_x^2},$$

sicchè la condizione, perchè la sfera si riduca ad un piano, sarà appunto  $\alpha_x = 0$ , ed il numeratore poi di quel fratto sarà la nostra forma quadratica  $R_{xx}$ , a meno di un fattor numerico arbitrario che possiamo prendere uguale a  $-2$ , sicchè :

$$R_{xx'} = \alpha_x p_{x'} + \alpha_{x'} p_x - 2l_x l_{x'} - 2m_x m_{x'} - 2n_x n_{x'}.$$

Se ora si suppone che  $x, x'$  siano due sfere di raggio nullo, allora notando che

$$\left( \frac{l_x}{\alpha_x}, \frac{m_x}{\alpha_x}, \frac{n_x}{\alpha_x} \right) \text{ e } \left( \frac{l_{x'}}{\alpha_{x'}}, \frac{m_{x'}}{\alpha_{x'}}, \frac{n_{x'}}{\alpha_{x'}} \right)$$

saranno le coordinate cartesiane dei loro centri e che  $p_x/\alpha_x, p_{x'}/\alpha_{x'}$  saranno rispettivamente le somme dei quadrati di queste coordinate, si scorge che effettivamente il quadrato della distanza di quei due centri, cioè dei due punti di coordinate pentasferiche  $x_i, x'_i$ , sarà dato da  $R_{xx'}/(\alpha_x \alpha_{x'})$ .

Ogni *piano* di quello spazio taglia da questa quadrica ciò che si suol chiamare un *complesso lineare* di rette; le coordinate  $c_i$  del polo di quel piano rispetto alla quadrica stessa si assumeranno come *coordinate* di questo complesso lineare, cosicchè l'equazione lineare a cui soddisfano le rette del complesso lineare  $c$  avrà la forma:

$$R_{cx} = \sum R_{ci} x_i = \sum R_{ik} c_k x_i = 0,$$

e la condizione perchè il complesso lineare  $c$  sia *speciale* sarà  $R_{cc} = 0$ .

Chiamiamo *angolo*  $\widehat{cc'}$  di due complessi lineari  $c, c'$  quell'angolo che corrisponde al prendere per assoluto la serie dei complessi lineari speciali, cioè la *distanza* degli elementi di  $S_5$  aventi le stesse coordinate, quando si prenda per assoluto la quadrica  $R$ . Sarà dunque:

$$\cos \widehat{cc'} = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}} \sqrt{R_{c'c'}}}.$$

Se i due complessi  $c, c'$  sono in involuzione, segue dalla definizione di questa che  $R_{cc'} = 0$ ; dunque in tal caso sarà  $\widehat{cc'} = \pi/2$ , sicchè due complessi lineari involutori si potranno anche chiamare *complessi ortogonali*.

L'angolo di due complessi lineari è evidentemente una funzione proiettiva od invariante assoluto del sistema di questi (come l'angolo di due sfere è una funzione di queste che non muta per una trasformazione del gruppo delle inversioni). Ma veniamo a considerare funzioni veramente *metriche* di due rette o di due complessi lineari, ed a tal fine anzitutto quell'ente geometrico da cui esse hanno origine. Quest'ente è, come si sa, il complesso quadratico delle rette secanti il cerchio immaginario all'infinito. Possiamo rappresentare questo complesso con un'equazione quadratica

$$\Omega_{xx} = \sum \Omega_{ik} x_i x_k = 0,$$

il cui discriminante sia nullo insieme coi suoi subdeterminanti di 5° e 4° ordine: in altri termini quel complesso proviene dall'intersezione della quadrica  $R$  con una quadrica  $\Omega$  tre volte specializzata. Questo è conseguenza<sup>(9)</sup> del fatto che il complesso delle secanti di una conica (complesso di caratteristica  $[(2\ 2\ 2)]$  nella classificazione

(9) V. le considerazioni sulla classificazione dei complessi quadratici di rette da noi svolte nella nostra Memoria: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, che si sta pure pubblicando tra le *Memorie* di quest'Accademia [questo volume, pp. 127-217].

di WEILER) gode della proprietà caratteristica di avere per rette doppie tutte le rette di un piano, che è il piano della conica stessa. Da questo fatto segue anche che lo spazio lineare a 2 dimensioni degli elementi doppi di quella quadrica  $\Omega$  triplamente specializzata deve stare su  $R$ : i suoi elementi non sono altro che le rette all'infinito dello spazio ordinario. È facile scorgere che queste singolarità della quadrica  $\Omega$  sia considerata da sè, sia per la sua posizione rispetto ad  $R$ , vengono tutte espresse dicendo che tutti i *piani* polari degli elementi dello spazio  $S_5$  rispetto ad  $\Omega$  sono tra loro coniugati rispetto ad  $R$  (sicchè in particolare ciascuno di essi è tangente ad  $R$ ), vale a dire che, ponendo in generale

$$\Omega_{xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega_{xx}}{\partial x_i},$$

si ha :

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'h} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0,$$

qualunque siano le quantità  $c_i, c'_i$  (coordinate di due elementi dello spazio  $S_5$  o di due complessi lineari qualunque).

Volendo ora determinare le funzioni metriche di due rette  $x, x'$  notiamo che l'angolo  $\widehat{xx'}$  di esse è la *distanza* degli elementi  $x, x'$  dello spazio  $S_5$  quando in questo si prenda, come assoluto, la quadrica  $\Omega$ : ciò è evidente quando le rette  $x, x'$  si tagliano e negli altri casi poi risulta dal fatto che se  $x''$  è una retta qualunque parallela ad  $x'$  e tagliante  $x$ , l'angolo di  $x, x'$  è uguale a quello di  $x, x''$ , ed anche la *distanza* (colla quadrica  $\Omega$  per assoluto) degli elementi  $x, x'$  di  $S_5$  è uguale a quella degli elementi  $x, x''$  (poichè il parallelismo di  $x''$  ed  $x'$  è espresso, com'è facile vedere, dal trovarsi questi due elementi di  $S_5$  in uno stesso spazio lineare a 3 dimensioni collo spazio a 2 dimensioni degli elementi doppi di  $\Omega$ ). Ciò posto l'angolo  $\widehat{xx'}$  sarà dato dalle formule :

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}},$$

$$\text{sen } \widehat{xx'} = \frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}}, \quad \text{tg } \widehat{xx'} = \frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}{\Omega_{xx'}}.$$

Per avere poi il momento delle due rette  $x, x'$  notiamo che solo il suo quadrato è perfettamente determinato dalle coordinate di queste, e sarà una funzione razionale omogenea di grado zero delle  $x_i$  e

delle  $x'_i$ ; questa funzione avrà, com'è facile vedere, numeratore e denominatore di 2° grado sia nelle  $x_i$ , sia nelle  $x'_i$ . Ora il momento non si annulla che quando le due rette si tagliano, cioè quando  $R_{xx'} = 0$ ; e non diventa infinito, che quando almeno una delle due rette taglia l'assoluto, cioè quando  $\Omega_{xx} = 0$ , oppure  $\Omega_{x'x'} = 0$ . Dunque il quadrato di  $\text{mom}(x, x')$  è dato da  $R_{xx'}^2 / (\Omega_{xx} \Omega_{x'x'})$ , a meno di un fattore numerico, che si può però rendere uguale ad 1, moltiplicando tutti i coefficienti della forma  $R$ , o tutti quelli della forma  $\Omega$ , per una quantità conveniente. Si può dunque assumere:

$$\text{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}} \quad (10).$$

(10) Questi risultati si potevano anche ottenere per una via meno diretta valendosi delle formule note relative ad assi cartesiani ortogonali. Per un tale sistema di riferimento si sa che, indicando con  $p_{ik}, p'_{ik}$  le coordinate di due rette  $x, x'$ , il loro angolo ed il loro momento saranno dati (Vedi SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, 3<sup>te</sup> Auflage, I. Theil, p. 67) da:

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{p_{14} p'_{14} + p_{24} p'_{24} + p_{34} p'_{34}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2} \sqrt{p'_{14}^2 + p'_{24}^2 + p'_{34}^2}}$$

$$\text{mom}(x, x') = \frac{p_{12} p'_{34} + p_{34} p'_{12} + p_{23} p'_{14} + p_{14} p'_{23} + p_{31} p'_{24} + p_{24} p'_{31}}{\sqrt{p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2} \sqrt{p'_{14}^2 + p'_{24}^2 + p'_{34}^2}}.$$

Ora se si passa ad un sistema di riferimento qualunque mediante una trasformazione lineare generale delle  $p_{ik}, p'_{ik}$  nelle  $x_i, x'_i$ , le forme

$$p_{14} p'_{14} + p_{24} p'_{24} + p_{34} p'_{34}, \quad p_{12} p'_{34} + p_{34} p'_{12} + \dots$$

diverranno rispettivamente  $\Omega_{xx'}$  e  $R_{xx'}$ , e quindi quelle formule diverranno appunto:

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}}, \quad \text{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}}.$$

E a questo proposito faremo notare come in vari lavori recenti si legga che il momento di due rette è proporzionale a  $p_{12} p'_{34} + p_{34} p'_{12} + \dots$  (o, in coordinate generali, ad  $R_{xx'}$ ), il che non è esatto, poichè ciò dicendo si trascura un fattore dipendente dalle coordinate di entrambe le rette. D'altronde, siccome le coordinate, che si considerano, sono omogenee, occorre, affinchè una funzione delle coordinate di più rette abbia un significato geometrico dipendente solo da queste rette, che essa sia omogenea di grado zero in ciascuna di quelle serie di coordinate.

Dividendo poi questa formula per quella che dà  $\widehat{xx'}$ , si avrà la minima distanza di  $x, x'$ :

$$\text{dist}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}.$$

Dividendola invece per quella che dà  $\cos \widehat{xx'}$ , si avrà l'espressione del prodotto della minima distanza di  $x, x'$  per la tangente del loro angolo. La radice quadrata di questo prodotto, che ci occorrerà spesso di considerare, la chiameremo per brevità *intervallo* tra le due rette  $x, x'$  e la rappresenteremo con  $\overline{xx'}$ , vale a dire porremo:  $\overline{xx'}^2 = \text{dist}(x, x') \times \widehat{xx'}$ . Ciò posto si avrà:

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}}.$$

### § 3.

Noi faremo astrazione, d'or innanzi, dal numero delle dimensioni degli spazi considerati. Inoltre intenderemo che i risultati ottenuti nei due paragrafi precedenti si assumano come definizioni, vale a dire che per *punti* s'intendano gli elementi di una quadrica generale  $R$ , per *sfere* le intersezioni di questa coi *piani* dello spazio lineare in cui questa si trova, e che per *distanza* dei due punti  $x, x'$  s'intenda la quantità  $\overline{xx'}$  definita da:

$$\overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}},$$

dove  $\alpha_x = 0$  è un *piano* fisso tangente ad  $R$ , vale a dire tale che:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0.$$

(È facile vedere che queste definizioni equivalgono a quelle ordinarie di *punti*, *sfere* e *distanze* per spazi *euclidei* non solo a 3, ma ad un numero qualunque di dimensioni). — Similmente con *rette* intenderemo gli elementi di una quadrica generale  $R$ , per *complessi lineari* di rette le intersezioni di questa coi *piani* dello spazio lineare ad  $n$  dimensioni in cui questa si trova, per *angolo*, *momento* ed *intervallo* di due rette  $x, x'$  le quantità  $\widehat{xx'}$ ,  $\text{mom}(x, x')$ , e  $\overline{xx'}$  definite dalle

formule :

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}, \quad \text{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}}}, \quad \overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\Omega_{xx'}},$$

dove  $\Omega_{xx} = 0$  è una quadrica avente uno spazio lineare ad  $m$  dimensioni ( $m \geq (n-1)/2$ ) di elementi doppi, il quale tocchi la quadrica  $R$  lungo uno spazio lineare ad  $n-m-1$  dimensioni; vale a dire  $\Omega$  deve soddisfare alla condizione analitica che, qualunque siano le quantità  $c_i, c'_i$  si abbia :

$$\begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora osserviamo che se il numero considerato  $m$  diventa uguale ad  $n-1$ , la quadrica  $\Omega$  si riduce ad un piano, contato doppiamente, tangente in un punto ad  $R$ , vale a dire diverrà :

$$\Omega_{xx} = \alpha_x^2,$$

dove le  $\alpha_i$  soddisfano alla condizione :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_k & R_{ik} \end{vmatrix} = 0,$$

che si può pure dedurre dalla condizione precedente a cui soddisfaceva  $\Omega$ , notando che  $\Omega_{ci}$  e  $\Omega_{c'k}$  diventano  $\alpha_c \alpha_i$  e  $\alpha_{c'} \alpha_k$ , e quindi il determinante che ivi entra diventa divisibile per  $\alpha_c \alpha_{c'}$ . In tal caso sarà :  $\Omega_{xx'} = \sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{x'x'}} = \alpha_x \alpha_{x'}$ , e le formule che definiscono  $\widehat{xx'}$ ,  $\text{mom}(x, x')$ ,  $\overline{xx'}$  si ridurranno a :

$$\cos \widehat{xx'} = 1, \quad \text{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}}, \quad \overline{xx'}^2 = \frac{R_{xx'}}{\alpha_x \alpha_{x'}},$$

vale a dire l'angolo  $\widehat{xx'}$  tra due rette qualunque  $x, x'$  varrà sempre zero, mentre il quadrato dell'intervallo  $\overline{xx'}$  ed il momento delle rette stesse si riducono entrambi all'espressione  $R_{xx'}/(\alpha_x \alpha_{x'})$ , che era quella del quadrato della distanza tra i due punti  $x, x'$ . Di qui deduciamo la seguente proposizione, che è l'oggetto principale della presente Nota :

*La geometria metrica delle rette e dei complessi lineari include come caso particolare la geometria metrica dei punti e delle sfere<sup>(11)</sup>. Si*

---

(11) I nostri ragionamenti ci mostrano pure che, fatta astrazione dal numero delle dimensioni, la geometria metrica euclidea dei punti e delle sfere sarebbe affat-

*passa da una proposizione appartenente alla prima geometria ad una proposizione appartenente alla seconda cambiando le parole rette e complessi lineari in punti e sfere, uguagliando sempre a zero l'angolo di due rette e ponendo in luogo della radice quadrata del momento di due rette e in luogo del loro intervallo la distanza tra due punti.*

Noi ci proponiamo nei seguenti paragrafi di cercare colle nostre coordinate generali di retta varie formule e proprietà metriche importanti dei complessi lineari; e, applicando ogni volta il principio ora dimostrato, ne trarremo formule e proprietà metriche delle sfere.

#### § 4.

Occupiamoci anzitutto della ricerca dell'asse di un complesso lineare e del centro di una sfera quando siano date le coordinate  $c_i$  del complesso o della sfera. È noto che la retta  $x'$  coniugata di  $x$  rispetto al complesso lineare  $c$  è definita dal fatto che i complessi lineari speciali aventi per direttrici  $x$  e  $x'$  fanno fascio con  $c$ ; e così pure il punto  $x'$  coniugato di  $x$  rispetto alla sfera  $c$  (cioè all'inversione rappresentata da questa sfera) è definito dal fatto che le sfere nulle  $x, x'$  fanno fascio con  $c$ . Di qui si trae immediatamente che per espressioni delle coordinate di  $x'$  in funzione di quelle di  $x$  e di  $c$  si può prendere:

$$(1) \quad x'_i = 2R_{cx} c_i - R_{cc} x_i.$$

Ora la definizione ordinaria dell'asse  $x$  di un complesso lineare  $c$  equivale a questa: l'asse  $x$  è tale che la sua retta coniugata  $x'$  rispetto a  $c$  è, considerata come complesso lineare speciale, il complesso polare di  $x$  rispetto ad  $\Omega$ . Riducendo  $\Omega$  ad  $\alpha_x^2$ , cioè considerando punti e sfere, questo asse  $x$  diverrà il punto  $x$  avente per coniugato rispetto alla sfera  $c$  l'elemento di contatto del piano  $\alpha$  con  $R$ , vale a dire (§ 1) tutti i punti all'infinito: siccome questo punto  $x$  è, come si sa, il centro della sfera  $c$ , così concludiamo che riducendo  $\Omega_{xx}$  ad  $\alpha_x^2$  passeremo dall'asse del complesso lineare al centro della sfera. Supponiamo che si tratti di rette: allora la proprietà

---

*to identica alla geometria metrica delle rette e dei complessi lineari dello spazio ordinario quando in quest'ultima geometria la conica costituente l'assoluto euclideo si facesse degenerare in una coppia di punti.*

detta dell'asse  $x$  del complesso lineare  $c$  sarà evidentemente espressa dalle equazioni :

$$(2) \quad \varrho \Omega_{xk} = R_{x'k},$$

dove  $\varrho$  è un fattore indipendente dall'indice  $k$ . E siccome  $x'$  rappresentando una retta all'infinito sarà un elemento doppio di  $\Omega$ , così dalle equazioni (1) e (2) dovrà seguire :

$$(3) \quad \Omega_{x'k} = 0.$$

Tra queste varie equazioni (1), (2) e (3) elimineremo  $\varrho$  e le  $x'_i$  nel seguente modo. Sostituendo le espressioni (1) delle  $x'_i$  nelle (2) e (3) avremo :

$$(4) \quad \varrho \Omega_{xk} = 2R_{cx} R_{ck} - R_{cc} R_{xk},$$

$$(5) \quad 2R_{cx} \Omega_{ck} - R_{cc} \Omega_{xk} = 0.$$

Da queste (4) e (5) rispettivamente moltiplicando per  $c_k$  e sommando si ha :

$$\varrho \Omega_{cx} = R_{cc} R_{cx}, \quad 2R_{cx} \Omega_{cc} = R_{cc} \Omega_{cx},$$

donde :

$$\varrho = \frac{R_{cc}^2}{2\Omega_{cc}},$$

sicchè sostituendo nelle (4) avremo :

$$R_{cc} R_{xk} = 2R_{cx} R_{ck} - \frac{R_{cc}^2}{2\Omega_{cc}} \Omega_{xk},$$

ossia, in virtù delle (5) :

$$R_{cc} R_{xk} = 2R_{cx} R_{ck} - \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}} R_{cx} \Omega_{ck},$$

e, siccome possiamo moltiplicare per uno stesso fattore tutte le  $x_i$ , potremo anche assumere :

$$(6) \quad R_{xk} = 2\Omega_{cc} R_{ck} - R_{cc} \Omega_{ck}.$$

Queste equazioni sono quelle che determinano l'asse  $x$  del complesso lineare  $c$ . Esse sono nelle  $x_i$  equazioni di 1° grado ad altrettante incognite ed i coefficienti di queste hanno un determinante  $|R_{ik}|$ , che non è nullo : quindi la risoluzione si può sempre fare. Ma conviene tenere le formule (6) senza mutazioni. Esse sono le *formule che danno le coordinate dell'asse di un complesso lineare dato, qualunque sia il sistema di riferimento* (e più immediatamente ancora danno i coefficienti dell'equazione di quell'asse, considerato come complesso delle rette che lo secano).

Le stesse formule si possono anche ottenere col seguente procedimento. Nello spazio  $S_5$  nel quale la quadrica  $R$  costituisce l'ordinario spazio di rette consideriamo l'elemento  $c$  le cui coordinate  $c_i$  sono quelle del complesso lineare considerato. L'asse  $x$  di questo complesso è un elemento di  $R$  la cui retta coniugata, cioè il secondo elemento  $x'$  d'intersezione di  $R$  col raggio che congiunge  $c$  con  $x$ , ha per piano tangente ad  $R$  il piano polare di  $x$  rispetto ad  $\Omega$ . Ma il piano polare di  $x$  rispetto ad  $\Omega$  è, per la natura della quadrica  $\Omega$ , sempre tangente ad  $R$  in un elemento doppio di  $\Omega$ : questo elemento doppio di  $\Omega$  è dunque  $x'$ , donde segue (trovandosi  $c$  ed  $x$  in uno stesso raggio con  $x'$ ) che il piano polare di  $x$  rispetto ad  $\Omega$  è lo stesso che il piano polare di  $c$  rispetto ad  $\Omega$ . E come gli elementi  $x$ ,  $c$  ed  $x'$  sono su uno stesso raggio, così i loro piani polari rispetto ad  $R$  dovranno formare fascio, cioè dovrà essere:

$$R_{xk} = \lambda R_{ck} + \mu \Omega_{ck}.$$

Basta dunque determinare  $\lambda : \mu$  in modo che realmente il piano di coordinate  $R_{xk}$  sia tangente ad  $R$ , cioè che sia:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda R_{ci} + \mu \Omega_{ci} \\ \lambda R_{ck} + \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} = 0.$$

Il determinante del 1° membro si trasforma tosto nei seguenti:

$$\begin{vmatrix} -\lambda(\lambda R_{cc} + \mu \Omega_{cc}) & \lambda R_{ci} + \mu \Omega_{ci} \\ \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda(\lambda R_{cc} + 2\mu \Omega_{cc}) & \mu \Omega_{ci} \\ \mu \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix} = \\ = -\lambda(\lambda R_{cc} + 2\mu \Omega_{cc}) |R_{ik}| + \mu^2 \begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{ck} & R_{ik} \end{vmatrix}.$$

La seconda parte di quest'espressione è nulla, come vedemmo, in causa delle relazioni tra  $\Omega$  ed  $R$ . Dunque rimane, dividendo per  $- \lambda |R_{ik}|$ , che non è nullo:

$$\lambda R_{cc} + 2\mu \Omega_{cc} = 0.$$

Possiamo dunque prendere  $\lambda = 2\Omega_{cc}$ ,  $\mu = -R_{cc}$  e sostituendo abbiamo di nuovo le formule (6) prima trovate:

$$(6) \quad R_{xk} = 2\Omega_{cc} R_{ck} - R_{cc} \Omega_{ck}.$$

Quando dalla geometria dei complessi lineari si passa alla geometria delle sfere, notammo come l'asse di un complesso lineare si muti nel centro di una sfera. Dunque, come caso particolare delle formule (6), abbiamo che le coordinate  $x_i$  del centro di una sfera di

coordinate  $c_i$  in un sistema di riferimento qualunque sono date dalle formule seguenti:

$$(6') \quad R_{xk} = 2\alpha_c R_{ck} - R_{cc} \alpha_k.$$

Applichiamo ora le formule (6) (che si potranno anche assumere come definizioni dell'asse di un complesso lineare e del centro di una sfera in spazi euclidei a quante si vogliano dimensioni) a trovare le proprietà metriche più notevoli dei complessi lineari e delle sfere, supponendo questi enti definiti come nel § 3. Anzitutto dalle (6) segue, moltiplicandole per le  $c_k$  e sommando:

$$R_{cx} = \Omega_{cc} R_{cc},$$

cosicchè le equazioni (5) (le quali non mutarono per effetto della moltiplicazione delle  $x_i$  per uno stesso fattore, fatta per giungere alle (6)) diverranno:

$$(7) \quad \Omega_{xk} = 2\Omega_{cc}\Omega_{ck}.$$

Ciò posto, indicando con  $z$  una retta qualunque del complesso  $c$ , sicchè  $R_{cz} = 0$ , avremo dalle (6) e (7) moltiplicandole per  $z_k$  e sommandole rispettivamente:

$$R_{xz} = -R_{cc}\Omega_{cz}, \quad \Omega_{xz} = 2\Omega_{cc}\Omega_{cz},$$

e quindi dividendo membro a membro:

$$\frac{R_{xz}}{\Omega_{xz}} = -\frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}},$$

ossia:

$$\overline{xz} = \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}} = \text{cost.}$$

Concludiamo dunque che: *Ad ogni complesso lineare  $c$  corrisponde una retta notevole  $x$  detta asse del complesso, la quale è definita dalle equazioni (6) e gode della proprietà che l'intervallo tra essa ed ogni retta del complesso è costante. Il quadrato di questo intervallo, cioè nella geometria ordinaria il prodotto costante della distanza di ogni retta del complesso dall'asse per la tangente del loro angolo, si chiama parametro del complesso, ed è espresso da  $-R_{cc}/(2\Omega_{cc})$ .*

In particolare avremo che: *Ad ogni sfera  $c$  corrisponde un punto notevole  $x$  detto centro della sfera, il quale è definito dalle equazioni (6') e gode della proprietà che la sua distanza da ogni punto della sfera è costante. Questa distanza costante dicesi raggio della sfera, ed il suo quadrato è espresso da  $-R_{cc}/(2\alpha_c^2)$ .*

In questo modo vediamo come passando dalla geometria dei complessi lineari a quella delle sfere il parametro di un complesso lineare si muti nel quadrato del raggio di una sfera.

Possiamo trovare proposizioni più generali di quelle ora viste. Consideriamo invece che una retta del complesso lineare  $c$  due rette qualunque  $y, y'$  coniugate rispetto a questo: potremo assumere, come già osservammo:

$$(8) \quad y'_i = 2R_{cy} c_i - R_{cc} y_i.$$

Indicando sempre con  $x$  l'asse, noi vogliamo calcolare la quantità  $\widehat{\text{dist}}(x, y) \cdot \text{tg } xy'$ ; sarà (v. § 2):

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) \cdot \text{tg } xy' = \frac{R_{xy} \sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{y'y'} - \Omega_{xy'}^2}}{\Omega_{xy'} \sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}},$$

senza tener conto del segno <sup>(12)</sup>. Ora, dalle (7) abbiamo:

$$\Omega_{cx} = 2\Omega_{cc}^2, \quad \Omega_{xx} = 2\Omega_{cc} \Omega_{cx} = 4\Omega_{cc}^3, \quad \Omega_{xy} = 2\Omega_{cc} \Omega_{cy},$$

ed applicando anche le (8):

$$(9) \quad \Omega_{xy'} = 2\Omega_{cc} \Omega_{cy'} = 2\Omega_{cc} (2R_{cy} \Omega_{cc} - R_{cc} \Omega_{cy});$$

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} \Omega_{y'y'} - \Omega_{xy'}^2 &= \Omega_{xx} (4R_{cy}^2 \Omega_{cc} - 4R_{cy} R_{cc} \Omega_{cy} + R_{cc}^2 \Omega_{yy}) - \\ &\quad - 4\Omega_{cc}^2 (4R_{cy}^2 \Omega_{cc}^2 - 4R_{cy} R_{cc} \Omega_{cy} \Omega_{cc} + R_{cc}^2 \Omega_{cy}^2) = \\ &= R_{cc}^2 (\Omega_{xx} \Omega_{yy} - 4\Omega_{cc}^2 \Omega_{cy}^2) = R_{cc}^2 (\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2). \end{aligned}$$

$$(10) \quad \frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{y'y'} - \Omega_{xy'}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}} = R_{cc}.$$

La (9) poi, in virtù delle (6), si riduce a:

$$\Omega_{xy'} = 2\Omega_{cc} R_{xy},$$

sicchè infine sostituendo abbiamo:

$$\widehat{\text{dist}}(x, y) \cdot \text{tg } xy' = \frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}.$$

Dunque abbiamo il seguente teorema: *Il prodotto della distanza di una retta qualunque dello spazio dall'asse di un complesso lineare per*

<sup>(12)</sup> Parecchie delle quantità che consideriamo sono di tal natura che solo i loro valori assoluti sono determinati: questa è la ragione per cui alcune delle formule che troviamo valgono solo se si fa astrazione dai segni.

la tangente dell'angolo che la retta coniugata fa con quest'asse ha un valor assoluto costante ed uguale a quello del parametro del complesso.

Perchè questo teorema si possa applicare alle sfere senza ridursi ad un'identità, bisogna trasformarlo nel seguente modo. Essendo  $\widehat{\text{dist}}(x, y) \cdot \text{tg } \widehat{xy'}$  e  $\widehat{\text{dist}}(x, y') \cdot \text{tg } \widehat{xy}$  uguali al parametro, il loro prodotto sarà uguale al quadrato di questo. Ma quel prodotto vale  $\widehat{\text{dist}}(x, y) \text{tg } \widehat{xy} \times \widehat{\text{dist}}(x, y') \text{tg } \widehat{xy'}$ , ossia  $\overline{xy}^2 \times \overline{xy'}^2$ . Dunque: il prodotto degl'intervalli tra due rette coniugate qualunque e l'asse del complesso è costante ed uguale al parametro di questo.

Ed in particolare dunque, passando alla geometria dei punti e sfere:

*Il prodotto delle distanze di due punti qualunque coniugati rispetto ad una sfera dal centro di questa è costante ed uguale al quadrato del raggio* <sup>(13)</sup>.

Due rette coniugate qualunque  $y, y'$  rispetto ad un complesso lineare  $c$  hanno pure una relazione semplicissima con tutte le rette di questo complesso. Sia in fatti  $z$  una retta di  $c$ : dalle formule (8) che legano le due rette coniugate  $y, y'$  avremo:

$$R_{y'z} = 2R_{cy} R_{cz} - R_{cc} R_{yz},$$

ossia, essendo per ipotesi  $R_{cz} = 0$ :

§

$$R_{y'z} = -R_{cc} R_{yz},$$

dunque:

$$\frac{\text{mom}(z, y')}{\text{mom}(z, y)} = \frac{R_{y'z}}{\sqrt{\Omega_{y'y'}}} : \frac{R_{yz}}{\sqrt{\Omega_{yy}}} = -R_{cc} \frac{\sqrt{\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{y'y'}}};$$

<sup>(13)</sup> Come due punti coniugati rispetto ad una sfera stanno in linea retta col centro di questa, così due rette coniugate rispetto ad un complesso lineare stanno su un paraboloide equilatero in cui l'asse di questo complesso è una generatrice principale (cioè passante pel vertice); sicchè questi paraboloidi nella geometria della retta corrispondono in certo modo alle rette punteggiate nella geometria dei punti e delle sfere. Ma senza stare a sviluppare questa corrispondenza ci limiteremo a osservare come anche al teorema noto sulla potenza di un punto rispetto ad una sfera corrisponda un teorema nella geometria della retta, il quale si può enunciare così: dato un complesso lineare  $c$  ed una retta qualunque  $r$ , questa è generatrice principale per infiniti paraboloidi equilateri, su ciascuno dei quali stanno (nel sistema di generatrici a cui appartiene  $r$ ) due rette del complesso  $c$ ; orbene, il prodotto degl'intervalli tra queste due rette e la  $r$  è costante. Questo prodotto non è altro che il parametro del complesso lineare di asse  $r$  ed involutorio (ortogonale) a  $c$ , complesso rispetto al quale quelle due rette di  $c$  sono sempre coniugate.

quindi: *il rapporto dei momenti di due rette fisse coniugate rispetto ad un complesso lineare con ogni retta del complesso è costante.*

Passando alla geometria delle sfere avremo come caso particolare del teorema precedente il seguente: *Il rapporto delle distanze di due punti fissi coniugati rispetto ad una sfera da ogni punto di questa è costante.*

Quanto al primo rapporto, lo si suol chiamare *modulo* del complesso rispetto alle due rette coniugate  $y, y'$  che si considerarono. Il suo valor assoluto  $R_{cc} \sqrt{\Omega_{yy}} / \sqrt{\Omega_{y'y'}}$  si può scrivere in virtù della equazione (10), così:

$$\frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{y'y'} - \Omega_{xy'}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{y'y'}}} : \frac{\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{yy}}}, \text{ ossia } \widehat{xy'} : \widehat{xy}.$$

Vediamo dunque che in valor assoluto: *Il modulo di un complesso lineare rispetto ad una sua coppia di rette coniugate è dato dal rapporto dei seni degli angoli che queste fanno coll'asse del complesso.*

## § 5.

Consideriamo ora due complessi lineari  $c, c'$ , dei quali siano  $x, x'$  gli assi. Come vedemmo, nel § precedente, questi saranno determinati dalle equazioni:

$$(1) \quad R_{xi} = 2\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc} \Omega_{ci},$$

$$(1') \quad R_{x'k} = 2\Omega_{c'c'} R_{c'k} - R_{c'c'} \Omega_{c'k}.$$

I due complessi  $c, c'$  ci danno luogo a considerare varie funzioni metriche. Anzitutto i loro parametri  $r^2, r'^2$  saranno dati, come vedemmo, dalle formule:

$$(2) \quad r^2 = -\frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}, \quad r'^2 = -\frac{1}{2} \frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}}.$$

L'angolo  $\widehat{cc'}$  poi dei due complessi, quale fu definito nel § 2, sarà dato da:

$$(3) \quad \cos \widehat{cc'} = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}} \sqrt{R_{c'c'}}}.$$

Inoltre possiamo considerare quelle funzioni che dipendono soltanto dagli assi  $x, x'$  dei due complessi. L'angolo  $\widehat{xx'}$  di questi assi è dato da:

$$\cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}}.$$

Ma le formule (7) del § precedente ci danno, come conseguenze delle (1), (1') :

$$\Omega_{xk} = 2\Omega_{cc} \Omega_{ck}, \quad \Omega_{x'k} = 2\Omega_{c'c'} \Omega_{c'k},$$

donde si trae:

$$\Omega_{xx'} = 2\Omega_{cc} \Omega_{cx'}, \quad \Omega_{cx'} = 2\Omega_{c'c'} \Omega_{cc'}$$

e quindi :

$$\Omega_{xx'} = 4\Omega_{cc} \Omega_{c'c'} \Omega_{cc'}.$$

Inoltre :

$$\Omega_{xx} = 4\Omega_{cc}^3, \quad \Omega_{x'x'} = 4\Omega_{c'c'}^3.$$

Dunque sostituendo si ha :

$$(4) \quad \cos \widehat{xx'} = \frac{\Omega_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}} \sqrt{\Omega_{c'c'}}}.$$

Questa formula ci dà dunque l'angolo degli assi di due complessi lineari in funzione delle coordinate di questi. Essa si poteva anche ottenere dall'osservazione del fatto, che essa stessa ci mostra, ma che si può anche vedere facilmente per via diretta, cioè che l'angolo degli assi è uguale alla *distanza* dei due complessi, quando si prenda per assoluto la serie quadratica dei complessi soddisfacenti all'equazione  $\Omega_{cc} = 0$ .

Cerchiamo anche il momento dei due assi  $x, x'$ . È chiaro che siccome l'angolo ed il momento di  $x, x'$  bastano a determinare la mutua posizione di queste due rette, e poi i valori dei parametri  $r^2, r'^2$  dei complessi lineari  $c, c'$ , di cui esse sono gli assi, bastano a determinare  $c, c'$ , l'angolo  $\widehat{cc'}$  di questi complessi dovrà essere determinato dalle 4 quantità dette. In altri termini è chiaro che tra le 5 quantità  $\cos \widehat{cc'}, \cos \widehat{xx'}, \text{mom}(x, x'), r^2, r'^2$  dovrà passare una relazione, che noi ci proponiamo appunto di cercare. Il momento di  $x, x'$  è espresso da :

$$\text{mom}(x, x') = \frac{R_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}} \sqrt{\Omega_{x'x'}}}.$$

Ora, per un risultato avuto dianzi, sarà :

$$\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x'x'}} = 4\Omega_{cc} \Omega_{c'c'} \sqrt{\Omega_{cc} \Omega_{c'c'}}.$$

Quanto ad  $R_{xx'}$  avremo dalle (1) :

$$R_{xx'} = \sum x'_i (2\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc} \Omega_{ci}),$$

sicchè eliminando le  $x'_i$ , tra quest'equazione e le (1'), le quali si possono scrivere:

$$2\Omega_{c'c'} R_{c'k} - R_{c'c'} \Omega_{c'k} = \sum x'_i R_{ik},$$

avremo:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} R_{xx'} & 2\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc} \Omega_{ci} \\ 2\Omega_{c'c'} R_{c'k} - R_{c'c'} \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} R_{xx'} - 2\Omega_{c'c'} (2\Omega_{cc} R_{cc'} - R_{cc} \Omega_{cc'}) & 2\Omega_{cc} R_{ci} - R_{cc} \Omega_{ci} \\ - R_{c'c'} \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} R_{xx'} + 2R_{cc} \Omega_{c'c'} \Omega_{cc'} + 2R_{c'c'} \Omega_{cc} \Omega_{cc'} - 4R_{cc'} \Omega_{cc} \Omega_{c'c'}, & - R_{cc} \Omega_{ci} \\ - R_{c'c'} \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix} = \\ &= (R_{xx'} + 2R_{cc} \Omega_{c'c'} \Omega_{cc'} + 2R_{c'c'} \Omega_{cc} \Omega_{cc'} - 4R_{cc'} \Omega_{cc} \Omega_{c'c'}) |R_{ik}| + \\ &+ R_{cc} R_{c'c'} \begin{vmatrix} 0 & \Omega_{ci} \\ \Omega_{c'k} & R_{ik} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

In causa delle relazioni tra  $\Omega$  ed  $R$  vedemmo che la seconda parte di quest'espressione è nulla, qualunque siano le quantità  $c_l, c'_l$ . Rimane dunque:

$$0 = R_{xx'} + 2R_{cc} \Omega_{c'c'} \Omega_{cc'} + 2R_{c'c'} \Omega_{cc} \Omega_{cc'} - 4R_{cc'} \Omega_{cc} \Omega_{c'c'}.$$

Sostituendo nell'espressione di  $\text{mom}(x, x')$  il valore, che di qui si trae, di  $R_{xx'}$  ed il valore dianzi trovato di  $\sqrt{\Omega_{xx} \Omega_{x'x'}}$  avremo:

$$\text{mom}(x, x') = \left( -\frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}} - \frac{1}{2} \frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}} \right) \frac{\Omega_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc} \Omega_{c'c'}}} + \frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc} \Omega_{c'c'}}}.$$

Applicando dunque le formule (2), (3), (4) e notando che:

$$\frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc}} \sqrt{\Omega_{c'c'}}} = 2 \frac{R_{cc'}}{\sqrt{R_{cc}} \sqrt{R_{c'c'}}} \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{R_{cc}}{\Omega_{cc}}} \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{R_{c'c'}}{\Omega_{c'c'}}},$$

avremo la relazione cercata, cioè (scegliendo convenientemente i segni dei radicali):

$$(5) \quad \text{mom}(x, x') = (r^2 + r'^2) \cos \widehat{xx'} - 2rr' \cos \widehat{cc'}.$$

Questa relazione assai notevole, e che crediamo nuova, lega le funzioni metriche del sistema di due complessi lineari. Se invece del momento dei due assi  $x, x'$  si volesse il loro intervallo  $\overline{xx'}$ , si avrebbe dividendo la (5) per  $\cos \widehat{xx'}$ :

$$(6) \quad \overline{xx'}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \frac{\cos \widehat{cc'}}{\cos \widehat{xx'}}.$$

Dati i due assi  $x, x'$  ed i parametri  $r^2, r'^2$  dei due complessi, la formula (5), ovvero la (6), ci darà l'angolo  $\widehat{cc'}$  dei complessi. In particolare la condizione perchè i due complessi siano involutori essendo che  $\widehat{cc'} = \pi/2$ , cioè  $\cos \widehat{cc'} = 0$ , si avrà allora:

$$(r^2 + r'^2) \cos \widehat{xx'} - \text{mom}(x, x') = 0.$$

Questa condizione per l'involuzione di due complessi lineari coincide in sostanza con quella data dal KLEIN<sup>(14)</sup>. Il 1° membro  $(r^2 + r'^2) \cos \widehat{xx'} - \text{mom}(x, x')$  venne da questo scienziato chiamato *momento* dei due complessi lineari e noi vediamo dalla formula (5) che questo momento è uguale al doppio prodotto delle radici quadrate dei parametri dei due complessi lineari pel coseno dell'angolo di questi, ed è dato in coordinate generali di complessi lineari dalla formula

$$(7) \quad \text{mom}(c, c') = \frac{R_{cc'}}{\sqrt{\Omega_{cc} \Omega_{c'c'}}},$$

analoga a quella che dà il momento di due rette<sup>(15)</sup>.

Se la forma quadratica  $\Omega_{xx}$  si riduce ad  $\alpha_x^2$ , vale a dire se passiamo alla geometria delle sfere (in uno spazio euclideo ad  $n$  dimensioni),  $c$  e  $c'$  saranno due sfere aventi per centri i punti  $x, x'$  e per raggi  $r, r'$ ; la quantità  $\cos \widehat{xx'}$  si ridurrà ad 1, mentre  $\widehat{cc'}$  diverrà l'angolo delle due sfere, e la formula (5) ovvero la (6) ci daranno

<sup>(14)</sup> *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten*, Math. Ann., II, p. 368.

<sup>(15)</sup> Da quella formula poi supponendo che il complesso  $c'$  sia il complesso di riferimento avente per equazione  $x_i = 0$ , cioè sia tale che  $R_{c'k} = 0$  per  $k \geq i$ , si ha che il momento di un complesso qualunque  $c$  con questo è dato da  $c_i R_{c'i} / \sqrt{\Omega_{cc} \Omega_{c'c'}}$ , donde si conchiude che le coordinate generali  $c_i$  di un complesso lineare sono quantità proporzionali ai momenti di questo complesso rispetto ai complessi fissi di riferimento moltiplicati rispettivamente per delle costanti fisse. A questo significato geometrico di quelle coordinate, già stato enunciato dal KLEIN nella Memoria dianzi citata si può sostituirne un altro servendosi della nostra espressione  $2rr' \cos \widehat{cc'}$  pel valore del momento di  $c, c'$ ; si ha cioè che le coordinate  $c_i$  sono proporzionali ai coseni, moltiplicati per costanti fisse, degli angoli che il complesso  $c$  fa coi complessi fissi di riferimento. Questa interpretazione (proiettiva, mentre quella era metrica) nel caso particolare, in cui questi complessi di riferimento siano a due a due in involuzione, fu già data dal KORNIGS nella Memoria di cui tra poco parleremo.

come caso particolare :

$$(6') \quad \overline{xx'}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \widehat{cc'},$$

relazione ben nota tra l'angolo di due sfere, i loro raggi e la distanza dei loro centri. Ne segue per condizione di ortogonalità delle due sfere :

$$r^2 + r'^2 - \overline{xx'}^2 = 0.$$

Dalla (7) poi avremo :

$$2rr' \cos \widehat{cc'} = r^2 + r'^2 - \overline{xx'}^2 = \frac{R_{cc'}}{\alpha_c \alpha_{c'}}.$$

Ritornando alla formula (6) le si può dare un'apparenza alquanto diversa. Consideriamo una retta qualunque  $x''$  comune ai due complessi  $c, c'$ . Come vedemmo, le radici quadrate  $r, r'$  dei parametri di  $c, c'$  non saranno altro che gl'intervalli tra  $x''$  e gli assi  $x, x'$  di questi complessi. Quindi, la (6) si potrà scrivere così :

$$(8) \quad \overline{xx'}^2 = \overline{xx''}^2 + \overline{x'x''}^2 - 2 \overline{xx''} \cdot \overline{x'x''} \frac{\cos \widehat{cc'}}{\cos \widehat{xx'}},$$

e ci dà una relazione fra tre rette qualunque  $xx'x''$  e l'angolo dei complessi lineari passanti per l'una di esse ed aventi le altre rispettivamente per assi. Essa si può enunciare così: *Se gli intervalli fra 3 rette qualunque dello spazio si prendono come lati di un triangolo rettilineo euclideo, il prodotto del coseno di un angolo qualunque di questo pel coseno dell'angolo delle due rette il cui intervallo costituisce il lato opposto a quello è uguale al coseno dell'angolo dei due complessi lineari aventi rispettivamente queste due rette per assi e passanti per la terza retta.*

In questo modo un gruppo di 3 rette qualunque può dar luogo ad una specie di trigonometria, in cui la formula (8) e le sue analoghe si possono considerare come fondamentali.

Nell'enunciato ora dato della (8) ci siamo valse di una formula di trigonometria ordinaria, la quale però si può considerare come una trasformazione della formula dimostrata (6'), o come un caso particolare della stessa (8). Questa ci dà in fatti, indicando con  $x, x', x''$  tre punti qualunque e con  $c, c'$  le sfere di centri  $x, x'$  e passanti per  $x''$  :

$$\overline{xx'}^2 = \overline{xx''}^2 + \overline{x'x''}^2 - 2 \overline{xx''} \cdot \overline{x'x''} \cos \widehat{cc'},$$

e conduce così alla trigonometria dei triangoli rettilinei euclidei, la quale viene in questo modo a scaturire come un corollario dalle formule trovate ((5) ovvero (6) ovvero (8)) riguardanti la geometria dei complessi lineari.

---

Il sig. G. KOENIGS, nella sua pregevole tesi « *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* » (la lettura della quale ci fu consigliata dall'egregio Prof. KLEIN), si occupa pure incidentalmente delle analogie tra la geometria dello spazio ordinario e delle sfere e quella della retta e dei complessi lineari. Però, malgrado l'apparenza, egli non incontra in questo campo risultati nuovi, non essendosi egli spinto al di là del paragone tra la geometria dei raggi reciproci da una parte e la geometria proiettiva dall'altra: le vere geometrie metriche non vennero da esso confrontate, sicchè nessuno dei nostri risultati si trova in quel lavoro. Così nel § VII della 2<sup>a</sup> parte del suo lavoro il sig. KOENIGS adopera l'equazione del complesso lineare sotto forma analoga all'equazione della sfera in coordinate cartesiane ortogonali; ma il suo metodo non gli dà, come analoghi nel complesso lineare al centro e al quadrato del raggio della sfera, l'asse ed il parametro del complesso lineare, ma bensì una retta ed una quantità che dipendono essenzialmente dal sistema di riferimento (il che ha però stretta relazione col nostro enunciato della nota al § 3). Nel § IV della 1<sup>a</sup> parte s'incontra per tre rette qualunque infinitamente vicine tra loro  $A, B, C$  la relazione

$$\text{mom}(B, C) = \text{mom}(A, B) + \\ + \text{mom}(C, A) - 2 \sqrt{\text{mom}(A, B) \cdot \text{mom}(C, A)} \cos \hat{A},$$

dove  $\hat{A}$  è un certo angolo, relazione che si potrebbe considerare come un caso particolare della nostra formula (8) dell'ultimo paragrafo, e dalla quale il KOENIGS deduce relazioni tra i momenti mutui di quelle 3 rette e certi 3 angoli analoghe affatto a quelle che passano in un triangolo rettilineo euclideo tra i quadrati dei lati e gli angoli. Ma, senza che entriamo in altri dettagli per provare il nostro asserto, è facile scorgere che quest'analogia tra le formule relative al sistema di 3 rette infinitamente vicine e quelle relative ad un triangolo rettilineo euclideo poteva dedursi dalla semplice osservazione del fatto noto che *nell'infinitamente piccolo vale la geometria euclidea*, e che l'espressione del momento (o dell'intervallo, quale fu

da noi definito) di due rette infinitamente vicine è una forma quadratica dei differenziali delle coordinate, sicchè per *distanze* infinitesime si possono assumere i momenti delle rette (e si potevano anche assumere i loro intervalli). L'origine invece della formula (8) per rette non infinitamente vicine e dell'analogia che essa presenta colla formula nota di trigonometria euclidea vediamo essere ben altra: essa è nel fatto da noi stabilito che *la geometria metrica dello spazio ordinario e delle sfere può considerarsi come caso particolare della geometria metrica della retta e dei complessi lineari.*

Torino, 18 Dicembre 1883.