Corrado Segre

Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni

Mem. R. Acc. Scienze Torino, Vol. **36** (1883), p. 3–86

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 25–126

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_25>

XLII.

STUDIO SULLE QUADRICHE IN UNO SPAZIO LINEARE AD UN NUMERO QUALUNQUE DI DIMENSIONI

«Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino»,
Serie II, Tomo XXXVI, 1883, pp. 3-86.

PREFAZIONE (¹)

Die mathematischen Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Werth und ihre Absicht ruht gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

(FELIX KLEIN — *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.* — Erlangen, 1872, S. 43).

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5.

(KLEIN — *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie,* Math. Ann., V, s. 261).

Il presente lavoro è diviso in tre parti distinte: le prime due riguardano la geometria di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni e studiano in un tale spazio la prima le proprietà proiettive di una quadrica, la seconda quelle di un fascio (o schiera) di quadriche, delle loro *quartiche* d'intersezione, e di quei sistemi di

(¹) Questa prefazione non riguardava soltanto la presente Memoria, ma anche quella che verrà pubblicata in seguito in questo stesso volume [questo vol., n⁰ XLIII] e che conterrà le applicazioni dei risultati qui ottenuti alla geometria della retta e specialmente delle sue serie quadratiche. Queste due Memorie costituivano dapprima un unico lavoro, presentato dall'autore come dissertazione di laurea alla R. Università di Torino il 29 Maggio 1883.

quartiche su una quadrica, che ho chiamato quartiche *omofocali*, e che provengono dall'intersezione di questa quadrica colle quadriche di una schiera a cui essa appartenga. La terza parte poi riguarda l'applicazione delle teorie così svolte al caso in cui il numero delle dimensioni dello spazio considerato sia uguale o minore di 5, e più precisamente a quelle quadriche rispettivamente a 4, 3, 2 dimensioni con le quartiche in esse contenute, che costituiscono l'ordinario spazio di rette, il complesso lineare e la congruenza lineare di rette, coi complessi quadratici, congruenze quadratiche e rigate biquadratiche, che in essi rispettivamente sono contenuti.

La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti applicazioni alla geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o *punto* di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che poi fa lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sè, la natura intima del quale si lascia indeterminata, non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perchè dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro. Sorta, si può dire, colla celebre Memoria del 1854 di RIEMANN « *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* » (2), la geometria ad n dimensioni va sviluppandosi secondo due vie diverse: l'una riguarda la teoria della curvatura degli spazi e si connette quindi alla geometria non-euclidea, l'altra invece studia la *geometria proiettiva* degli spazi *lineari* (cioè di curvatura nulla, « ebene Mannigfaltigkeiten » di RIEMANN) ed è appunto questa ch'io

---

(2) Bisogna però notare che già prima il GRASSMANN nella sua « *Ausdehnungslehre* » del 1844 aveva svolto insieme con altri concetti importanti anche questo; ma la sua opera s'incomincia a studiare solo da poco tempo. Il seguente passo assai notevole che si trova in uno scritto del GRASSMANN pubblicato nel 1845 nel « *Grunert's Archiv* » (V. la 2a edizione dell' « *Ausdehnungslehre von* 1844 », p. 277) mostra come nel concetto di quell'acuto scienziato l' « *Ausdehnungslehre* » fosse appunto quella che oggidì chiamiamo « geometria ad n dimensioni » : « *Meine* « *Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre* (*Geometrie*), *d. h. sie* « *ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft,* « *deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist* » perocchè, aggiunge « *die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich den Raum, zurück-* « *geht, ist kein Zweig der reinen Mathematik, sondern eine Anwendung derselben auf* « *die Natur* ».

mi propongo di seguire in questo lavoro. Essa apre ai cultori della matematica un campo sconfinato di ricerche piene d'interesse, le quali comprendono come caso particolare tutta la geometria ordinaria; e si può affermare con sicurezza che da queste ricerche più generali anche questa trarrà un giovamento immenso.

Le relazioni principali che legano tra loro gli spazi lineari contenuti in uno spazio lineare ad n dimensioni furono già date completamente da CLEBSCH, JORDAN, D'OVIDIO, e recentemente in modo meno analitico dal VERONESE. Quindi in una breve introduzione mi limito a ricavare quelle tra queste proprietà, che mi saranno necessarie in seguito. Invece è incompleto lo studio che finora è stato fatto degli spazi di 2° grado o *quadriche* contenute in quello spazio lineare, specialmente per alcune questioni, di cui parlerò tra poco. Il lavoro del VERONESE, a cui ho fatto allusione, è una Memoria assai importante pubblicata nel vol. XIX dei « *Math. Ann.* » (pp. 161-234) e intitolata: « *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der* « *Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Proji-* « *cirens und Schneidens* », nella quale l'autore applica il metodo della proiezione centrale in uno spazio ad n dimensioni allo studio di molte questioni riguardanti questo, particolarmente alla ricerca delle equazioni che legano i caratteri di una *curva* (spazio ad una dimensione) algebrica contenuta in quello spazio. Quel metodo di ricerca era stato introdotto in questa geometria (specialmente per lo studio della geometria su una quadrica) dai lavori che il KLEIN negli anni 1871-1872 pubblicò nelle « *Nachrichten* » di Gottinga e nei « *Math. Ann.* », lavori di grande importanza, che avremo ancora occasione di citare. Già prima del VERONESE, il CLIFFORD aveva fatto qualche applicazione dei concetti di KLEIN nella bella Memoria del 1878 « *On the classification of Loci* » (*Philosophical Transactions*, vol. 169) in cui sono scoperte intorno alle curve di uno spazio ad n dimensioni delle proposizioni generali notevolissime. Ma in essa non sono punto studiate le quadriche; queste compaiono invece nella Memoria del VERONESE, ove hanno però importanza secondaria, sicchè vi è toccata solo qualcuna delle questioni a cui esse dànno luogo. Io, in questa dissertazione, non intendo certamente esaurire la teoria delle quadriche nello spazio ad un numero qualunque di dimensioni, chè questa teoria ha già da se sola una vastità immensa; ma soltanto di risolvere parecchie delle questioni che si presentano più spontanee, e specialmente quelle che più m'importano per le applicazioni che poi intendo farne alla geometria della retta.

Nel § 1 della 1ª parte studio la teoria della polarità rispetto ad una quadrica dello spazio ad $n-1$ dimensioni, il che conduce naturalmente alla considerazione delle quadriche aventi discriminante nullo, cioè *specializzate* una o più volte come luoghi (*coni* di varie specie), ovvero come inviluppi. Nel § 2, prendendo una n-upla polare per sistema di riferimento, dimostro che ogni quadrica si può in infiniti modi trasformare proiettivamente in un'altra, purchè siano entrambe ugualmente specializzate, e ne deduco che le specie di quadriche considerate nel § 1 sono le sole specie che, dal punto di vista proiettivo, vi siano da considerare. Nel § 3 stabilisco le proprietà degli spazi lineari tangenti alla quadrica, le varie equazioni tangenziali di questa, ed il numero e la distribuzione degli spazi lineari di punti delle varie dimensioni contenuti in una quadrica. Noto, a proposito del numero di questi spazi, che non è esatto quello dato dal VERONESE, e nel § 4 ottengo di nuovo lo stesso numero di prima, facendo uso precisamente del metodo usato dal VERONESE e che già dissi esser stato introdotto dal KLEIN, cioè della proiezione (*stereografica*) della quadrica da un suo punto su un piano [*] (vale a dire, su uno spazio lineare ad $n-2$ dimensioni). Nel § stesso approfitto di questa rappresentazione della quadrica su un piano per cercare le relazioni che passano tra i due sistemi diversi di spazi lineari a p dimensioni che sono contenuti nella quadrica ad un numero pari $2p$ di dimensioni. Queste relazioni presentano diversità tra i due casi di p pari ed impari, diversità che risalta pure in un importante teorema, che credo nuovo, e che dà il numero dei punti comuni a due spazi algebrici a p dimensioni contenuti nella quadrica stessa; questo teorema comprende quindi come casi particolari il teorema di CHASLES sul numero dei punti comuni a due curve algebriche segnate su una quadrica ordinaria, ed il teorema di HALPHEN sul numero delle rette comuni a due sistemi algebrici di rette. Finalmente nel § 5 dimostro la possibilità di generare una quadrica ad $n-2$ dimensioni, mediante le intersezioni degli elementi corrispondenti di due sistemi lineari reciproci di piani più volte infiniti, proposizione a cui io ero già giunto indipendentemente, e che credevo nuova, ma che poi ho trovata, enunciata soltanto, nella Memoria del VERONESE.

Viste così le principali proprietà di una quadrica, passo nella 2ª

[*] Qui, e nel seguito, « *piano* » significa sempre « *iperpiano* », come ora si usa dire, e come l'A. stesso ha proposto di dire in un suo lavoro del 1891 (v. queste Opere, vol. 1°, nota (2) a p. 175. Nel seguito va fatta un'avvertenza analoga per « superficie » ed « ipersuperficie », per « spazio algebrico » e « varietà algebrica » [N. d. R.].

parte a dedurne le proprietà relative a fasci e schiere di quadriche. Nel § 1 studio la teoria della polarità rispetto ad un fascio di quadriche, il che conduce a considerare un sistema di spazi lineari ad $n-3$ dimensioni polari dei punti dello spazio, il quale gode di proprietà analoghe a quelle del complesso tetraedrale di rette nello spazio ordinario. Nel § 2 cerco gli spazi quadratici e lineari contenuti nella quartica d'intersezione di un fascio di quadriche, e dalle cose dette nel § 5 della 1ª parte deduco il modo di generare ogni quartica su una data quadrica mediante le intersezioni di questa con sistemi reciproci di piani, donde potrò poi dedurre nella 3ª parte la possibilità di generare ogni complesso quadratico mediante due stelle reciproche di complessi lineari. Nel § 3 passo alla classificazione delle quartiche, intersezioni di quadriche; e qui voglio entrare in qualche dettaglio.

Il problema della riduzione simultanea di due forme quadratiche a somme di quadrati fu risolto, com'è noto, pel caso più generale, da CAUCHY e da JACOBI. Risultava però da questa soluzione che vi sono dei casi in cui quella riduzione simultanea a somme di quadrati non si può effettuare. Nasceva quindi la questione se vi fossero forme (*canoniche*) da sostituire in tali casi alle somme di quadrati, ed anche quest'altra domanda (a cui nel caso di due forme quadratiche riducibili a somme di quadrati già si poteva rispondere): quali condizioni occorrano perchè si possa con una sostituzione lineare trasformare una coppia data di forme quadratiche in un'altra coppia data, cioè perchè queste due coppie si equivalgano dal punto di vista dell'algebra moderna. Ora il WEIERSTRASS (che già aveva studiato quest'argomento in una Memoria del 1858 dei « *Monatsberichte* » dell'Accademia di Berlino) risolveva completamente queste questioni analitiche nella Memoria « *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* » del 1868 (*Monatsb.* di Berlino). Ivi in fatti considerando i *divisori elementari* (« *Elementartheiler* ») del discriminante di una forma bilineare o quadratica ottenuta combinando linearmente ad arbitrio due forme date, il WEIERSTRASS dimostra il seguente importantissimo teorema: « la condizione necessaria e sufficiente affinchè una coppia di forme bilineari o quadratiche si « possa trasformare in un'altra coppia, è che queste due coppie « abbiano gli stessi divisori elementari ». E per via, nel dimostrare questo teorema, egli è condotto a trovare e ad usare in luogo di quelle forme certe espressioni più semplici, che si possono chiamare *forme canoniche* e godono della proprietà di avere per coefficienti precisamente le costanti dei divisori elementari, vale a dire quantità che sono invarianti simultanei della coppia di forme bilineari o quadratiche (3). Subito dopo la pubblicazione della Memoria del WEIERSTRASS, il KLEIN nella sua dissertazione inaugurale « *Ueber* « *die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwi-* « *schen Linien-Coordinaten auf eine kanonische Form* » mostrava come essa si potesse applicare ad una classificazione dei complessi quadratici, e sei anni dopo (1874) il WEILER faceva completamente questa classificazione basata sul lavoro di WEIERSTRASS nella Memoria: « *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten* « *Grades* » (Math. Ann., VII). Finalmente il GUNDELFINGER nelle sue note alla 3ª edizione (1876) delle « *Vorlesungen über ana-* « *lytische Geometrie des Raumes* » di HESSE (V. specialmente pp. 498-525) esponeva con qualche modificazione la teoria di WEIERSTRASS e l'applicava per ultimo alla classificazione della quartica d'intersezione di due quadriche nello spazio ordinario (4).

Ma tutte queste applicazioni geometriche fatte finora del metodo analitico di WEIERSTRASS hanno, a mio avviso, un grave difetto: quello di usare per ciascuno dei casi che può presentare la coppia di forme rispetto ai divisori elementari una nuova coppia di equazioni canoniche (quelle incontrate, come dicemmo, dal WEIERSTRASS, e che variano da caso a caso), studiando sempre su queste, e non su equazioni generali, le proprietà che distinguono il caso che si considera. Insomma, mentre nel concetto di WEIERSTRASS sembra che il teorema che abbiamo riportato fosse quello a cui egli dava principalmente importanza, e che le equazioni canoniche non furono che un mezzo per giungere ad esso, gli scienziati suddetti hanno

---

(3) I rapporti di queste quantità dànno gl'invarianti assoluti della coppia di forme. In particolare se si tratta di forme quadratiche e l'una delle due si considera come *assoluto* dello spazio ad $n-1$ dimensioni, quegl'invarianti assoluti dànno il numero dei parametri che determinano la *forma* di una quadrica di specie qualunque in quello spazio.

(4) Uso dei divisori elementari per una classificazione del gruppo di due quadriche ordinarie, considerate però dal punto di vista della geometria della retta, è pure fatto nella interessante Memoria del VOSS « *Die Liniengeometrie in* « *ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades* » (Math. Ann., X, 1876). Finalmente il metodo di WEIERSTRASS è ora applicato dal mio carissimo amico GINO LORIA nella sua dissertazione di laurea alla classificazione delle ciclidi, o superficie di quarto ordine a conica doppia dello spazio ordinario, basandosi sul fatto che una tal superficie si può rappresentare mediante due equazioni quadratiche tra cinque variabili omogenee (coordinate di sfere), sicchè quella classificazione si può far dipendere dalla classificazione del gruppo di due tali forme quadratiche.

posto queste equazioni in prima linea e non hanno cercato di approfondire invece il significato geometrico di quel teorema analitico. Ne nasce che le loro classificazioni sono lunghe e penose, e più analitiche che geometriche. Il WEILER, particolarmente, dovendo vedere per ciascuna coppia di forme canoniche delle equazioni di un complesso quadratico quali siano le particolarità che distinguono questo, è costretto, volta per volta, a cercarsi nuovamente le equazioni delle rette singolari, l'equazione in coordinate di punti della superficie singolare mediante una trasformazione ausiliaria di quella coppia di equazioni canoniche tale che il sistema di riferimento diventi un tetraedro, e così via; cose queste, che sono gravi difetti per un lavoro, il cui scopo è principalmente geometrico, anzi è di geometria della retta.

Ora, nel § 3 della 2ª parte del mio studio, io ho appunto cercato di approfondire dal lato geometrico quel teorema di WEIERSTRASS e di dedurre dalla parte di esso riguardante le forme quadratiche il modo di fare una classificazione geometrica completa delle quartiche e dei fasci di quadriche in uno spazio ad $n-1$ dimensioni [5]. A tal fine mi baso sulle cose che prima ho svolto in generale intorno alle quadriche specializzate e trovo che ogni *specie* di fascio di quadriche (cioè ogni distribuzione di divisori elementari) è caratterizzata: 1º dal numero delle quadriche specializzate 1, 2, 3, ... volte che esso contiene; 2º dalla posizione che ognuna di queste quadriche ha rispetto alle altre quadriche del fascio. Il riconoscere questa posizione dal solo esame dei gradi dei divisori elementari relativi alla quadrica specializzata che si considera è forse la cosa più difficile; tuttavia io ho trovato alcune regole generali che bastano per quello scopo, come mostrano poi le applicazioni che ne faccio nel § 4 ad una classificazione completa della quartica intersezione di quadriche nello spazio ordinario, e nella 3ª parte del mio lavoro ad una nuova classificazione dei complessi quadratici. Nello stesso tempo che ho trovato che cosa siano le varie *specie* di quartiche nello spazio ad $n-1$ dimensioni, il teorema di WEIERSTRASS mi

---

(5) Applicando invece il teorema di WEIERSTRASS in tutta la sua generalità, cioè per le forme bilineari, si ottiene una classificazione delle coppie di connessi bilineari, vale a dire delle omografie in uno spazio ad $n-1$ dimensioni. Di questa classificazione mi occuperò forse in un altro lavoro, mostrando come anche per essa si possa evitare l'uso delle forme canoniche. Per lo spazio ordinario, e basandosi appunto su queste forme canoniche, questa classificazione insieme con quella del complesso tetraedrale relativo all'omografia stessa è già stata fatta dal LORIA.

dà per ciascuna specie gl'invarianti assoluti ad essa relativi, dei quali assegno un'interpretazione geometrica semplicissima (6).

Nel § 5 studio la schiera di quadriche e la sviluppabile ad essa circoscritta; le singolarità a cui questa può dar luogo nello spazio ad $n-1$ dimensioni sono un primo esempio della estensione immensa che deve prendere la teoria delle singolarità delle superficie quando dallo spazio ordinario si passerà allo spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

Finalmente, nel § 6, studio la geometria delle quartiche segnate su una quadrica fissa, e particolarmente i sistemi di quartiche *omofocali*; questi sistemi dànno luogo a vari spazi *singolari* sulla quadrica fissa, i quali per lo spazio ordinario sono costituiti soltanto dalle 8 generatrici tangenti comuni di tutte le quartiche, mentre nella geometria della retta forniranno le rette singolari (dei vari ordini) di una serie omofocale di complessi quadratici.

Nella 3ª parte di questa dissertazione io applico, come già dissi, i risultati delle prime due parti alla geometria della retta (7).

L'idea di considerare la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni si trova, possiamo dire, in tutti i principali lavori che dalla « *Neue Geometrie des Raumes* » di PLÜCKER (1868-69) in poi si scrissero sulla geometria della retta, e più particolarmente negli importanti lavori del KLEIN e del VOSS. Quanto al KLEIN basti ricordare quel bellissimo scritto « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* » (Math. Ann., V), che in poche pagine contiene un gran numero di concetti fecondi, di cui alcuni già abbiamo citati. Però, sebbene l'idea non sia nuova, pure si può dire, se ben si osserva, che essa non fu ancora posta sistematicamente ad effetto. Si noti inoltre che la teoria dei complessi quadratici svolta dal KLEIN nella sua Me-

---

(6) Dalla classificazione delle quadriche in uno spazio ad $n-1$ dimensioni si può trarre immediatamente la classificazione di quelle superficie di 4° ordine in uno spazio ad $n-2$ dimensioni, che sono dotate di conica (spazio quadratico ad $n-4$ dimensioni) doppia, poichè per avere una tal superficie basta proiettare da un punto qualunque dello spazio ad $n-1$ dimensioni una quartica su uno spazio ad $n-2$ dimensioni, come risulta dalle cose che vedremo nel § 4 della 1ª parte. Una serie di quartiche omofocali su una quadrica viene in questo modo proiettata da un punto di questa, secondo un sistema *ortogonale* di superficie di 4° ordine. Questo si riattacca ancora ai lavori citati del KLEIN ed anche agli studi noti del DARBOUX sulle ciclidi.

(7) È questa terza parte della nostra dissertazione che, come già avvertimmo, verrà pubblicata in un'altra Memoria. (Gennaio 1884).

moria, ormai classica: « *Zur Theorie der Complexe ersten und zweiten Grades* » (Math. Ann., II) si basa quasi sempre sulla possibilità della riduzione delle due equazioni di un complesso quadratico a somme di quadrati, cioè sulla esistenza di 6 complessi lineari *fondamentali* pel complesso quadratico e a due a due involutori; e quindi cessano di valere nella massima parte dei casi le dimostrazioni ivi date, quando il complesso quadratico non sia più quello generale. In particolare non si conosce più nulla intorno alla serie (omofocale) dei complessi quadratici aventi la stessa superficie singolare, intorno ai complessi lineari *fondamentali*, cioè rispetto ai quali il complesso quadratico corrisponde a se stesso, e via dicendo.

Ora a me è riuscito, considerando appunto la geometria della retta come quella di una quadrica a 4 dimensioni in uno spazio lineare a 5 dimensioni, di fare la teoria generale del complesso quadratico, della sua superficie singolare, della sua serie omofocale, dei suoi complessi lineari fondamentali, ecc., qualunque sia la specie del complesso quadratico; ed anzi così facendo io trovo parecchie proprietà che distinguono tra loro le varie specie, mentre il WEILER si era quasi soltanto occupato nella sua classificazione delle proprietà che distinguono le superficie singolari: io ottengo pure queste proprietà, ma colla pura geometria della retta e non col cercare, come fa il WEILER, ogni volta l'equazione di quella superficie in coordinate di punti. Insieme con questo studio faccio pure quello analogo per le congruenze quadratiche e per le rigate biquadratiche, considerando il complesso e la congruenza lineari di rette come quadriche rispettivamente a 3 ed a 2 dimensioni.

Nel § 1, partendo dalla definizione della retta, giungo alle proprietà più semplici di questa e del punto e piano dello spazio ordinario. Questi due enti, punto e piano, compaiono nella geometria della retta come l'analogo dei due sistemi di generatrici di una quadrica ordinaria, e su ciò appunto si basa la legge di dualità. Punti e piani sono cioè le due specie diverse di sistemi lineari doppiamente infiniti di rette, come i fasci sono i sistemi lineari semplicemente infiniti; e questo modo d'introdurre i punti e i piani nella pura geometria della retta presenta molti vantaggi, ed è il solo che sia veramente logico. Nel § 2 ottengo come caso particolare della geometria di una quadrica nello spazio ad $n-1$ dimensioni la teoria dei complessi e congruenze lineari e delle rigate quadriche, i loro casi speciali e la relazione d'involuzione tra essi. Nel § 3 dò un breve cenno sulla teoria generale delle rigate e considero specialmente le rigate cubiche e quartiche, come quelle che sono importanti anche nel seguito del lavoro. Nel § 4 entro finalmente nella teoria del complesso quadratico, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica, le cui proprietà si ottengono come casi particolari da quelle delle quartiche ad un numero qualunque di dimensioni. Sono subito condotto in questo modo a considerare rispettivamente i complessi lineari, le congruenze lineari e le rigate quadriche che sono *fondamentali* per quelle serie quadratiche di rette. Inoltre, il § 2 della 2ª parte conduce immediatamente alla generazione del complesso quadratico mediante stelle reciproche di complessi lineari, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica mediante fasci proiettivi rispettivamente di congruenze lineari e di rigate quadriche. Così trovo pure le rigate quadriche contenute in un complesso ed in una congruenza quadratici (in numero rispettivamente di ∞^4 e di ∞^1), ed i risultati ottenuti concordano perfettamente con quelli ottenuti per tutt'altra via dallo SCHUR nella sua importante « *Inauguraldissertation* » (1879) « *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe* 1. *und* 2. *Grades* ». Ottengo anche immediatamente quali sono i complessi quadratici generabili con fasci proiettivi di complessi lineari. Nel § 5 studio la polarità rispetto ad un complesso quadratico e sono condotto assai semplicemente ad alcune proposizioni dovute allo SCHUR e ad altre del BERTINI e di KLEIN. Cito particolarmente il teorema sulle rette che sono polari delle loro polari: il KLEIN nella Memoria citata lo aveva solo enunciato pel complesso quadratico più generale: a me riesce di darne una dimostrazione semplicissima colle solite considerazioni della pura geometria della retta, dimostrazione che si estende anche a tutti i casi che può presentare il complesso. Nel § 6 considero le rette singolari dei vari ordini di un complesso quadratico qualunque, la superficie singolare e la serie omofocale. I complessi quadratici di questa serie hanno tutti la stessa superficie singolare, ma, com'io noto, non in tutti i casi questa basta a determinare la serie. Quello che importa veramente considerare in una serie omofocale sono, più ancora che la superficie singolare, quelle che io chiamo *focali* e che possono essere congruenze quadratiche, o rigate biquadratiche, o quaterne di rette. Esse dànno tutte le principali proprietà della serie omofocale di complessi quadratici, la classificazione di questi, i loro invarianti assoluti, ecc., e sono l'analogo in un certo senso delle coniche doppie della sviluppabile circoscritta ad una schiera di quadriche nello spazio ordinario e dei vertici di coni quadrici in cui questa sviluppabile può degenerare. Per ogni specie di complessi quadratici e quindi di loro serie omofocali mostro come si ottenga immediatamente il grado di questa serie, cioè il numero dei complessi di essa passanti per una retta arbitraria dello spazio (numero che è $\leqq 4$) ed anche il numero degl'invarianti assoluti di ogni complesso e della serie omofocale, e quale sia il significato geometrico di questi invarianti assoluti. Tutti questi risultati sono nuovi. Indi, considerando la superficie singolare, dimostro in due modi diversi, che mi paiono assai notevoli, il teorema di KLEIN sull'uguaglianza dei rapporti anarmonici dei 4 punti e 4 piani singolari passanti per una retta arbitraria, ed anche un teorema semplicemente enunciato dal VOSS, che lo completa. Poscia mostro in quali relazioni stanno le rette singolari dei vari ordini dei complessi quadratici omofocali colla superficie singolare di questi, qualunque ne sia del resto la specie.

Indi faccio le ricerche analoghe a quelle dei §§ 5 e 6, nel § 7 per le congruenze quadratiche e nel § 8 per le rigate biquadratiche. Nel § 7, dopo la teoria della polarità rispetto ad una congruenza quadratica, teoria già svolta in parte dallo SCHUR nel lavoro citato, passo a considerare la superficie focale della congruenza quadratica, la quale, qualunque sia la specie di questa, è sempre (come io ho dimostrato) superficie singolare per una serie omofocale di complessi quadratici. E qui si presentano le rette singolari di 1^0 e 2^0 ordine di una congruenza quadratica, la *curva singolare* di questa (analogo della *superficie singolare* di un complesso quadratico), e la *serie omofocale* di congruenze quadratiche contenute in un complesso lineare, colle sue *focali* (rigate biquadratiche, o, per eccezione, quaterne di rette). La teoria di questa serie omofocale è nuova; io la ottengo direttamente e quindi da essa si potrebbe ottenere, colla rappresentazione di NOETHER e di LIE del complesso lineare nello spazio di punti, tutta la teoria del sistema omofocale di ciclidi studiato da DARBOUX, MOUTARD, ecc., ed anche i casi particolari di questo sistema. Per ultimo ritrovo e completo alcune proprietà della congruenza quadratica dovute al CAPORALI. Nel § 8 studio la rigata biquadratica, i suoi punti e piani cuspidali e le sue generatrici singolari, e considero una serie (*omofocale*) di tali rigate, le quali hanno la proprietà di aver comuni punti e piani cuspidali: tra esse vi sono in generale 4 rigate quadriche doppie, che sono precisamente le rigate quadriche fondamentali di tutte quelle rigate biquadratiche. Ognuna di queste ha comuni colle 4 rigate quadriche fondamentali 4 quaterne di rette, che sono *generatrici iperboliche* di quella rigata biquadratica; già il VOSS aveva dimostrato che il numero di queste generatrici è 16, ma io mostro pure in tal modo come esse si raggruppano.

Finalmente, nel § 9, tratto la classificazione dei complessi quadratici, la quale comprende quella delle congruenze quadratiche e rigate biquadratiche, e viceversa è data (quasi completamente) dalla classificazione di queste. Da tutta la teoria svolta nei §§ precedenti risultano varie proprietà caratteristiche delle diverse specie di complessi quadratici, e queste specie vengono ad avere una divisione in classi assai naturale, e che s'accorda sia colla pura geometria della retta, sia colle particolarità della superficie singolare come luogo di punti e inviluppo di piani. Evito così i difetti che ho rimproverato alla classificazione del WEILER, e correggo alcuni errori che sfuggirono a questo. Così, ve n'è uno importante che egli fa sempre per tutta la classe di complessi quadratici, la cui superficie singolare è una quadrica doppia (generale o degenerata) e di cui si sarebbe accorto se avesse considerato, com'io faccio, la serie omofocale di complessi quadratici e la loro comune quaterna focale. Finisco col notare come la considerazione degli invarianti assoluti (i quali dànno luogo a diversità tra complessi quadratici di una stessa specie) conduca a trovare le principali proprietà che appunto possono distinguere tra loro i complessi quadratici di una stessa specie, mostrando ciò sul complesso di BATTAGLINI, la cui superficie singolare (*tetraedroide* di CAYLEY) ha proprietà, che si deducono con quella considerazione, da quelle note della superficie di KUMMER.

Quanto al metodo seguito nella presente dissertazione esso è alternativamente sintetico ed analitico. Avrei potuto seguire puramente il metodo sintetico, ma così avrei incontrato alcuni inconvenienti, principalmente quello di non poter più cercare del teorema analitico di WEIERSTRASS, l'interpretazione geometrica per la classificazione delle quartiche; poichè in questo lavoro la mancanza di tempo non mi consentiva di affrontare la ricerca sintetica diretta del teorema geometrico, che equivale al detto teorema analitico, ricerca che si presenta come assai difficile, ma nello stesso tempo attraentissima, e che farò probabilmente altrove. Così pure ho dovuto limitarmi in questo studio, salvo qualche breve cenno, alle quartiche segnate su una quadrica e quindi alle applicazioni ai complessi quadratici; ma i metodi svolti si possono applicare a spazi algebrici qualunque contenuti in una quadrica a più dimensioni e quindi in particolare ad una teoria sintetica dei complessi algebrici di rette, dei sistemi di rette e delle rigate di gradi qualunque; ed anche queste teorie potranno formare oggetto di nuovi lavori. Il campo che rimane da coltivare è immenso, ma l'interesse che esso presenta non è inferiore alla sua vastità: basti questo solo esempio della geometria su una quadrica ad un numero qualunque di dimensioni, la quale, quando sia completa, darà come caso particolare tutta la geometria della retta, ossia la geometria *proiettiva* dello spazio ordinario, e darà pure mediante una proiezione (come ingegnosamente notarono KLEIN e DARBOUX) tutta la geometria *metrica*, *euclidea* e *non-euclidea*, dello spazio ordinario.

Torino, 27 Aprile 1883.

INTRODUZIONE

1. Un insieme continuo [*] qualunque di enti, il cui numero sia m volte infinito (cioè tra i quali ve ne sia in generale un numero finito che soddisfino ad m condizioni semplici qualunque date) dicesi formare uno *spazio ad* m *dimensioni*, di cui quegli enti diconsi *elementi.*

Uno spazio qualunque ad m dimensioni dicesi *lineare* quando si possono attribuire a ciascun suo elemento i valori numerici (reali od immaginari) di m quantità in modo che, *senza alcuna eccezione*, ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio, e viceversa ad ogni elemento di questo corrisponda un solo determinato gruppo di valori di quelle. I valori di queste quantità corrispondenti a quell'elemento si dicono *coordinate* di questo. Rappresentandole coi rapporti di m altre quantità ad una $(m + 1)$-esima, queste costituiranno le $m + 1$ *coordinate omogenee* dell'elemento dello spazio considerato, cosicchè ogni elemento di questo, senza eccezioni, sarà individuato dai rapporti mutui di queste coordinate omogenee e servirà viceversa ad individuare questi loro rapporti (8).

In uno spazio lineare ad m dimensioni è chiaro, che a determinarne ogni elemento si potranno prendere, invece delle $m + 1$ coordinate omogenee, altre $m + 1$ quantità che siano proporzionali a date funzioni lineari omogenee indipendenti di quelle coordinate, poichè date quelle $m + 1$ quantità saranno pure determinate in modo unico le $m + 1$ coordinate omogenee o meglio i loro rapporti. Dunque, per definizione, anche quelle $m + 1$ quantità si potranno assumere come coordinate omogenee dell'elemento di quello spazio; cioè, dato un sistema di coordinate omogenee per gli elementi di uno spazio lineare, si possono assumere in loro vece come altro sistema di coordinate omogenee degli stessi elementi delle quantità proporzionali a funzioni lineari omogenee delle coordinate primitive. Questa sostituzione dicesi *trasformazione di coordinate.* Ma, se si considerano

---

[*] La nozione di « *spazio ad* n *dimensioni* », e in particolare quella di spazio *lineare*, quali sono qua presentate da C. Segre, si prestano ad osservazioni di carattere critico, nelle quali non ci addentriamo. Esse, comunque, non si ripercuotono sul seguito di questo lavoro, nè sulle altre ricerche iperspaziali dell'A. (N. d. R.).

(8) Va solo fatta eccezione pel caso in cui tutte le coordinate omogenee date sono uguali a 0, oppure uguali ad ∞: allora la definizione stessa delle coordinate omogenee prova che non vi è più un elemento determinato dello spazio corrispondente a quei valori delle coordinate.

invece quegli elementi dello spazio considerato i quali hanno per coordinate precisamente nel primitivo sistema i valori delle funzioni lineari omogenee considerate in cui si sian sostituite le coordinate degli elementi dello spazio, si ha così una corrispondenza univoca, che diremo *proiettività*, tra questi elementi. Dei raggruppamenti di elementi dello spazio lineare noi considereremo solo quelle proprietà che non mutano per una trasformazione qualunque di coordinate, cioè (poichè, come vedemmo, le due cose si equivalgono) che valgono pure per i raggruppamenti di elementi che corrispondono a quelli in una proiettività qualunque dello spazio; vale a dire noi ne considereremo soltanto le *proprietà proiettive*.

2. Consideriamo uno spazio lineare qualunque ad $n-1$ dimensioni. Chiameremo *punto* ogni suo elemento, qualunque ne sia la natura (la quale per noi non ha assolutamente importanza). Ogni spazio ad $m-1$ dimensioni, i cui elementi siano punti, sarà perciò contenuto in quello spazio lineare, sicchè sarà $m \leqq n$. Tra questi spazi di punti contenuti nello spazio lineare dato sono notevoli quelli che soddisfano anch'essi alla condizione della linearità. Indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le n coordinate omogenee di un punto dello spazio dato ad $n-1$ dimensioni, e con $y_1, y_2, \ldots, y_m$ le m coordinate omogenee di un punto in uno spazio lineare qualunque ad $m-1$ dimensioni contenuto in quello: è chiaro che per tutti quei punti le coordinate x saranno funzioni omogenee determinate delle y. Noi restringeremo ora il significato dato prima alla parola *lineare* e intenderemo per spazio lineare ad $m-1$ dimensioni *contenuto* nello spazio di punti l'insieme di tutti quei punti le cui coordinate x_i, considerate in quest'ultimo spazio, sono funzioni *lineari* omogenee date di m parametri $y_1, y_2, \ldots, y_m$ (mentre nel senso più generale dell'espressione *spazio lineare*, potrebbe essere lineare lo spazio costituito dall'insieme di quei punti, anche quando queste funzioni omogenee date delle y fossero di un grado qualunque). Di qui segue immediatamente che affinchè le x siano coordinate dei punti di uno spazio lineare ad $m-1$ dimensioni occorre e basta che esse soddisfino a certe $n-m$ equazioni lineari omogenee.

Risulta così come lo spazio lineare ad $n-1$ dimensioni dato contenga altri spazi lineari ad un minor numero di dimensioni, e in qual modo tutti questi si ottengano. Ogni spazio lineare di punti ad $n-2$ dimensioni, che chiameremo pure per brevità *piano*, sarà costituito dai punti le cui coordinate x soddisfano ad una data equazione lineare omogenea, che dicesi *equazione del piano*, ovvero dai punti le cui coordinate si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di altre $n-1$ quantità variabili (coordinate dei punti *sul* piano). Ogni spazio lineare, ad $n-3$ dimensioni, si comporrà dei punti le cui coordinate x si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di altre $n-2$ variabili, ossia soddisfano a due date equazioni lineari omogenee, e quindi anche a quelle ∞^1 che si hanno componendo queste linearmente. E di qui segue che un tale spazio lineare ad $n-3$ dimensioni è l'insieme dei punti comuni, od *intersezione*, di ∞^1 piani aventi appunto rispettivamente quelle equazioni. In generale uno spazio lineare ad $n-k-1$ dimensioni di punti si comporrà di quei punti le cui coordinate x si possono rappresentare come funzioni lineari omogenee di $n-k$ nuove variabili, ossia le cui coordinate x soddisfano a k equazioni lineari omogenee e quindi a quelle ∞^{k-1} che se ne deducono componendole linearmente, donde segue che un tale spazio lineare di punti può riguardarsi come l'intersezione di ∞^{k-1} piani.

3. Indicheremo con S'_m ogni spazio lineare di punti ad m dimensioni, cosicchè tutti i punti costituiscono un S'_{n-1}, che rappresenteremo semplicemente con S. Un piano di punti sarà rappresentato da S'_{n-2}, ed un S'_0 sarà un punto unico. Un piano qualunque è individuato, come vedemmo, dalla sua equazione $\Sigma_i \xi_i x_i = 0$, nella quale le ξ_i sono n coefficienti dati. Il piano è dunque individuato da queste n quantità o meglio dai loro rapporti e serve viceversa ad individuarli. Ne segue, per definizione, che i piani di punti dello spazio S lineare ad $n-1$ dimensioni si possono a loro volta considerare come gli elementi di uno spazio Σ pure lineare e ad $n-1$ dimensioni; le ξ_i saranno allora le coordinate omogenee di un piano considerato come elemento di Σ. Un'equazione lineare omogenea qualunque tra le coordinate ξ di un piano assoggetta questo a passare per un punto fisso, le cui coordinate omogenee sono i coefficienti delle ξ_i in quell'equazione. Si potrà dunque in questo senso chiamare quella l'*equazione del punto* in coordinate di piani. I due spazi lineari S e Σ, aventi per elementi il 1° i punti, il 2° i piani, stanno dunque tra loro in questa mutua dipendenza che gli spazi lineari ad $n-2$ dimensioni contenuti nell'uno sono gli elementi dell'altro spazio e viceversa. Questo dimostra la *legge di dualità*, cioè da qualunque proposizione dimostrata se ne deduce un'altra che è pur vera facendo in quella lo scambio delle parole *punto* e *piano*.

In particolare valgono dunque ancora le proposizioni dedotte con quello scambio da quelle del n⁰ precedente. Indicheremo con Σ'_m ogni spazio lineare di piani ad m dimensioni, ed avremo allora:

Ogni S'_k di punti è l'intersezione comune ad un Σ'_{n-2-k} di piani.

Due tali spazi lineari S'_k, Σ'_{n-2-k} di punti e di piani si diranno spazi *congiunti.*

4. Dati $k+1$ punti di un S'_k risulta dal n⁰ 2 che questo è determinato. Se si indicano con $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k+1)}$ (dove $i = 1, \dots, n$) le coordinate di quei punti, è chiaro che quelle di un altro punto qualunque del S'_k si potranno rappresentare con

$$x_i = l^{(1)} x_i^{(1)} + l^{(2)} x_i^{(2)} + \dots + l^{(k+1)} x_i^{(k+1)},$$

dove le quantità $l^{(1)}, l^{(2)}, \dots, l^{(k+1)}$ varieranno dall'un punto all'altro e si potranno considerare come le $k+1$ coordinate omogenee di un punto nello spazio a k dimensioni S'_k considerato.

Similmente dati $n-1-k$ piani $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1-k)}$, essi determinano un Σ'_{n-2-k} di piani tale, che uno qualunque di essi avrà coordinate che si possono rappresentare con

$$\xi_i = \lambda' \xi'_i + \lambda'' \xi''_i + \dots + \lambda^{(n-1-k)} \xi_i^{(n-1-k)},$$

dove le $\lambda', \lambda'', \dots, \lambda^{(n-1-k)}$ si potranno assumere come coordinate di un piano qualunque in quel Σ'_{n-2-k}. L'S'_k di punti congiunto a questo Σ'_{n-2-k} di piani è evidentemente costituito dai punti x che soddisfano alle $n-1-k$ equazioni:

$$\Sigma_i \xi'_i x_i = 0, \qquad \Sigma_i \xi''_i x_i = 0, \ \dots, \ \Sigma_i \xi_i^{(n-1-k)} x_i = 0.$$

Dati $k+1$ punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}$ soddisfacenti a queste equazioni, cioè appartenenti al S'_k, tutti gli altri saranno determinati nel modo detto.

Come di ogni piano od S'_{n-2} di punti si possono considerare le coordinate e prendere tutti gli S'_{n-2} come elementi di uno spazio, diverso da quello di punti, così si può fare per gli S'_k di punti, qualunque sia k (purchè minore di $n-1$). CLEBSCH mostrò in fatti (⁹) come si possano prendere per coordinate del S'_k determi-

(⁹) V. *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, XVII, 1872) §§ 1 e 2.

nato dai $k+1$ punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k+1)}$ i determinanti d'ordine $k+1$ formati colla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(k+1)} & x_2^{(k+1)} & \dots & x_n^{(k+1)} \end{vmatrix}$$

e analogamente si possono avere le coordinate degli spazi lineari di piani determinati da piani dati. E come ogni tale spazio ha uno spazio congiunto di punti e viceversa, CLEBSCH dimostrò che se lo spazio Σ'_{n-2-k} di piani congiunto al suddetto S'_k è determinato dagli $n-1-k$ piani $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1-k)}$, sicchè questi hanno quel S'_k per intersezione, i determinanti della suddetta matrice sono proporzionali ai complementari della matrice

$$\begin{vmatrix} \xi'_1 & \xi'_2 & \dots & \xi'_n \\ \xi''_1 & \xi''_2 & \dots & \xi''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{(n-1-k)} & \xi_2^{(n-1-k)} & \dots & \xi_n^{(n-1-k)} \end{vmatrix}$$

cosicchè le coordinate di un S'_k e quelle del Σ'_{n-2-k} congiunto si possono considerare come uguali.

Però queste coordinate di spazi lineari, il cui numero è $\binom{n}{k+1}$, non sono più indipendenti tra loro, come le coordinate di punti e quelle di piani. Ed invero il numero degli S'_k si riconosce facilmente essere soltanto $\infty^{(k+1)(n-k-1)}$. Quelle coordinate sono effettivamente legate tra loro da certe relazioni quadratiche di cui $\binom{n}{k+1}-(k+1)(n-k-1)-1$ sono indipendenti [10]. Di qui segue che lo spazio costituito dagli S'_k non è lineare, salvo che pei casi di $k=0$ (spazio di punti) e di $k=n-2$ (spazio di piani).

---

[10] Queste relazioni quadratiche furono date dal Prof. D'OVIDIO nella Memoria « *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari* » (Atti Acc. Torino, XII, 1877).

5. Due spazi lineari S'_m, $S'_{m'}$ di punti essendo determinati rispettivamente da $m+1$ e $m'+1$ punti appartengono, quando sia $m+m' \leqq n-2$, al $S'_{m+m'+1}$ determinato da quegli $m+m'+2$ punti, e non hanno evidentemente in generale alcun punto comune. Ma può accadere in ogni caso, qualunque siano m, m', che quegli S'_m, $S'_{m'}$ abbiano comune un S'_a (essendo a minore di m, m'): siccome allora si possono prendere su questo $a+1$ tra quegli $m+1$ e $m'+1$ punti che individuano gli S'_m, $S'_{m'}$, il numero dei punti che determinano questi si ridurrà ad $m+m'+1-a$, e per essi si può far passare un $S'_{m+m'-a}$, il quale conterrà evidentemente quegli S'_m, $S'_{m'}$. Viceversa, se per due spazi lineari qualunque rispettivamente ad m e m' dimensioni si può far passare uno spazio pure lineare ad $m+m'-a$ dimensioni, quelli si taglieranno (qualunque siano m, m') in uno spazio lineare ad a dimensioni. Ponendo $a=m+$ $+m'-n+1$ potremo dunque dire che, in generale, nello spazio S ad $n-1$ dimensioni due spazi lineari S'_m, $S'_{m'}$ non hanno punti comuni se $m+m'<n-1$, altrimenti hanno comune un $S'_{m+m'-n+1}$. In casi particolari però potranno aver comune uno spazio a maggior numero di dimensioni, ma allora saranno contenuti in uno spazio lineare di punti a numero di dimensioni inferiore d'altrettanto ad $n-1$ [11].

Queste considerazioni si trasportano immediatamente per dualità agli spazi lineari di piani contenuti in Σ.

Il VERONESE chiama nello spazio S *duali* due spazi lineari i cui numeri di dimensioni m, m' siano tali che $m+m'=n-2$. Tali sono in particolare il punto ($m=0$) ed il piano di punti ($m'=n-2$). Quando n è un numero pari esiste uno spazio lineare duale a se stesso: quello ad $(n-2)/2$ dimensioni. Due spazi lineari duali di punti non hanno in generale, per quanto dicemmo, alcun punto comune. Possono però aver comune per eccezione uno spazio lineare S'_a, ed in tal caso sono contenuti in un S'_{n-2-a}, cioè in uno spazio lineare duale a questo; e viceversa.

6. Nello spazio di punti S ad $n-1$ dimensioni diremo che uno spazio qualunque di punti ad m dimensioni S_m è uno *spazio algebrico d'ordine g*, quando ogni spazio lineare di punti ad $n-1-m$ dimen-

---

[11] Per le considerazioni svolte in questo numero, v. VERONESE « *Behandlung der projectivischen Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* », Math. Ann., XIX, pp. 163-165.

sioni ha in generale comuni con esso g punti. Indicheremo un tale spazio algebrico, quando vorremo porne in evidenza l'ordine, con S_m^g, cosicchè gli spazi lineari, essendo di 1° ordine, saranno rappresentati da S_m', come appunto facemmo finora. Similmente diremo che uno spazio ad m dimensioni di piani Σ_m è uno *spazio algebrico di classe* g, ossia è un Σ_m^g, se in generale sono g quei suoi piani che appartengono ad uno spazio lineare qualunque di piani ad $n-1-m$ dimensioni, cioè che passano per uno spazio lineare qualunque ad $m-1$ dimensioni di punti. In particolare chiameremo *superficie-luogo* o *superficie-inviluppo* uno spazio ad $n-2$ dimensioni di punti o di piani, cosicchè il piano sarà una superficie-luogo di 1° ordine ed il punto una superficie-inviluppo di 1ª classe. Un'equazione di grado g in coordinate di punti rappresenta una superficie-luogo d'ordine g; un'equazione di grado g tra le coordinate di un piano rappresenta una superficie-inviluppo di classe g. Un numero qualunque k $[\leq n-1]$ di equazioni dei gradi $g_1, g_2, \dots, g_k$ in coordinate di punti (o di piani) determinano uno spazio algebrico di punti (o piani) ad $n-1-k$ dimensioni dell'ordine (o classe) $g_1 g_2 \dots g_k$, come si scorge immediatamente aggiungendo a quelle equazioni altre $n-1-k$ equazioni lineari. Tuttavia vi sono spazi algebrici di varie dimensioni non rappresentabili in questo modo con equazioni.

Due spazi algebrici S_m, $S_{m'}$ di ordine qualunque non si tagliano in generale se $m+m' < n-1$, ma quando $m+m' \geqq n-1$ si tagliano in generale in uno spazio algebrico $S_{m+m'-n+1}$, il cui ordine sarà il prodotto degli ordini di quelli ([12]). Di qui si passa facilmente al caso di un numero qualunque di spazi algebrici.

7. Uno spazio algebrico ad m dimensioni d'ordine g ha solo comune in generale con un S_k' un $S_{m+k-n+1}^g$ (supposto $m+k \geqq n-1$); se quel S_k' ne contenesse ancora un punto fuori di questo $S_{m+k-n+1}^g$, taglierebbe l'S_m^g in uno spazio ad una dimensione (almeno) di più, cioè ad $m+k-n+2$ dimensioni.

Ciò posto cerchiamo quale sia la condizione necessaria e sufficiente affinchè un S_m^g (che supponiamo non si scinda) sia contenuto in un S_i', essendo $i > m$ e $< n$. Ogni S_{n-1-m}' taglierebbe in tal

---

([12]) L'Halphen dimostrò, credo pel primo, questo teorema sull'ordine dell'intersezione di due spazi algebrici ad un numero qualsiasi di dimensioni, che costituisce un'importante generalizzazione del teorema di Bézout (V. Halphen, *Recherches de géométrie à n dimensions*, Bull. Soc. math. de France, II, 1873-74, p. 40).

caso l'S_m^g in g punti contenuti nel S'_{i-m} in cui taglierebbe l'S'_i. Viceversa, se supponiamo che ogni S'_{n-1-m} tagli l'S_m^g in g punti di un S'_{i-m}, ne seguirà per le cose premesse che ogni S'_{n-m} taglierà l'S_m^g in un S_1^g di un S'_{i-m+1}, che ogni S'_{n-m+1} lo taglierà in un S_2^g di un S'_{i-m+2}, e così via; e finalmente che l'S_m^g sta in un S'_i. Dunque la condizione cercata, perchè questo accada, è che ogni S'_{n-1-m} tagli l'S_m^g in g punti di un S'_{i-m}. Ora, siccome g punti stanno sempre in un S'_{g-1}, così quella condizione è sempre soddisfatta quando $i - m \geqq g - 1$, cioè $i \geqq m + g - 1$. Possiamo dunque conchiudere la seguente importante proposizione ([13]):

Ogni $\mathrm{S}_\mathrm{m}^\mathrm{g}$ *è sempre contenuto in uno spazio lineare ad* $\mathrm{m} + \mathrm{g} - 1$ *dimensioni (ma può anche stare in uno spazio lineare ad un numero qualunque compreso tra* m *ed* $\mathrm{m} + \mathrm{g} - 1$ *di dimensioni).*

Questo teorema ha molta importanza nello studio degli spazi algebrici a più dimensioni, perchè fornisce un primo criterio di classificazione per gli spazi di ordine g dato. Da esso segue immediatamente ponendo $g = 2$:

Ogni spazio di 2^0 *ordine ad* m *dimensioni è contenuto in uno spazio lineare ad* $\mathrm{m} + 1$ *dimensioni.*

Ponendo invece $m = 1$ si ha:

Ogni S_1^g *è contenuto in uno spazio [lineare] ad un numero di dimensioni non superiore a* g.

Quindi gli S_1^g $[g > 1]$ si possono distinguere in $g - 1$ specie a seconda che stanno in un S'_g, od in un S'_{g-1}, od in un S'_{g-2}, ..., o finalmente in un S'_2.

Ad esempio vi sono 2 specie di S_1^3: quella che sta in un S'_3 e quella che sta in un S'_2. Nello spazio ordinario di punti esse sono la cubica sghemba e la cubica piana. — Invece vi sono 3 specie di S_1^4: quella che sta in un S'_4, quella che sta in un S'_3 e quella che sta in un S'_2. Nella geometria della retta vedremo che esse dànno rispettivamente le 3 specie di rigate di 4^0 grado: quella che sta in un complesso lineare (ed ha una cubica doppia), quella che sta in una congruenza lineare (ed ha due rette doppie) e finalmente il cono di 4^0 ordine o la curva piana di 4^a classe.

([13]) Questo teorema si trova enunciato senza dimostrazione nel lavoro citato del VERONESE, p. 167; il caso particolare corrispondente ad $m = 1$ era già stato dato prima dal CLIFFORD nella sua importante Memoria « *On the classification of Loci* » (Phil. Trans., 169, 1878, pp. 663-681) alla p. 664 con una dimostrazione sintetica riprodotta dal VERONESE (loc. cit., p. 166).

8. Tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi, si possono riguardare come identici tra loro, poichè, come già notammo, nello studiarli non si considera la natura di quegli elementi, ma si tien solo conto della proprietà di linearità e del numero di dimensioni dello spazio formato dagli elementi stessi. Ne segue, che la teoria delle forme lineari di 1ª, 2ª e 3ª specie, per esempio, della retta, del piano e dello spazio ordinario considerati come punteggiati, essendo già nota, si può farne uso senz'altro per tutti gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni che si vuol studiare in generale. Quindi si potrà far uso, ad esempio, della teoria della proiettività, dei gruppi armonici, dell'involuzione, ecc., nelle forme di 1ª specie.

PARTE PRIMA

GEOMETRIA DI UNA QUADRICA

§ 1.

Polarità. Quadriche generali e specializzate.

9. Un'equazione quadratica tra le n coordinate omogenee $x_1, \dots, x_n$ di punti

$$\varphi(x) \equiv \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n), \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

rappresenta un S_{n-2}^2 o *quadrica* nello spazio ad $n-1$ dimensioni di punti S.

Come i coefficienti di quell'equazione sono $n(n+1)/2$, così le quadriche dello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni sono in numero $n(n+1)/2 - 1 = (n-1)(n+2)/2$ volte infinito, sicchè per $(n-1)(n+2)/2$ punti arbitrari di quello spazio passa in generale una quadrica determinata ([14]).

10. Due punti qualunque x, x' diconsi *coniugati* rispetto alla quadrica φ se sono armonici coniugati rispetto ai due punti in cui l'S_1' che li congiunge taglia φ. La condizione, perchè ciò accada, è che l'equazione

$$\varphi(x + \lambda x') = 0,$$

([14]) *In generale* soltanto. Per $(n-1)(n+2)/2 - k$ punti arbitrari dello spazio passano ∞^k quadriche formanti un sistema lineare k volte infinito di quadriche aventi comune un $S_{n-k-2}^{2^{k+1}}$, che è perfettamente determinato da $k+1$ di quelle quadriche. Quindi gli $(n-1)(n+2)/2$ punti, che individuano in generale una quadrica passante per essi, non devono stare su uno di questi spazi $S_{n-k-2}^{2^{k+1}}$ altrimenti la quadrica che li contiene diventa tante volte indeterminata quante sono le unità contenute in k. Queste sono generalizzazioni di teoremi ben noti sulle quadriche, anzi sulle superficie algebriche, dello spazio ordinario e si dimostrano come questi.

che determina quei due punti, abbia le due radici uguali e di segno contrario (V. n⁰ 8), vale a dire è:

$$\varphi(x, x') \equiv \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, x'_k = 0.$$

Se poniamo

$$\varphi_i(x) \equiv \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} \equiv \Sigma_k\, a_{ik}\, x_k\,,$$

quell'equazione si potrà scrivere:

$$\varphi(x, x') = \Sigma_i\, \varphi_i(x)\, x'_i = 0.$$

Quindi dato un punto qualunque x dello spazio, i suoi punti coniugati x' rispetto alla quadrica φ costituiscono un piano, le cui coordinate ξ_i sono date da:

$$(1) \qquad \varrho\xi_i = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

e che si dirà *piano polare* del punto x rispetto a φ. Ogni punto x' di questo piano avendo x per un punto coniugato, il suo piano polare passerà per x.

Dalle definizioni date segue pure immediatamente che qualunque spazio lineare S'_m passante per un punto x taglia la quadrica φ ed il piano polare di x rispetto a φ secondo una quadrica S^2_{m-1} ed un S'_{m-1} tali che nel S'_m x ha quel S'_{m-1} per polare rispetto al S^2_{m-1}.

11. Poniamo che il punto x descriva uno spazio lineare qualunque S'_m. Potremo rappresentare le coordinate x_i come funzioni lineari omogenee di $m+1$ nuove variabili, e sostituendole nelle equazioni (1) si vede che anche le coordinate ξ_i del piano polare ξ saranno rappresentate da funzioni lineari omogenee di quelle $m+1$ variabili. Dunque i piani polari dei punti di un S'_m formano un Σ'_m. Essi hanno quindi comune un S'_{n-2-m} di punti (V. n⁰ 3), ed è chiaro che questi sono i punti coniugati simultaneamente a tutti i punti di quel S'_m. Viceversa, i piani polari di quel S'_{n-2-m} di punti formeranno un Σ'_{n-2-m} composto di tutti i piani passanti per quel S'_m, sì che i punti del S'_{n-2-m} avranno per punti coniugati comuni i punti del S'_m. Due tali spazi lineari (duali) di punti S'_m, S'_{n-2-m} si diranno *polari* l'uno dell'altro rispetto alla quadrica φ.

12. Dalla definizione data del piano polare di un punto x e dalle proprietà note dei gruppi armonici risulta, che se x giace sulla quadrica φ, il suo piano polare ξ dato dalle formule (1) passerà pure per x e sarà il *piano tangente* in x a φ, cioè sarà un piano i cui

S_1' passanti per x sono quegli S_1' che hanno comuni con φ due punti coincidenti in x, cioè che *toccano* φ in questo punto. Viceversa dalle (1) risultando:

$$\varrho \xi_x = \varphi(x),$$

segue che quando un punto ed il suo piano polare sono in posizione unita, il punto giacerà sulla quadrica φ ed il piano sarà quello tangente nel punto a φ.

Ciò posto, se consideriamo un punto qualunque x' dello spazio, il suo piano polare taglierà la quadrica data φ ad $n-2$ dimensioni in una quadrica ad $n-3$ dimensioni S^2_{n-3}: i piani tangenti a φ nei punti x di questa passeranno per x', e viceversa tutti i piani passanti per x' e tangenti a φ la toccheranno in punti di quel S^2_{n-3}. E più in generale, considerando due spazi lineari di punti S'_m, S'_{n-2-m} polari l'uno dell'altro rispetto a φ; risulta, dalle cose dette, che i piani tangenti a φ nei punti di questa quadrica, posti sull'uno qualunque dei due, sono precisamente quei piani tangenti di φ i quali passano per l'altro. Così un S'_{n-3} avendo per polare un S_1', e questo tagliando φ in due punti, segue che per quel S'_{n-3} passano due soli piani tangenti a φ (aventi appunto quelli per punti di contatto). Dunque, in generale, una quadrica oltre a dare coi suoi punti una superficie-luogo di 2° ordine, forma co' suoi piani tangenti una superficie-inviluppo di 2ª classe.

13. Vedemmo che ogni punto x dello spazio ha sempre rispetto a φ un piano polare ξ perfettamente determinato dalle equazioni (1). Viceversa supponiamo che sia dato il piano ξ e vogliasi vedere se esiste un punto x dello spazio, il quale abbia ξ per piano polare. Le equazioni (1), se le ξ_i si suppongono date e si suppongono incognite le x_i, formano un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle $n+1$ quantità x_i e ϱ, e servono quindi nel caso più generale a determinare perfettamente, a meno di un fattor comune, le x_i, cosicchè nel caso generale esiste sempre un punto determinato x avente rispetto a φ per polare il piano dato ξ, qualunque questo sia, cioè esiste sempre un determinato *polo* del piano ξ rispetto a φ. Dicendo A_{ik} il subdeterminante complementare dell'elemento a_{ik} nel discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

della forma quadratica φ, è chiaro che la risoluzione delle equazioni (1) rispetto alle x_i come incognite condurrà alle formole:

$$\frac{A}{\varrho}\, x_i = \Sigma_k\, A_{ik}\, \xi_k\,, \tag{2}$$

le quali determineranno nel caso più generale il polo x del piano dato ξ rispetto a φ. E se poniamo inoltre:

$$\Phi\,(\xi, \xi') \equiv \Sigma_{ik}\, A_{ik}\, \xi_i\, \xi'_k\,; \qquad \Phi_i\,(\xi) \equiv \Sigma_k\, A_{ik}\, \xi_k\,,$$

ed in particolare poi:

$$\Phi\,(\xi) \equiv \Sigma_{ik}\, A_{ik}\, \xi_i\, \xi_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} & \xi_1 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} & \xi_n \\ \xi_1 & . & \xi_n & 0 \end{vmatrix},$$

allora dalle equazioni (1) e (2) seguirà:

$$\varphi(x) \equiv \varrho\xi_x \equiv \frac{\varrho^2}{A}\, \Phi\,(\xi)\,;$$

per cui, se il punto x sta sulla quadrica φ, cioè se ξ è piano tangente a questa, si ha: $\Phi\,(\xi) = 0$; laonde quest'equazione quadratica è quella a cui soddisfano tutti i piani tangenti a φ. Quindi ritroviamo che questi piani costituiscono uno spazio di piani ad $n - 2$ dimensioni di 2ª classe Σ^2_{n-2}.

14. Però, come notammo, queste cose valgono solo nel caso più generale. Invero il sistema (1) di n equazioni lineari omogenee nelle $n + 1$ quantità x_i e ϱ, cioè:

$$\varrho\xi_i = a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{in}\, x_n\,, \tag{1}$$

può dar luogo a casi speciali, i quali si otterranno tutti dalla considerazione dei determinanti d'ordine n formati dalla matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ \xi_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

L'annullarsi di uno qualunque di questi determinanti non dà nulla di notevole, salvo quando quello sia precisamente $\begin{vmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{vmatrix}$, cioè il discriminante A di φ. Quando questo si annulla, la risoluzione delle (1) dà $\varrho = 0$, cioè quelle equazioni verranno a mancare del 1^0 membro, vale a dire ad essere un sistema di n equazioni omogenee nelle n incognite x_i, sistema però avente il determinante nullo, e che quindi determinerà un sistema, unico in generale (od infiniti sistemi, in casi più speciali) di valori pei rapporti mutui delle x_i; ma questo sistema sarà indipendente dalle ξ_i, poichè queste non compariranno più in quelle equazioni. Dunque quando $A = 0$ ad un piano qualunque dello spazio corrisponde in generale come polo rispetto a φ un punto fisso y determinato dalle n equazioni lineari omogenee:

$$a_{i1}\, y_1 + \dots + a_{in}\, y_n = 0, \tag{4}$$

(ovvero tutti i punti determinati da queste equazioni se esse formano un sistema indeterminato) sicchè questo punto sarà il solo punto dello spazio pel quale il piano polare rispetto a φ non sia individuato, anzi sia ogni piano dello spazio; come del resto esprimono appunto le (4) dicendo che le coordinate del piano polare di y hanno tutte valori nulli.

15. Come già notammo, il sistema delle n equazioni omogenee (4) può anche essere indeterminato e quindi avere infinite soluzioni. Però ogni punto y soddisfacente ad esso godrà sempre delle proprietà dette, ed inoltre di quella di essere *punto doppio* della quadrica φ, cioè di esser tale che qualunque S_1' passante per esso taglia φ in due punti coincidenti con y. In fatti, dicendo x un punto qualunque dello spazio, saranno $y_i + \lambda x_i$ le coordinate di un punto qualunque del S_1' che congiunge x ad y, e quel punto starà su φ se:

$$0 = \varphi\,(y + \lambda x) \equiv \lambda^2\, \varphi\,(x) + 2\lambda\varphi\,(x,\, y) + \varphi\,(y).$$

Ma dalle (4) segue, qualunque sia x: $\varphi\,(x,\, y) = 0$, ed in particolare $\varphi(y) = 0$; quindi quella condizione diventa semplicemente $\lambda^2 \varphi\,(x) = 0$, ed è quindi soddisfatta soltanto da $\lambda^2 = 0$, se il punto x non è stato preso su φ. Ora a $\lambda = 0$ corrisponde appunto y nel S_1' rappresentato da $y + \lambda x$. È dunque provato l'asserto.

Se il punto x fosse stato preso su φ, sicchè $\varphi\,(x) = 0$, si vede che la condizione perchè il punto $y + \lambda x$ stia su φ sarebbe stata soddisfatta per ogni valore di λ. Dunque abbiamo la seguente importantissima proprietà delle quadriche aventi il discriminante nullo, che congiungendo un punto doppio qualunque della quadrica ad un suo altro punto qualunque, si ottiene sempre un S_1' tutto contenuto nella quadrica.

16. Ritornando ora alle equazioni lineari che determinano il punto x avente un dato piano polare ξ rispetto a φ, supponiamo che nella matrice (3) sia nullo oltre ad A uno qualunque degli altri determinanti d'ordine n: saranno allora nulli tutti, ed il sistema d'equazioni lineari (1) sarà indeterminato, cioè al piano ξ corrisponderanno infiniti poli. Però in tal caso questo piano non è più qualunque nello spazio in generale: dall'annullarsi di tutti quei determinanti segue che, se le quantità y_i si determinano in modo da soddisfare le equazioni (4) sarà pure (finchè non si annullano i subdeterminanti A_{ik} di A):

$$\xi_1 y_1 + \dots + \xi_n y_n = 0,$$

cosicchè il piano ξ passa pel punto doppio y di φ.

Viceversa se ξ è un piano qualunque passante per y e quindi soddisfacente a quest'equazione, esso avrà infiniti poli x. A determinare tutti questi poli basterà sopprimere una delle equazioni (1) come superflua, e allora rimarranno $n-1$ equazioni tra cui eliminando ϱ si hanno $n-2$ equazioni lineari omogenee tra le x_i. Dunque quei poli x formano un S_1', il quale naturalmente passerà per y, poichè questo è sempre uno dei poli del piano ξ. Del resto, che i punti posti su un S_1' passante pel punto doppio y abbiano comune il piano polare rispetto a φ si vede subito notando che le coordinate del piano polare del punto $y + \lambda x$ sono:

$$\Sigma_k\, a_{ik}\,(y_k + \lambda x_k) = \Sigma_k\, a_{ik}\, y_k + \lambda \Sigma a_{ik}\, x_k = \lambda \xi_i,$$

dove ξ_i sono le coordinate del piano polare di x. Dunque questo è pure il piano polare di tutti i punti $y + \lambda x$. Quindi conchiudiamo che una quadrica avente un punto doppio, e per conseguenza di discriminante nullo, gode della proprietà che ogni piano dello spazio ha per polo il punto doppio, ma che i piani passanti per questo hanno infiniti poli costituenti degli S_1' passanti pure per quello, e viceversa tutti i punti posti su un S_1' passante pel punto doppio hanno rispetto a quella quadrica lo stesso piano polare.

In particolare i punti della quadrica φ essendo distribuiti, come vedemmo, su degli S_1' passanti per y, in tutti i punti di un tale S_1' la quadrica φ avrà lo stesso piano tangente passante per quel S_1' e quindi anche per y. I piani tangenti a φ in punti diversi da y sono dunque in numero infinito non più $n-2$ volte, ma $n-3$ volte. Essi formano un Σ_{n-3}^2 di piani nel Σ_{n-2}' formato dai piani che passano per y. Ma anche tutti questi piani, cioè i piani passanti pel punto doppio y, si potranno evidentemente considerare come tangenti in questo a φ. L'equazione $\Phi(\xi) = 0$ nel caso in cui A è nullo si riduce, per un teorema notissimo, a $\xi_y^2 = 0$, e rappresenta quindi tutti i piani passanti pel punto doppio y, sicchè l'inviluppo di 2ª classe formato in generale dai piani tangenti a φ si riduce appunto in questo caso all'inviluppo di 1ª classe, contato 2 volte, dei piani passanti per y. Ciò conferma le cose dette.

17. Una superficie di 2^0 ordine può essere più volte specializzata. Noi diremo che una quadrica è *h volte specializzata come luogo* (od anche *cono quadrico di specie h-esima*) quando sono nulli il suo discriminante ed i subdeterminanti di questo degli ordini $n-1, n-2, \ldots$ $\ldots, n-h+1$. Quando la quadrica φ goda di tal proprietà (e per questo basta che si annullino i subdeterminanti d'ordine $n-h+1$, il che si vede facilmente equivalere ad $\frac{1}{2}h(h+1)$ condizioni) allora delle n equazioni lineari omogenee (4), che determinano il punto doppio y di φ, h saranno conseguenza delle rimanenti e quindi vi saranno infiniti punti doppi y giacenti nell'intersezione di $n-h$ piani e formanti quindi uno spazio lineare S'_{h-1}. Prendendone h qualunque, i quali siano $y', y'', \ldots, y^{(h)}$, sarà per $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\varphi_i(y') = 0, \qquad \varphi_i(y'') = 0, \ldots, \varphi_i(y^{(h)}) = 0,$$

e quindi:

$$\xi_i = \varphi_i(x + \lambda' y' + \lambda'' y'' + \ldots + \lambda^{(h)} y^{(h)}) = \varphi_i(x),$$

il che prova che tutti i punti di un S'_h qualunque passante pel S'_{h-1} dei punti doppi hanno lo stesso piano polare rispetto a φ. Questo piano polare poi passa pel S'_{h-1}, come risulta immediatamente dalla espressione delle sue coordinate ξ_i, giacchè, qualunque sia il punto doppio y, sarà:

$$\Sigma_i \xi_i y_i = \Sigma_i y_i \varphi_i(x) = \Sigma_i x_i \varphi_i(y) = 0.$$

Un piano qualunque ξ dello spazio vedemmo avere per poli soltanto i punti y che soddisfano le equazioni (4), cioè tutti i punti doppi di φ, e viceversa ogni punto doppio ha per piano polare ogni piano dello spazio. Soltanto quei piani ξ, i quali passano per tutto lo spazio lineare doppio S'_{h-1} della quadrica, hanno poli diversi dai punti doppi: questi poli formano un S'_h passante per quel S'_{h-1}.

18. Se $y', y'', \ldots, y^{(h)}$ indicano ancora h punti doppi qualunque della quadrica φ h volte specializzata, si ha:

$$\varphi(x + \lambda' y' + \lambda'' y'' + \ldots + \lambda^{(h)} y^{(h)}) = \varphi(x),$$

e quindi se il punto x sta sulla quadrica φ vi staranno pure tutti i punti $x + \lambda' y' + \lambda'' y'' + \dots + \lambda^{(h)} y^{(h)}$, cioè vi starà tutto l'$S'_h$ di punti che congiunge l'S'_{h-1} doppio di φ al punto x. Tutti questi punti poi avranno comune, per quanto vedemmo, il piano tangente, cosicchè ogni piano che tocchi φ in un punto non doppio la tocca in un S'_h appartenente a φ e passante pel S'_{h-1} doppio. Del resto, quando $h > 1$ ogni piano ξ dello spazio va considerato come piano tangente di φ, imperocchè allora è soddisfatta identicamente l'equazione $\Phi(\xi) = 0$. Ciò dipende dal fatto che per $h > 1$ ogni piano contiene un S'_{h-2} di punti doppi, quello cioè in cui esso taglia l'S'_{h-1}; e quei punti doppi essendo suoi poli, quel piano sarà tangente in essi a φ.

19. Ogni spazio lineare di punti taglia una data quadrica φ, h volte specializzata, secondo una quadrica a minor numero di dimensioni, la quale potrà essere o non specializzata, come meglio vedremo in seguito. In particolare un S'_{n-1-h} qualunque taglia φ in una quadrica S^2_{n-2-h}, ma non taglia in generale l'S'_{h-1} doppio (sicchè questa S^2_{n-2-h} non è in generale specializzata); bensì taglia in un punto unico determinato ogni S'_h di φ passante per questo S'_{h-1}. Quindi dalle cose dette segue che il cono di specie h dato φ si può considerare come costituito dagli infiniti (∞^{n-2-h}) S'_h che congiungono i singoli punti di un S^2_{n-2-h} ad un S'_{h-1} che non tagli l'S'_{n-1-h} in cui questo è contenuto. Si può dire che esso *proietta* da quel S'_{h-1}, costituito dai suoi punti doppi, la quadrica S^2_{n-2-h} considerata. Viceversa ogni S_{n-2} ottenuto proiettando un S^2_{n-2-h} di un S'_{n-1-h} da un S'_{h-1} non avente alcun punto comune con questo è facile vedere essere una quadrica h volte specializzata come luogo avente quel S'_{h-1} come doppio.

Ora in ogni fascio di S'_{n-2-h} posti in quel S'_{n-1-h} ve ne sono in generale due soli tangenti alla quadrica S^2_{n-2-h} considerata. Dunque, proiettando dal S'_{h-1}, si vede che in ogni fascio di piani passanti per questo S'_{h-1} ve ne sono in generale due soli i quali tocchino φ in punti non posti su quel S'_{h-1} (e quindi la tocchino ciascuno in un S'_h). Quindi i piani passanti pel S'_{h-1} formano un Σ'_{n-1-h} nel quale i detti piani tangenti a φ costituiscono uno spazio di piani di 2ª classe Σ^2_{n-2-h}.

Esempi di coni quadrici di varie specie furono già da noi incontrati. Se è data una quadrica qualunque (non specializzata) f nello spazio di punti S, e consideriamo due spazi lineari di punti polari rispetto a questa, S'_{h-1} e S'_{n-1-h}, noi vedemmo che i piani tangenti ad f nei punti del S'_{n-1-h}, ad esempio, passano tutti per l'S'_{h-1}. Orbene questi piani costituiscono un Σ^2_{n-1-h} nello spazio lineare Σ'_{n-1-h} dei piani passanti per l'S'_{h-1}, e sono i piani tangenti di una quadrica di punti ad $n-2$ dimensioni specializzata h volte, cioè del cono quadrico di specie h che proietta da quel S'_{h-1} la intersezione S^2_{n-2-h} di f col S'_{n-1-h}.

20. Ci rimane a vedere in modo più completo come si riduca la polarità rispetto ad una quadrica φ quando questa è specializzata un numero qualunque h di volte. Già vedemmo che a tutti i punti di un S'_h passante pel S'_{h-1} doppio di φ corrisponde come polare uno stesso piano passante per questo. Di qui segue immediatamente la seguente proposizione generale: lo spazio lineare di punti S'_{n-2-m} polare di un S'_m qualunque, per $m < n-1-h$ è un S'_{n-2-m} passante pel S'_{h-1} doppio e polare non solo di quel S'_m, ma di tutto l'S'_{m+h} che lo congiunge al S'_{h-1} doppio. Per $m \geqq n-1-h$ un S'_m qualunque dello spazio ha solo per spazio polare costante l'S'_{h-1} doppio. Tuttavia quando il dato S'_m ha una posizione speciale rispetto al S'_{h-1} doppio, giacendo con questo in uno spazio lineare di punti di dimensioni $m' < m+h$, il suo spazio polare si ridurrà ad un $S'_{n-2-m'+h}$ passante per l'S'_{h-1} doppio. Questo caso si verificherà quando il dato S'_m tagli l'S'_{h-1} doppio in un $S'_{m+h-m'-1}$ (V. n⁰ 5).

21. Tra le quadriche specializzate, quella semplicemente specializzata corrispondente all'annullarsi del discriminante e non dei suoi subdeterminanti, ci si è presentata prima: essa ha un solo punto doppio. Quelle $2, 3, \dots, h$ volte specializzate hanno rispettivamente un S_1', S_2', ..., S'_{h-1} di punti doppi. Quella specializzata $n-4$ volte ha un S'_{n-5} doppio e si ottiene proiettando da questo un S_2^2 qualunque giacente in un S_3' non avente punti comuni con quello. Dalle proprietà note di un S_2^2 in un S_3', cioè di una quadrica nello spazio ordinario a 3 dimensioni, si potranno dunque avere colla sola proiezione le proprietà dei coni quadrici di specie $n-4$ nello spazio ad $n-1$ dimensioni. Così la quadrica specializzata $n-3$ volte si avrà proiettando dal S'_{n-4} doppio un S_1^2 di un S_2' e se ne avranno immediatamente le proprietà da quelle delle coniche nel piano ordinario. La quadrica specializzata $n-2$ volte si avrà proiettando dal S'_{n-3} doppio un S_0^2 di un S_1', vale a dire una coppia di punti; e quindi si comporrà di una coppia di piani tagliantisi appunto in quel S'_{n-3}

doppio. Questo scindersi di una quadrica $n-2$ volte specializzata in una coppia di piani si potrebbe anche dimostrare analiticamente colla definizione analitica data delle quadriche specializzate un numero qualunque di volte. Finalmente la quadrica specializzata $n-1$ volte avendo un S'_{n-2} doppio si comporrà tutta di questo piano contato due volte. Ciò risulta anche dal fatto che allora si annullano tutti i subdeterminanti di 2^0 ordine del discriminante della quadrica considerata $\varphi \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k$, donde segue immediatamente che si può porre in genere: $a_{ik} = c_i c_k$, e quindi $\varphi \equiv (\Sigma c_i x_i)^2$, cosicchè φ si riduce veramente ad un piano doppio. Non esistono superficie di 2^0 ordine ulteriormente specializzate.

22. Il principio di dualità stabilito al n^0 3 ci permette di enunciare immediatamente le seguenti proposizioni sulle quadriche, come superficie-inviluppi di 2^a classe, corrispondenti a quelle stabilite sulle quadriche come superficie-luoghi di 2^0 ordine.

Per una quadrica-inviluppo non specializzata vale la teoria della polarità stabilita per le quadriche-luoghi non specializzate. Ma una quadrica può, come inviluppo, specializzarsi un numero qualunque h di volte (essendo $h < n$) corrispondentemente all'annullarsi di tutti i subdeterminanti d'ordine $n-h+1$ del discriminante della sua equazione-inviluppo. Una quadrica-inviluppo h volte specializzata Φ ha un Σ'_{h-1} di *piani doppi*, cioè di piani tali che in un fascio Σ'_1 qualunque, che ne contenga uno, coincidano in questo i due piani tangenti di Φ che appartengono in generale ad un fascio qualunque dello spazio. Questi piani doppi hanno per poli rispetto a Φ tutti i punti dello spazio, e viceversa ogni punto dello spazio ha quei piani per polari. Quindi, se $h=1$ i poli dei piani stessi di Φ, cioè quelli che diremo *punti di contatto* dei piani stessi, formano una quadrica-luogo φ, corrispondente all'inviluppo Φ, la quale si riduce ai punti del piano doppio di questo; e per $h > 1$ quella quadrica-luogo comprende tutti i punti dello spazio, cioè ogni punto va considerato come giacente su φ (ed avente per piani tangenti quel Σ'_{h-2} del Σ'_{h-1} doppio di piani che passa pel punto stesso). Ma ogni piano di Φ, che non sia doppio, ha un determinato punto di contatto, il quale è tale per tutto il Σ'_h di piani che congiunge quello al Σ'_{h-1} doppio, e sta quindi sul S'_{n-1-h} che costituisce lo spazio di punti comune ai piani doppi. Tutti questi punti del S'_{n-1-h}, i quali sono punti di contatto di piani qualunque dello spazio con Φ, formano nel S'_{n-1-h} una quadrica di punti S^2_{n-2-h}, che diremo *nucleo* di Φ. I piani di Φ costituiscono ∞^{n-2-h} spazi lineari Σ'_h di piani, ciascuno dei quali ha comune il punto di contatto e taglia l'S'_{n-1-h} in un S'_{n-2-h}, che è precisamente nel S'_{n-1-h} quel S'_{n-2-h} che tocca la quadrica-nucleo S^2_{n-2-h}, in quel punto. La quadrica Φ h volte specializzata come inviluppo si può dunque ottenere semplicemente fissando nello spazio un S'_{n-1-h} e su esso un S^2_{n-2-h} non specializzato (per le ragioni che vedremo in seguito); per ogni S'_{n-2-h} giacente in quello e tangente a questo passano infiniti piani formanti un Σ'_h: questi ∞^{n-2-h} Σ'_h costituiscono appunto la quadrica Φ.

Ogni piano dello spazio, all'infuori dei piani doppi, ha un determinato polo rispetto a Φ; questo polo sta sul S'_{n-1-h} ed è su questo il polo dell'intersezione S'_{n-2-h} di quel piano rispetto al nucleo S^2_{n-2-h} di Φ; quindi quel polo è lo stesso per tutto il Σ'_h di piani che congiunge il piano dato al Σ'_{h-1} di piani doppi, cioè che passa per uno stesso S'_{n-2-h} del S'_{n-1-h}. Quindi, mentre ad un punto qualunque dello spazio corrispondono come polari rispetto a Φ i soli piani doppi di questo, formanti un Σ'_{h-1}, ai punti posti sul S'_{n-1-h} in cui questi si tagliano corrispondono dei Σ'_h (contenenti quel Σ'_{h-1}) di piani polari.

La quadrica semplicemente specializzata come inviluppo si riduce come luogo ad un piano doppio ed ha per nucleo un S^2_{n-3} giacente su questo piano. La quadrica specializzata $n-3$ volte come inviluppo ha per nucleo un S_1^2 in un S_2'; quella $n-2$ volte specializzata si riduce ad una coppia di punti (suo nucleo) come inviluppo di piani; e finalmente quella $n-1$ volte specializzata si riduce ad un punto contato due volte.

23. Confrontando coi risultati prima ottenuti per le quadriche considerate come luoghi di punti noi vediamo che: Una quadrica semplicemente specializzata come luogo (come inviluppo) è specializzata $n-1$ volte come inviluppo (luogo) riducendosi come tale al suo punto (piano) doppio. Una quadrica, luogo od inviluppo, specializzata un numero di volte > 1 non dà origine rispettivamente ad un inviluppo o ad un luogo determinato.

Può nascer l'idea che, oltre alle specie così considerate di quadriche specializzate, se ne possano ancora distinguer altre, facendo per esempio, che il nucleo di una quadrica specializzata come inviluppo venga a specializzarsi a sua volta come luogo. Ma ciò non può accadere, come ora abbiamo visto, senza che il nucleo stesso si specializzi pure come inviluppo, e quindi la quadrica stessa (che dal nucleo è perfettamente determinata) si specializzi ulteriormente come inviluppo. Del resto, per esser certi di non avere altri casi speciali di quadriche da considerare, all'infuori di quelli già visti, noi affronteremo ora direttamente la questione.

§ 2.

Gruppi di punti coniugati rispetto ad una quadrica. Invarianti di questa.

24. Un gruppo di m punti a due a due coniugati rispetto ad una data quadrica φ, che considereremo soltanto come luogo di punti, si dirà formare una m-upla polare rispetto a φ. Esistono sempre infinite n-uple polari rispetto ad una quadrica φ di uno spazio lineare ad $n-1$ dimensioni. In fatti prendasi un punto arbitrario x' dello spazio (il che si può fare in ∞^{n-1} modi) e nel suo piano polare rispetto a φ si prenda un punto arbitrario x'' (il che si può fare in ∞^{n-2} modi), e nella intersezione dei piani polari di x', x'' si prenda un nuovo punto arbitrario x''' (∞^{n-3} modi), e così via, finchè su un S_1' si prenderà ad arbitrio (∞^1 modi) un punto $x^{(n-1)}$ il cui piano polare taglierà quel S_1' in un punto $x^{(n)}$ determinato. Dalla costruzione fatta risulta chiaramente che gli n punti così ottenuti $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ formano una n-upla polare rispetto a φ, e che viceversa tutte le n-uple polari si otterranno in questo modo. Il numero di queste n-uple polari è dunque infinito un numero di volte $=$ $=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+1=n(n-1)/2$.

25. In questo ragionamento si è implicitamente supposto che la superficie di 2^0 ordine φ non fosse specializzata. Supponiamola ora specializzata h volte, sicchè essa abbia un S_{h-1}' di punti doppi. Si possono ancora come dianzi prendere il gruppo degli $n-h$ punti $x', x'', \ldots, x^{(n-h)}$ nel modo detto, e di tali gruppi ve n'è un numero $(n-1)+(n-2)+\ldots+h=(n-h)(n+h-1)/2$ volte infinito. Ricordando che il piano polare di un punto qualunque dello spazio passa pel S_{h-1}' doppio, i piani polari di quegli $n-h$ punti si taglieranno precisamente in questo e non avranno altri punti comuni. D'altra parte i punti doppi sono coniugati rispetto a φ a tutti i punti dello spazio. Quindi prendendone h ad arbitrio sul S_{h-1}', cioè $x^{(n-h+1)}, \ldots, x^{(n)}$, ed aggiungendoli ai primi $n-h$ si avrà appunto una n-upla polare. Gli ultimi h punti si possono prendere in $\infty^{h(h-1)}$ modi. Vi è dunque un numero $(n-h)(n+h-1)/2+h(h-1)=$ $=n(n-1)/2+h(h-1)/2$ volte infinito di n-uple polari rispetto

ad una quadrica h volte specializzata, tenendo solo conto di quelle n-uple polari che contengono il minor numero possibile di punti doppi della quadrica, cioè h.

Se dal S'_{h-1} doppio si proietta la $(n-h)$-upla polare $x' \, x'' \dots x^{(n-h)}$ che non comprende alcun punto doppio, si avranno $n-h$ spazi lineari S'_h a due a due coniugati rispetto alla quadrica, sì che prendendo ad arbitrio un punto (non doppio) su ciascuno di essi si avrà di nuovo una $(n-h)$-upla polare.

26. Dalle cose dette segue, che per qualunque superficie di 2^0 ordine si può costruire una n-upla polare tale, che i suoi n punti si possano prendere come punti fondamentali (cioè di coordinate tutte nulle, meno una) nel sistema di riferimento delle coordinate. Allora nell'equazione $\varphi \equiv \Sigma a_{ik} \, x_i \, x_k = 0$, di quella superficie, essendo p. e. coniugati i due punti di coordinate tutte nulle, salvo rispettivamente la x_i e la x_k, sarà $a_{ik} = 0$; e questo per tutte le combinazioni possibili ik. Dunque l'equazione della quadrica riferita a quella sua n-upla polare avrà la forma:

$$a_1 \, x_1^2 + a_2 \, x_2^2 + \dots + a_n \, x_n^2 = 0.$$

I subdeterminanti d'ordine $n-h+1$ del discriminante di questa forma quadratica saranno tutti, o nulli, ovvero uguali a prodotti delle quantità a_i prese a combinazioni di $n-h+1$. Affinchè tutti questi subdeterminanti siano nulli, dovranno dunque annullarsi h di quelle quantità a_i, e ciò sarà pure sufficiente. Dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè la quadrica rappresentata da quell'equazione sia h volte specializzata è che in quella siano nulli h coefficienti.

27. Siano ora date in due spazi qualunque, l'uno di punti x, l'altro di punti y, entrambi lineari ad $n-1$ dimensioni, due quadriche qualunque, e riferiamo ciascuna di esse ad una sua n-upla polare, sì che siano rappresentate rispettivamente dalle equazioni:

$$a_1 \, x_1^2 + a_2 \, x_2^2 + \dots + a_n \, x_n^2 = 0,$$

e:

$$b_1 \, y_1^2 + b_2 \, y_2^2 + \dots + b_n \, y_n^2 = 0.$$

Se stabiliamo tra i punti dei due spazi le relazioni lineari

$$\sqrt{a_1} \, x_1 = \sqrt{b_1} \, y_1 \, , \qquad \sqrt{a_2} \, x_2 = \sqrt{b_2} \, y_2 \, , \dots , \sqrt{a_n} \, x_n = \sqrt{b_n} \, y_n \, ,$$

dove pei radicali si prendono valori determinati, avremo determinata una proiettività (V. n^0 1) tra i due spazi, nella quale le due quadriche si corrisponderanno tra loro; purchè però niuno dei coefficienti a_i o b_i sia nullo. Se ve ne fossero anche di quelli nulli, allora quelle relazioni si accorderebbero con una proiettività solo quando vi fosse un ugual numero h di a_i nulle e di b_i nulle e si attribuissero ad esse gli stessi indici, p. e. $1, 2, \ldots, h$. In questo caso poi le relazioni scritte si ridurrebbero a sole $n - h$, e aggiungendo ad esse altre h relazioni arbitrarie tra le $x_1, \ldots, x_h$ e le $y_1, \ldots, y_h$, p. e.: $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_h = y_h$, sarebbe ancora determinata una proiettività tra i due spazi, la quale farebbe corrispondere ancora le due quadriche considerate, che ora sarebbero entrambe h volte specializzate. Dunque:

Due superficie di 2^0 ordine in spazi lineari ad $n - 1$ dimensioni si possono sempre trasformare proiettivamente l'una nell'altra, colla sola condizione, che ove una di esse sia specializzata, siano entrambe specializzate un ugual numero di volte. Si può stabilire in infiniti modi la proiettività tra i due spazi, che fa corrispondere tra loro le due superficie; si può trasformare nello stesso tempo una data n-upla polare dell'una in una n-upla polare qualunque dell'altra. Fissando queste due n-uple polari, la trasformazione proiettiva considerata è determinata (benchè non individuata). Dunque (V. n^0 25), le due superficie di secondo ordine si possono far corrispondere proiettivamente in un numero $n(n-1)/2 + h(h-1)/2$ volte infinito di modi.

In particolare una quadrica h volte specializzata di un dato spazio lineare di punti ad $n - 1$ dimensioni si può trasformare proiettivamente in se stessa in un numero di modi $n(n-1)/2 + h(h-1)/2$ volte infinito; e, se la quadrica non è specializzata, in $\infty^{n(n-1)/2}$ modi.

28. Segue da quelle proposizioni che due quadriche qualunque S^2_{n-2} generali si equivalgono dal punto di vista della geometria proiettiva (V. n^0 1). Dunque: « Una quadrica non ha invarianti assoluti », poichè questi stabiliscono una differenza proiettiva tra gli enti geometrici cui appartengono.

Ma il discriminante di una quadrica è invariante (relativo) di questa: ciò risulta dal significato geometrico che abbiamo visto avere il suo annullarsi, e del resto costituisce una proprietà algebrica notissima del discriminante di una forma quadratica ad un numero qualunque di variabili. D'altronde non essendovi invarianti assoluti non può esservi più di un invariante relativo. Quindi:

« Una quadrica ha solo un invariante, che è il suo discriminante ».

L'annullarsi di quest'invariante esprime soltanto che la quadrica è semplicemente specializzata, cioè ha un punto doppio. Vedremo presto come anche l'essere una quadrica h volte specializzata si possa esprimere con forme invariantive, e precisamente coll'annullarsi identico di certi contravarianti. Notiamo, per ora, che dal teorema dimostrato che due quadriche h volte specializzate come luogo si possono sempre trasformare proiettivamente l'una nell'altra, segue ciò che notammo nel § precedente (V. n^0 23), cioè che una tal quadrica non può avere una specializzazione nel Σ^2_{n-2-h} dei piani tangenti propriamente detti (cioè tangenti in punti non doppi) senza degenerare in una quadrica specializzata un numero di volte maggiore di h.

« Le quadriche luoghi od inviluppi, considerate nel § 1, costituiscono tutte le superficie di 2^0 ordine o di 2^a classe che occorra considerare dal punto di vista proiettivo ».

Era questo il teorema che c'importava stabilire nel presente §.

§ 3.

Spazi lineari contenuti in una quadrica o tangenti ad essa. Varie equazioni tangenziali della quadrica.

29. Proponiamoci ora di cercare quanti e quali spazi lineari di punti siano contenuti in una superficie di 2^0 ordine S^2_{n-2} dello spazio di punti ad $n-1$ dimensioni S. Supporremo anzitutto che quella superficie di 2^0 ordine non sia specializzata, e diciamola φ. Dalla definizione e dalle proprietà viste del piano tangente a φ in un suo punto qualunque segue che qualunque spazio lineare S'_m contenuto in φ dovrà pure appartenere al piano tangente a φ in un punto qualunque dello spazio lineare stesso. In fatti è chiaro che nel piano tangente a φ in un suo punto x prendendo un altro punto y dell' intersezione di φ con esso, l'S_1' che congiunge y ad x starà tutto su φ, cosicchè quell' intersezione si compone di infiniti S_1' passanti per x; viceversa poi è pure evidente che ogni S_1' passante per x e giacente su φ starà pure sul piano tangente in x a φ. Quindi, siccome tutti i punti di un S'_m passante per x e contenuto in φ si possono congiungere ad x con S_1' contenuti in φ, tutto l'S'_m starà sul piano tangente in x a φ, come si voleva provare. Ora la stessa cosa vale per tutti i

punti x del S'_m, cioè tutti i piani tangenti a φ in quei punti conterranno l'S'_m. D'altronde questi piani tangenti a φ formano un Σ'_m di piani, avente per intersezione comune a tutti questi un S'_{n-2-m}, che non è altro che lo spazio di punti polare rispetto a φ dello spazio S'_m. Quel S'_{n-2-m} dovrà dunque contenere questo S'_m, cioè:

Affinchè uno spazio lineare di punti $\mathrm{S'_m}$ *sia contenuto in una quadrica* φ *generale dello spazio ad* $\mathrm{n-1}$ *dimensioni è necessario e sufficiente che esso sia contenuto nel suo spazio lineare* $(\mathrm{S'_{n-2-m}})$ *polare rispetto a* φ.

Ora perchè ciò sia possibile dev'essere $m \leqq n-2-m$, cioè $m \leqq (n-2)/2$. Dunque:

Una quadrica generale non contiene spazi lineari di punti per cui il numero di dimensioni superi la metà del numero di dimensioni della quadrica.

30. Per $m \leqq (n-2)/2$ è facile vedere che realmente la quadrica φ contiene infiniti S'_m. Si prenda infatti un punto arbitrario x di φ e nel suo piano tangente un altro punto arbitrario x' dell'intersezione con φ: l'S_1' congiungente x' ad x apparterrà a φ. Il piano tangente a φ in x' passerà per x e quindi taglierà quello tangente in x secondo un S'_{n-3} contenente quel S_1': ivi si prenda fuori di questo un nuovo punto x'' di φ e lo si congiunga al S_1' stesso. Si avrà un S_2' tutto contenuto in φ e passante inoltre pei punti x, x', x''. Il piano tangente a φ in x'' taglierà l'S'_{n-3} in un S'_{n-4} (intersezione dei piani tangenti in x, x', x'') che conterrà quel S_2'. Sull'intersezione di quel S'_{n-4} con φ, fuori di quel S_2' si prenda un nuovo punto arbitrario x''' e lo si congiunga al S_2' con un S_3': questo sarà tutto contenuto in φ e passerà pei punti x, x', x'', x'''. Continuando si ottengono spazi lineari contenuti in φ e di numero crescente di dimensioni. Vogliasi avere in generale il numero degli S'_m di φ, i quali passano per un dato S'_k di φ, essendo $k < m$. Noteremo che nella costruzione precedente il punto x si può prendere su φ in ∞^{n-2} modi, il punto x' dell'intersezione di φ col piano tangente in x si può prendere in ∞^{n-3} modi, il punto x'' dell'intersezione di φ coi piani tangenti in x e x' si può prendere in ∞^{n-4} modi, ..., il punto $x^{(k)}$ in ∞^{n-2-k} modi, ..., e finalmente il punto $x^{(m)}$ in ∞^{n-2-m} modi. I punti $x, x', \dots, x^{(k)}$ determinano un S'_k contenuto in φ e che supporremo dato; quei punti, insieme con $x^{(k+1)}, \dots, x^{(m)}$ determineranno un S'_m contenuto pure in φ e passante per quel S'_k. Ora $x^{(k+1)}, \dots, x^{(m)}$ saranno punti qualunque del S'_m ed in questo si potrebbero pren-

dere in $\infty^{(m-k)m}$ modi; quindi sebbene nella costruzione precedente quei punti si possono prendere, come vedemmo, in $\infty^{n-2-k-1} \times \times \infty^{n-2-k-2} \times \ldots \times \infty^{n-2-m} = \infty^{(m-k)(2n-m-k-5)/2}$ modi diversi, pure questo numero va diviso per $\infty^{(m-k)m}$ se si vogliono avere degli S'_m distinti tra loro, cosicchè di questi ve ne saranno $\infty^{(m-k)(2n-3m-k-5)/2}$ i quali passino pel S'_k dato. In particolare ponendo $k=0$ noi vediamo che per un punto qualunque x della quadrica passano $\infty^{m(2n-3m-5)/2}$ S'_m contenuti in questa. Ne segue immediatamente che in tutta la quadrica vi sono $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}$ S'_m, poichè vi sono ∞^{n-2} punti x, ma tra questi ∞^m dànno lo stesso S'_m.

Però la stessa costruzione che si è seguita mostra che essa può solo continuare finchè ogni punto $x^{(r)}$ si ha da prendere in uno spazio il cui numero di dimensioni $n-2-r$ non è inferiore ad m, cioè finchè $n-2-m \geqq m$, ossia $m \leqq (n-2)/2$, come già prima trovammo. Se n è numero impari, la costruzione può spingersi solo fino ad $m=(n-3)/2$, cioè gli spazi lineari di numero massimo di dimensioni contenuti in φ sono gli $S'_{(n-3)/2}$, i quali sono in numero di $\infty^{(n-1)(n+1)/8}$. Se invece n è pari la costruzione si può spingere fino ad $m=(n-2)/2$, cioè gli spazi lineari contenuti in φ a numero massimo di dimensioni sono gli $S'_{(n-2)/2}$, i quali saranno in numero di $\infty^{n(n-2)/8}$. In tal caso si finisce evidentemente per dover prendere un punto $x^{((n-2)/2-1)}$ di φ, trovare l'intersezione $S'_{n/2}$ del suo piano tangente coi piani tangenti nei punti prima costrutti e nella intersezione $S^2_{(n-2)/2}$ di quel $S'_{n/2}$ con φ (la quale passerà per l'$S'_{(n-2)/2-1}$ determinato da quei vari punti) prendere un punto $x^{((n-2)/2)}$ che sarà congiunto ai precedenti da un $S'_{(n-2)/2}$ contenuto in φ. Questo mostra che quell'intersezione $S^2_{(n-2)/2}$, di cui questo spazio lineare dovrà far parte, si scinde in due tali spazi lineari $S'_{(n-2)/2}$ di φ. Quindi per n pari vi sono due sistemi distinti di $S'_{(n-2)/2}$ contenuti in φ; e su questi ritorneremo tosto. Notiamo intanto i seguenti risultati ottenuti:

In una quadrica generale nello spazio ad $n-1$ *dimensioni stanno solo degli spazi lineari il cui numero delle dimensioni è al più uguale ad* $(n-3)/2$ *o ad* $(n-2)/2$ *secondo che* n *è impari o pari; nel* 1° *caso vi sono* $\infty^{(n-1)(n+1)/8}$ $S'_{(n-3)/2}$, *nel* 2° *caso vi sono* $\infty^{n(n-2)/8} S'_{(n-2)/2}$ *formanti due sistemi* ([15]).

([15]) Anche il VERONESE nella Memoria citata nota esservi quella differenza tra i due casi di n impari ed n pari (V. loc. cit. pp. 191, 192), ma incorre in un'inesattezza nell'assegnare i numeri di $S'_{(n-3)/2}$ od $S'_{(n-2)/2}$ contenuti in φ a se-

Per $\mathrm{m} \leqq (\mathrm{n}-2)/2$ *esistono sulla quadrica* $\infty^{(\mathrm{m}+1)(2\mathrm{n}-3\mathrm{m}-4)/2}\, \mathrm{S}'_{\mathrm{m}}$, *sì che per ogni punto della quadrica ne passano* $\infty^{\mathrm{m}(2\mathrm{n}-3\mathrm{m}-5)/2}$; *e più in generale per ogni* S'_{k} *della quadrica* $(\mathrm{k}<\mathrm{m})$ *ne passano* $\infty^{(\mathrm{m}-\mathrm{k})(2\mathrm{n}-3\mathrm{m}-\mathrm{k}-5)/2}$.

31. Si può pure trovare analiticamente il numero degli S'_m contenuti in φ, e ciò servirà a confermare le cose dette. Siano $x, x', \ldots, x^{(m)}$ $m+1$ punti i quali determinano un S'_m. Affinchè questo sia tutto contenuto in φ dovrà essere, per valori qualunque delle λ:

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(m)} x^{(m)}) = 0,$$

ossia:

$$\lambda^2 \varphi(x) + \lambda'^2 \varphi(x') + \ldots + \lambda^{(m)2} \varphi(x^{(m)}) + 2\lambda\lambda' \varphi(x, x') + \ldots = 0.$$

Dunque sarà:

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x') = 0, \ldots, \varphi(x^{(m)}) = 0,$$

$$\varphi(x, x') = 0, \ldots, \varphi(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = 0.$$

Queste equazioni sono in numero di $(m+1)(m+2)/2$ ed esprimono che gli $m+1$ punti $x, x', \ldots, x^{(m)}$ devono stare su φ ed inoltre essere a 2 a 2 coniugati rispetto a φ, cioè stare nei piani tangenti in essi a φ; il che va d'accordo coi risultati avuti dai ragionamenti sintetici. Ora ciascuno di quei punti potendosi prendere ad arbitrio sul S'_m cercato, lo si può assoggettare ad m equazioni di condizione, sicchè avremo in totale $(m+1)(m+2)/2 + m(m+1)$ equazioni, mentre le incognite, cioè le coordinate di quei punti, saranno $(m+1)(n-1)$. Il sistema è dunque indeterminato un numero di volte uguale a

$$(m+1)\left[(n-1) - \frac{1}{2}(m+2) - m\right] = \frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4),$$

od in altri termini la quadrica φ contiene $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}\, S'_m$, come appunto avevamo già trovato.

Se poi si nota che per $k<m$ ogni S'_m contiene $\infty^{(k+1)(m-k)}\, S'_k$, e che la quadrica φ conterrà pure $\infty^{(k+1)(2n-3k-4)/2}\, S'_k$, segue che

---

conda dei due casi. Così egli trova che in un S_5^2 vi sono $\infty^9\, S'_2$, mentre dalle formule da noi trovate $(n=7)$ risulta che ve ne sono solo ∞^6. Nel § seguente ritorneremo sull'argomento.

per ogni S_k' di φ passerà un numero di S_m' contenuti in φ uguale a

$$\infty^{\frac{1}{2}(m+1)(2n-3m-4)-\frac{1}{2}(k+1)(2n-3k-4)+(k+1)(m-k)}=\infty^{\frac{1}{2}(m-k)(2n-3m-k-5)},$$

come pure trovammo per altra via.

32. Le ricerche corrispondenti per dualità a quelle dei numeri precedenti conducono allo studio dei sistemi lineari di piani tutti tangenti ad una data quadrica non specializzata φ. Ma noi vedemmo che uno spazio lineare S_m' di punti è tutto contenuto in φ quando è tutto contenuto nel sistema lineare Σ_m' dei piani tangenti a φ in quei punti. Questa condizione corrisponde per dualità a se stessa, cosicchè possiamo conchiudere:

I piani tangenti a φ nei punti di un S_m' *contenuto in essa formano un* Σ_m' *di suoi piani tangenti; e viceversa.*

Tralasciamo per brevità di enunciare per questi Σ_m' le proposizioni corrispondenti a quelle trovate per gli S_m' di φ.

33. Ogni S_m' dello spazio ha per polare rispetto a φ un S_{n-2-m}', col quale non ha in generale alcun punto comune, nè sta in un piano comune (V. n^0 5). Supponiamo però di prendere in modo quei due spazi lineari polari che essi abbiano comune un S_a' e quindi (V. n^0 5) stiano in un S_{n-2-a}', cioè in un Σ_a' di piani. Allora tutti i punti di quel S_a' staranno su questi piani, che sono i loro piani polari rispetto a φ, e quindi staranno su φ ed avranno questi per piani tangenti. Dunque ogni qual volta uno spazio lineare qualunque di punti taglia in un S_a' il suo spazio polare rispetto ad una data quadrica φ, sempre quel S_a' è uno spazio lineare contenuto in questa quadrica, ed il Σ_a' dei piani che allora passano pei due spazi lineari polari è il sistema lineare dei piani tangenti alla quadrica in quei punti.

Caso particolare di questa proposizione è quella vista che ogni spazio lineare di punti contenuto nella quadrica è pure completamente contenuto nel suo spazio polare rispetto a questa.

34. Diremo che uno spazio lineare S_m' qualunque è *tangente* a φ in un punto x, quando la quadrica ad $m-1$ dimensioni S_{m-1}^2 secondo cui esso taglia φ è specializzata, avendo un punto doppio in x ([16]).

([16]) Questa definizione, per $m=n-2$, concorda, come vedemmo, colla definizione già data del piano tangente.

Diremo poi che un S'_m è *tangente di specie* $(a+1)^{\text{esima}}$ quando l'intersezione S^2_{m-1} con φ è $a+1$ volte specializzata, cioè ha un S_a' di punti doppi. Ciascuno di questi punti doppi (punti di contatto del S'_m) è in tal caso coniugato a tutti i punti di quel S'_m rispetto a quel S^2_{m-1}, e quindi anche rispetto a φ, sicchè tutto quel S_a' di punti doppi starà sul S'_{n-2-m} polare del S'_m rispetto a φ, onde l'S'_m tangente di specie $a+1$ a φ si trova precisamente nella condizione di cui parlammo nel numero precedente, cioè di aver comune col S'_{n-2-m} polare rispetto a φ un S_a', il quale sta in conseguenza su φ. Viceversa, se questo accade, l'S^2_{m-1}, in cui quel S'_m taglierà φ, sarà tale che rispetto ad esso i punti del S_a' saranno coniugati a tutti i punti del S'_m, e quindi saranno punti doppi del S^2_{m-1}, sicchè l'S'_m sarà tangente di specie $a+1$ a φ. Conchiudiamo che:

Uno spazio lineare di punti $\mathrm{S'_m}$ *tangente di specie* $\mathrm{a}+1$ *alla quadrica* φ *è uno spazio lineare avente comune col suo polare un* $\mathrm{S'_a}$ *(contenuto perciò in* φ*). Due spazi polari* $\mathrm{S'_m}$, $\mathrm{S'_{n-2-m}}$ *sono tangenti della stessa specie a* φ *e in uno stesso* $\mathrm{S'_a}$ *di* φ*, che è quello che essi hanno comune, e sono contenuti nel* Σ'_{a} *dei piani tangenti a* φ *nei punti di quel* $\mathrm{S'_a}$. *Dato* m, *il numero* a *non può crescere al di là del minore tra i due numeri* m *ed* $\mathrm{n}-2-\mathrm{m}$.

In particolare vi è una sola specie di piani tangenti S'_{n-2} ($m = n-2$, $n-2-m=0$ e quindi $a=0$); vi sono due specie di S'_{n-3} e di S_1' tangenti, cioè l'una avente un solo punto di contatto ($a=0$), l'altra corrispondente agli S_1' che son contenuti in φ ($a=1$) ed agli S'_{n-3} che toccano φ in S_1'; vi sono 3 specie di S_2' e di S'_{n-4} tangenti, la 1ª specie ($a=0$) ha un solo punto di contatto, la 2ª specie ($a=1$) ha un S_1' di contatto, la 3ª finalmente ($a=2$) comprende gli S_2' contenuti in φ e gli S'_{n-4} che toccano φ in un tale S_2'; e così via.

35. Considerando lo spazio lineare S'_{m-1} determinato dagli m punti $x', x'', \ldots, x^{(m)}$, possiamo facilmente trovare le condizioni analitiche perchè esso sia tangente di una data specie a φ. In fatti, in quello spazio, la quadrica S^2_{m-2} d'intersezione con φ avrà per equazione nelle variabili λ_i (coordinate di punti *sul* S'_{m-1}):

$$\varphi(\lambda_1 x' + \lambda_2 x'' + \ldots + \lambda_m x^{(m)}) = 0,$$

ossia:

$$\Sigma_{ik}\, \varphi(x^{(i)}, x^{(k)}) \,.\, \lambda_i \lambda_k = 0.$$

Ora la condizione di un contatto di data specie equivale allo specializzarsi di questa quadrica, il cui discriminante è:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x'x') & \varphi(x'x'') & . & \varphi(x'x^{(m)}) \\ \varphi(x''x') & \varphi(x''x'') & . & \varphi(x''x^{(m)}) \\ . & . & . & . \\ \varphi(x^{(m)}x') & \varphi(x^{(m)}x'') & . & \varphi(x^{(m)}x^{(m)}) \end{vmatrix}.$$

Dunque uguagliando a zero questo determinante si ha la condizione perchè lo spazio $S'_{m-1}\, x', x'', \dots, x^{(m)}$ sia tangente (semplicemente) a φ, ed è facile vedere che in essa le coordinate x compaiono solo in quei raggruppamenti, che costituiscono le coordinate del S'_{m-1} considerato (V. n^0 4), sicchè essa potrà riguardarsi come un'*equazione tangenziale* di φ in queste coordinate.

Annullando inoltre i subdeterminanti d'ordine $m-a$ di quel determinante si hanno le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'S'_{m-1} considerato sia tangente di specie $a+1$ a φ.

36. Ma la condizione di semplice contatto si può anche ottenere sotto un'altra forma importante, supponendo l'S'_{m-1} determinato, invece che da m suoi punti, da $n-m$ piani passanti per esso, i quali siano $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-m)}$. Affinchè l'$S'_{m-1}$ comune a questi piani sia tangente alla quadrica

$$\varphi \equiv \Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

in un suo punto x vedemmo esser necessario e sufficiente che esso sia contenuto nel piano tangente in x a φ e che esso passi per x. Quel piano tangente in x deve dunque avere coordinate della forma $\mu_1\, \xi'_i + \dots + \mu_{n-m}\, \xi_i^{(n-m)}$, cioè dev'essere:

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n &= \mu_1\, \xi'_1 + \dots + \mu_{n-m}\, \xi_1^{(n-m)} \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n &= \mu_1\, \xi'_2 + \dots + \mu_{n-m}\, \xi_2^{(n-m)} \\ \dots\dots &\qquad \dots\dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \dots + a_{nn}\, x_n &= \mu_1\, \xi'_n + \dots + \mu_{n-m}\, \xi_n^{(n-m)}. \end{aligned}$$

Inoltre dev'essere per ipotesi:

$$\begin{aligned} \xi'_1\, x_1 + \xi'_2\, x_2 + \dots + \xi'_n\, x_n &= 0 \\ \xi''_1\, x_1 + \xi''_2\, x_2 + \dots + \xi''_n\, x_n &= 0 \\ \dots\dots & \\ \xi_1^{(n-m)}\, x_1 + \xi_2^{(n-m)}\, x_2 + \dots + \xi_n^{(n-m)}\, x_n &= 0. \end{aligned}$$

Dunque, affinchè si possano determinare le x_i e le μ_i in modo che, senza annullarsi tutte, verifichino queste equazioni, basterà che sia:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} & \xi'_1 & \cdot & \xi_1^{(n-m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} & \xi'_n & \cdot & \xi_n^{(n-m)} \\ \xi'_1 & \cdot & \xi'_n & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(n-m)} & \cdot & \xi_n^{(n-m)} & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa è dunque un'altra forma dell'equazione tangenziale della quadrica φ, essendo ancora S'_{m-1} gli spazi tangenti (17). Sotto questa forma si vede immediatamente come in essa non compaiano che le coordinate del S'_{m-1}, le quali inoltre vi compaiono solo al 2^0 grado (18).

Il primo membro di quell'equazione rappresenta le principali forme invariantive della quadrica φ. Per $m = n$ essa ci dà il discriminante di φ; per $m = n - 1$ la *forma aggiunta* di φ, cioè l'equazione della quadrica in coordinate di piani tangenti; per $m = n - 2$

(17) Del resto si può dimostrare con trasformazioni analitiche che il 1^0 membro di questa nuova equazione è identico (a meno di un fattor costante) al 1^0 membro dell'equazione prima ottenuta, cioè al discriminante della intersezione della data quadrica col S'_{m-1} determinato dai piani $\xi', \ldots, \xi^{(n-m)}$. V. D'Ovidio: « *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* » (Mem. Acc. Lincei, 1877, p. 21). In questa Memoria trovai, dopo che il presente § era scritto, alcuni dei risultati che esso contiene (con denominazioni diverse), e che credevo nuovi (V. Mem. cit., pp. 46, 47).

(18) La forma polare

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1n} & \xi'_1 & \cdot & \xi_1^{(n-m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nn} & \xi'_n & \cdot & \xi_n^{(n-m)} \\ \eta'_1 & \cdot & \eta'_n & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n-m)} & \cdot & \eta_n^{(n-m)} & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

col suo annullarsi significa che i due S'_{m-1} determinati rispettivamente dai piani ξ ed η godono della proprietà che vi è un punto dell'uno avente il suo piano polare passante per l'altro. Ciò si dimostra in modo identico a quello usato sopra.

l'equazione in coordinate di S'_{n-3}, e così via; per $m=2$ l'equazione in coordinate di S'_1 tangenti; per $m=1$ si ha di nuovo l'equazione di φ in coordinate di punti. Per $m=0$ si avrebbe un invariante identico.

Quella forma d'equazione, avendo per coefficienti delle coordinate del S'_{m-1} i subdeterminanti d'ordine m del discriminante di φ, è chiaro che essa sarà soddisfatta identicamente quando questi sono tutti nulli, cioè per le quadriche specializzate $n-m+1$ volte (od un numero maggiore). Ciò significa che per tali quadriche ogni S'_{m-1} dello spazio va considerato come tangente. E ciò si capisce, poichè una tal quadrica ha un S'_{n-m} (od ancor più) di punti doppi, cosicchè ogni S'_{m-1} contiene almeno un punto doppio della quadrica stessa e quindi la tocca almeno in un punto. Quindi ora siamo in grado di esprimere la proprietà proiettiva dell'essere una quadrica specializzata un dato numero di volte mediante la condizione dell'annullarsi identico di un controvariante (cosa a cui alludevamo nel n° 28). Così la condizione perchè una quadrica sia due volte specializzata sarà che si annulli identicamente la sua forma aggiunta.

37. I ragionamenti fatti sul principio del presente § (V. n° 30) per trovare gli spazi lineari di punti contenuti in una data superficie di 2° ordine non specializzata si possono applicare perfettamente al caso in cui questa sia specializzata un numero qualunque h di volte, cioè abbia un S'_{h-1} doppio: basterà tener conto del fatto che nei vari punti x, x', x'' ... che in quel ragionamento si prendono sulla quadrica i piani tangenti andranno tutti in questo caso a passare per quel S'_{h-1} doppio. Ma possiamo anche valerci dei risultati ottenuti per le quadriche non specializzate ricordando che una quadrica h volte specializzata si può sempre ottenere proiettando dal S'_{h-1} doppio una quadrica S^2_{n-2-h} non specializzata contenuta in un S'_{n-1-h}; il quale non abbia alcun punto comune con quel S'_{h-1} (V. n° 19). Quindi applicando a questi S^2_{n-2-h} i teoremi visti per le quadriche non specializzate, solo ponendo $n-h$ in luogo di n, abbiamo:

In una quadrica h *volte specializzata dello spazio ad* $\mathrm{n}-1$ *dimensioni stanno solo degli spazi lineari (passanti per quello doppio della quadrica) il cui numero di dimensioni è uguale (o minore) a* $(\mathrm{n}+\mathrm{h}-3)/2$ *od a* $(\mathrm{n}+\mathrm{h}-2)/2$ *secondo che* $\mathrm{n}+\mathrm{h}$ *è impari o pari. Nel* 1° *caso vi sono* $\infty^{(\mathrm{n}-\mathrm{h}-1)(\mathrm{n}-\mathrm{h}+1)/8}\,\mathrm{S}'_{(\mathrm{n}+\mathrm{h}-3)/2}$, *nel* 2° *caso* $\infty^{(\mathrm{n}-\mathrm{h})(\mathrm{n}-\mathrm{h}-2)/8}\,\mathrm{S}'_{(\mathrm{n}+\mathrm{h}-2)/2}$ *formanti due diversi sistemi.*

Per $\mathrm{m}\leqq(\mathrm{n}+\mathrm{h}-2)/2$ *esistono sulla quadrica* $\infty^{(\mathrm{m}-\mathrm{h}+1)(2\mathrm{n}-3\mathrm{m}+\mathrm{h}-4)/2}$ S'_{m}, *sì che per ogni punto (non doppio) di essa e quindi per tutto l'*S'_{h} *che* *lo congiunge al* S'_{h-1} *dei punti doppi ne passano* $\infty^{(m-h)(2n-3m+h-5)/2}$, *e per ogni* S'_k *della quadrica passante pei punti doppi* $(h-1<k<m)$ *ne passano* $\infty^{(m-k)(2n-3m-k+2h-5)/2}$.

§ 4.

Applicazioni della proiezione centrale alla geometria su una quadrica. Nuovi teoremi riguardanti questa geometria.

38. Per lo studio della geometria su una quadrica a più dimensioni è di grande utilità il metodo della proiezione centrale. Sia data una quadrica φ ad $n-2$ dimensioni, che potremo supporre non specializzata (altrimenti basterebbe considerarne una sezione fatta con un conveniente spazio lineare). Nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni S in cui essa sarà contenuta (V. n° 7) si prenda ad arbitrio un piano, o spazio lineare ad $n-2$ dimensioni $\mathbf{S}$, e da un punto fisso P di quella quadrica preso fuori di $\mathbf{S}$ si conducano gli S_1' ai vari punti M di φ: essi andranno a tagliare $\mathbf{S}$ nei suoi punti $\mathbf{M}$, e così si avrà su $\mathbf{S}$ la proiezione centrale di φ, in modo che ad ogni punto M di φ corrisponderà un punto $\mathbf{M}$ di $\mathbf{S}$, e viceversa ad ogni punto $\mathbf{M}$ di $\mathbf{S}$ corrisponderà in generale un solo punto M di φ. In questa corrispondenza però vi saranno elementi eccezionali. Consideriamo in fatti il piano π tangente in P a φ e consideriamo l'intersezione $\mathbf{I}$ ad $n-3$ dimensioni di esso con $\mathbf{S}$ e poi la quadrica $\mathbf{C}$ ad $n-4$ dimensioni in cui $\mathbf{I}$ taglierà φ. Dalle proprietà viste del piano tangente ad una quadrica segue che un S_1' qualunque condotto per P nel piano π (cioè ad un punto qualunque di $\mathbf{I}$) taglia φ in due punti coincidenti con P, esclusi gli S_1' che vanno da P ad un punto qualunque dell'intersezione di π con φ, poichè questi S_1' sono tutti contenuti in questa intersezione; essi tagliano $\mathbf{S}$ nei punti di $\mathbf{C}$. Di qui segue che nella corrispondenza tra i punti della quadrica ad $n-2$ dimensioni φ e quelli dello spazio lineare, pure ad $n-2$ dimensioni, $\mathbf{S}$ al punto P di φ corrispondono in $\mathbf{S}$ tutti i punti dello spazio lineare ad $n-3$ dimensioni $\mathbf{I}$ (i quali punti rappresentano in certo qual modo le diverse direzioni, che sulla quadrica φ vanno pel punto P), mentre tra questi punti di $\mathbf{I}$ quelli posti sulla quadrica $\mathbf{C}$ ad $n-4$ dimensioni di $\mathbf{S}$ sono tali che a ciascuno di essi corrisponde in φ non un solo punto, ma tutti i punti di un S_1' passante per P. Quindi se consideriamo su φ uno spazio algebrico di dimensioni ed ordine qualunque S_m^g non passante per P, gli corrisponderà in $\mathbf{S}$ uno spazio algebrico $\mathbf{S}_m^g$ (dove il segno $\mathbf{S}$ è usato per indicare

uno spazio contenuto nello spazio ad $n-2$ dimensioni **S**) delle stesse dimensioni e dello stesso ordine, il quale però godrà della proprietà di tagliare **I** in un $\mathbf{S}_{m-1}^{g}$ tutto contenuto in **C**, perocchè l'intersezione con **I** non è altro che la proiezione della intersezione del S_m^g con π, e questa stando su φ e π avrà la proiezione posta su **C**, se, come noi supponiamo, l'S_m^g considerato di φ non passa pel centro di proiezione P. In particolare se $m=n-3$ e consideriamo su φ la sua intersezione S_{n-3}^{2i} con una superficie algebrica qualunque ad $n-2$ dimensioni di ordine i, siccome ogni S_1' di $\pi\varphi$ taglierà questa superficie in i punti di quel S_{n-3}^{2i}, così potremo conchiudere che in **S** l'imagine di questo S_{n-3}^{2i} è un $\mathbf{S}_{n-3}^{2i}$ passante i volte per **C**.

39. Questa rappresentazione univoca dei punti di una quadrica a più dimensioni nei punti di uno spazio lineare ad altrettante dimensioni ha una grandissima importanza (19). Noi vogliamo ora ap-

(19) La rappresentazione comprende come caso particolare quella data dal NÖTHER nella Memoria « *Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Variabeln* » (Göttinger Nachrichten, Juli 1869) e trovata pure dal LIE, che ne fece applicazioni nell'importante sua Memoria « *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe, u. s. w.* » (Math. Ann., V), rappresentazione nella quale alle rette di un complesso lineare (formanti un S_3^2, sicchè qui $n=5$) si fanno corrispondere i punti dello spazio ordinario (S_3^1) essendovi però nel complesso una retta fissa, a cui corrispondono tutti i punti di un piano (il piano all'infinito), e nello spazio di punti essendovi su questo piano una quadrica ad 1 dimensione, cioè una conica (assoluto) ad ogni punto della quale corrispondono nel complesso tutte le rette di un fascio contenente la retta fissa. In seguito a questo lavoro di LIE, il KLEIN nella Memoria « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* » (Math. Ann., V, p. 257) (V. anche la dissertazione « *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* », Erlangen, 1872) generalizzò la rappresentazione, estendendola ad uno spazio a quante si vogliano dimensioni, dando le formule corrispondenti e mostrando che essa si può considerare, come noi facciamo, come una proiezione centrale, o, com'egli la chiama, proiezione *stereografica*. Notò pure il KLEIN come essa renda equivalenti tra loro la geometria proiettiva di una quadrica a più dimensioni (con un suo punto fisso) e la geometria metrica (euclidea) di uno spazio lineare ad altrettante dimensioni. Egli fece inoltre un'applicazione molto importante delle formule di questa rappresentazione dimostrando con esse nella Memoria « *Ueber einen liniengeometrischen Satz* » (Göttinger Nachrichten, 20 März 1872) un notevole teorema, di cui più tardi faremo uso, e che nel linguaggio da noi adoperato si può enunciare così:

Data in uno spazio lineare ad $n-1$ *dimensioni (dove* $n \geqq 5$*) una quadrica ad* $n-2$ *dimensioni, la quale non sia specializzata come luogo più di* $n-5$ *vol-*

plicarla al caso in cui n sia numero pari per ritrovare il numero degli $S'_{(n-2)/2}$ contenuti nella quadrica non specializzata φ, vedere come vi siano realmente due sistemi distinti di tali spazi lineari ed in quali relazioni essi stiano tra loro, e finalmente trovare una proposizione assai importante per la geometria degli spazi algebrici contenuti in una tal quadrica.

Poniamo dunque $n - 2 = 2p$. Allora nello spazio S a $2p + 1$ dimensioni consideriamo la quadrica φ a $2p$ dimensioni, e su essa un S_p': la sua proiezione dal punto P su $\mathbf{S}$ sarà un $\mathbf{S}'_p$, il quale, per quanto vedemmo al n⁰ precedente più in generale, taglia $\mathbf{I}$ in un $\mathbf{S}'_{p-1}$ contenuto completamente in $\mathbf{C}$. Viceversa se in $\mathbf{S}$ consideriamo un $\mathbf{S}'_p$, il quale passi per un $\mathbf{S}'_{p-1}$ di $\mathbf{C}$, gli corrisponderà in φ (oltre ad un S_p' giacente su π e passante per quel $\mathbf{S}'_{p-1}$) un S_p'. Di qui segue che il numero degli S_p' contenuti in φ è uguale al numero di quegli $\mathbf{S}'_p$ dello spazio lineare a $2p$ dimensioni $\mathbf{S}$, i quali passano per degli $\mathbf{S}'_{p-1}$ contenuti in $\mathbf{C}$. Ora in $\mathbf{S}$ quegli $\mathbf{S}'_p$ che passano per un dato $\mathbf{S}'_{p-1}$ sono in numero di ∞^p. Quindi se indichiamo con N_p [$= N(p)$] l'ordine d'infinità del numero degli spazi lineari a p dimensioni contenuti in una quadrica a $2p$ dimensioni, cosicchè φ essendo a $2p$ dimensioni conterrà $\infty^{N(p)}$ S_p', e $\mathbf{C}$ essendo a $2(p-1)$ dimensioni conterrà $\infty^{N(p-1)}$ $\mathbf{S}'_{p-1}$, sarà $\infty^{N(p)} = \infty^p \times \infty^{N(p-1)}$, ossia avremo: $N_p = p + N_{p-1}$, donde, applicando p volte questa formula e notando che $N_0 = 0$, avremo:

$$N_p = \frac{1}{2} p (p + 1).$$

Questo è dunque il numero degli S_p' contenuti in φ, e, se si ricorda che $p = (n - 2)/2$, si vede che questo risultato è identico a quello ottenuto ai n. 30, 31 per tutt'altre vie. Lo stesso metodo ora usato si applica del resto perfettamente a dare gli spazi lineari di varie dimensioni contenuti in qualunque quadrica, poichè consiste in sostanza nel ridurre la questione a quella identica per una quadrica ($\mathbf{C}$) a 2 dimensioni di meno che la data (φ).

---

te, ogni spazio algebrico ad n — 3 *dimensioni contenuto in essa si può rappresentare con un'equazione algebrica da aggiungersi all'equazione della quadrica stessa.*

Il Veronese, nel suo lavoro già altre volte citato, applicò appunto, come noi sopra facciamo, questo metodo della proiezione stereografica di una quadrica a trovare il numero degli S_p' contenuti in un S_{2p}^2; ma, come già notammo (V. la nota al n⁰ 30), il suo risultato discorda da quello che noi già ottenemmo nel § precedente con altri metodi e che qui ritroviamo con questo.

40. Ma ritorniamo al caso in cui φ sia a $2p$ dimensioni nello spazio S a $2p+1$ dimensioni. Nello spazio S due spazi lineari S_p' non si tagliano in generale: perchè essi abbiano un punto comune dev'essere soddisfatta una condizione. Ma se quei due S_p' stanno su φ e non si tagliano, allora conducendo per uno di essi un S_{p+1}' qualunque, questo taglierà l'altro S_p' in un punto, il quale starà necessariamente su un terzo S_p' di φ, in cui quella è tagliata oltre che nel primo dal S_{p+1}'. Si vede così come un S_p' di φ sia tagliato da una serie di altri S_p' di φ e non sia tagliato dai rimanenti. Ora per veder meglio come ciò accada facciamo uso del nostro metodo: consideriamo cioè su φ due S_p' qualunque, e le loro proiezioni $\mathbf{S}_p'$ su $\mathbf{S}$. Lo spazio $\mathbf{S}$ essendo a $2p$ dimensioni, i due $\mathbf{S}_p'$ hanno sempre comune un punto (uno spazio lineare di punti per eccezione, ma a noi non importa questo caso), il quale potrà stare o non su $\mathbf{C}$. Se questo punto non sta su $\mathbf{C}$, esso sarà la proiezione di un punto determinato di φ, il quale dovrà esser comune ai due S_p' considerati; se invece quel punto sta su $\mathbf{C}$, siccome non sarà più immagine di un punto determinato di φ, quei due S_p' non avranno alcun punto comune in generale. Ora le proiezioni $\mathbf{S}_p'$ di questi contengono due $\mathbf{S}_{p-1}'$ di $\mathbf{C}$, i quali corrispondono così in un certo senso agli S_p' e noi vediamo che in generale due S_p' della quadrica φ a $2p$ dimensioni hanno ovvero non un punto comune secondo che non hanno od hanno un punto comune i due corrispondenti $\mathbf{S}_{p-1}'$ della quadrica $\mathbf{C}$ a $2(p-1)$ dimensioni. Ora anche per questi possiamo ridurci a due $\mathbf{S}_{p-2}'$ di una quadrica a $2(p-2)$ dimensioni, ecc.; finchè finiremo per giungere ad una quadrica a 2 dimensioni (quadrica ordinaria), nella quale, quando pure fosse ignoto, si dimostra ancora collo stesso metodo della proiezione di essa da un suo punto su un piano (con che gli S_1' o rette che essa contiene si proiettano in due fasci distinti di rette di quel piano) che esistono due sistemi ben distinti di S_1' tali, che due di questi si tagliano soltanto ove appartengano a sistemi diversi. Di qui segue adunque la seguente importante proposizione:

In ogni S_{2p}^2 *vi sono due sistemi ben distinti di* S_p'. *Se* p *è numero impari si tagliano in generale soltanto due* S_p' *di diverso sistema. Se invece* p *è pari, si tagliano in generale soltanto due* S_p' *se sono dello stesso sistema* ([20]).

([20]) Questo vale come diciamo, *in generale*, cioè per due S_p' presi comunque; ma anche la dimostrazione data prova, ciò che si vede direttamente senza diffi-

Questa proposizione stabilisce una differenza essenziale tra le quadriche, il cui numero di dimensioni è pari semplicemente e quelle per cui è doppiamente pari, differenza che non credo sia stata avvertita sinora [21]. Essa risalterà ancora di più in un teorema generale che ora dimostreremo.

41. Consideriamo sulla quadrica a $2p$ dimensioni φ uno spazio algebrico qualunque a p dimensioni. Ogni S'_{p+1} dello spazio S lo taglierà in un numero di punti uguale al suo ordine, e siccome tra questi S'_{p+1} ve ne sono, come sappiamo, di quelli che tagliano la quadrica φ secondo due S'_p di diverso sistema, così conchiudiamo che ciascuno di questi taglierà quello spazio algebrico in un certo numero di punti, sì che la somma di questi due numeri sarà uguale all'ordine di quello. Indicheremo con $S_p^{(lm)}$ un tale spazio algebrico contenuto nella quadrica φ e tale che ogni S'_p di φ di un 1° sistema lo tagli in generale in l punti, mentre ogni S'_p del 2° sistema lo tagli in m punti, essendo $l+m$ l'ordine di quello spazio. Ciò posto noi vogliamo risolvere la questione se due tali spazi algebrici hanno punti comuni in generale, e quanti ne hanno.

Per questo notiamo anzitutto che l'imagine su $\mathbf{S}$ di un $S_p^{(lm)}$ di φ è un $\mathbf{S}_p^{l+m}$ che taglia $\mathbf{I}$ in un $\mathbf{S}_{p-1}$ giacente su $\mathbf{C}$ e proiezione su $\mathbf{S}$ dell'intersezione di π col $S_p^{(lm)}$. Ogni S'_p del 1° sistema di φ, il quale passi per P, starà su π e taglierà quel $S_p^{(lm)}$ in l punti: esso poi taglierà $\mathbf{S}$ in un $\mathbf{S}'_{p-1}$ del 1° sistema di $\mathbf{C}$, il quale taglierà adunque l'$\mathbf{S}_{p-1}$ di cui si tratta negli l punti imagini di quelli. Considerando pure il 2° sistema di S'_p di φ e di $\mathbf{S}'_{p-1}$ di $\mathbf{C}$, si vede così come la proiezione del $S_p^{(lm)}$ di φ su $\mathbf{S}$ è un $\mathbf{S}_{p-1}^{l+m}$ che passa per un $\mathbf{S}_{p-1}^{(lm)}$ di $\mathbf{C}$.

---

coltà, cioè che si possono sempre costrurre degli S_p' dello stesso o di diverso sistema ad arbitrio, i quali si taglino in un S'_q, essendo $q < p-1$. In particolare, dato un S'_p qualunque di una quadrica a $2p$ dimensioni, e conducendo per esso un S'_{p+1} ad arbitrio, questo taglierà ancora la quadrica in un S'_p appartenente all'altro sistema.

(21) Però il Cayley in una Nota intitolata « *On the superlines of a quadric surface in fivedimensional space* » (Quart. Journal, XII, 1873) fu condotto dalla considerazione delle rette dello spazio, come formanti una superficie quadrica in uno spazio a 5 dimensioni, a notare la differenza suddetta, ma solo tra le quadriche ordinarie dello spazio a 3 dimensioni e le quadriche dello spazio a 5 dimensioni.

Ciò premesso, consideriamo sulla quadrica φ un $S_p^{(lm)}$ ed un $S_p^{(l'm')}$; le loro proiezioni dal punto P su $\mathbf{S}$ saranno un $\mathbf{S}_p^{l+m}$ ed un $\mathbf{S}_p^{l'+m'}$, che si taglieranno in generale in $(l+m)(l'+m')$ punti (V. n⁰ 6). Però tra questi corrisponderanno a punti comuni del $S_p^{(lm)}$ e del $S_p^{(l'm')}$ solo quelli che non stanno su $\mathbf{C}$, cioè che non sono i punti d'intersezione di quegli $\mathbf{S}_{p-1}^{(lm)}$, $\mathbf{S}_{p-1}^{(l'm')}$ in cui, dietro quanto fu premesso, i suddetti $\mathbf{S}_p^{l+m}$ e $\mathbf{S}_p^{l'+m'}$ tagliano $\mathbf{C}$. Quindi se diciamo X_p il numero cercato dei punti comuni ad un $S_p^{(lm)}$ e un $S_p^{(l'm')}$ di una quadrica a $2p$ dimensioni, numero che, supponendo $l\,m$ e $l'\,m'$ fissi, è una funzione di p, avremo:

$$X_p = (l+m)(l'+m') - X_{p-1}\,.$$

Da questa relazione segue immediatamente: $X_p = X_{p-2}$. Per avere X_0 notiamo che esso sarà il numero relativo ad una quadrica S_0^2, cioè una coppia di punti nell'uno dei quali stanno l punti del $S_0^{(lm)}$ ed l' punti del $S_0^{(l'm')}$, e nell'altro rispettivamente m punti ed m' punti; cosicchè il numero X_0 dei punti comuni a questi $S_0^{(lm)}$, $S_0^{(l'm')}$ va considerato come uguale ad $ll'+mm'$. Dunque sarà, ricordando le relazioni trovate:

$$X_p = ll' + mm' \quad \text{per } p \text{ pari}, \qquad X_p = lm' + l'm \quad \text{per } p \text{ impari},$$

e così otteniamo il seguente teorema:

In ogni $\mathrm{S}_{2\mathrm{p}}^2$ *il numero dei punti comuni a due spazi algebrici a* p *dimensioni* $\mathrm{S}_\mathrm{p}^{(\mathrm{lm})}$ *e* $\mathrm{S}_\mathrm{p}^{(\mathrm{l'm'})}$ *è uguale a* $\mathrm{lm'}+\mathrm{l'm}$ *se* p *è impari, ed è uguale a* $\mathrm{ll'}+\mathrm{mm'}$ *se* p *è pari.*

Quest'importante teorema comprende evidentemente come caso particolare (corrispondente a valori particolari di l, m, l', m') quello trovato al n⁰ precedente. Ponendovi poi anzitutto $p=1$, abbiamo per la geometria su d'una quadrica ordinaria a 2 dimensioni un teorema dovuto allo CHASLES [22]. E ponendovi poi $p=2$ abbiamo la proposizione relativa ad una quadrica a 4 dimensioni, e vedremo a suo tempo che considerando la retta dello spazio ordinario come l'elemento di una tal quadrica, quella proposizione costituisce l'importante teorema di HALPHEN sul numero delle rette comuni a due sistemi doppiamente infiniti di date caratteristiche.

([22]) « *Propriétés générales des courbes gauches tracées sur l'hyperboloïde* » (Comptes-rendus, Déc. 1861, 53, p. 1077). — Anche altri teoremi contenuti in questa Memoria si potrebbero estendere alle quadriche a più dimensioni, facendo uso del nostro metodo. Però non lo facciamo per non dilungarci troppo.

§ 5.

Generazione delle quadriche con sistemi reciproci.

42. Lo studio fatto nei §§ precedenti degli spazi lineari di punti contenuti in una data quadrica ha stretta relazione colla questione della generazione di questa mediante forme proiettive. Questa è appunto la questione che ora risolveremo.

Abbiansi due sistemi lineari $m-1$ volte infiniti di superficie algebriche nello spazio di punti ad $n-1$ dimensioni, sistemi tali che ad ogni superficie dell'uno ne corrisponda un sistema lineare $m-2$ volte infinito dell'altro, e viceversa ad ogni sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie contenuto in questo corrisponda una sola superficie del primo sistema; diremo allora che essi sono *reciproci*. Ci proponiamo anzitutto di determinare il luogo dei punti dello spazio comuni ad una superficie del 1^0 sistema, ed a tutte le corrispondenti superficie del 2^0 [23].

Siano:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots + \lambda_m U_m = 0, \tag{1}$$

$$\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \dots + \mu_m V_m = 0, \tag{2}$$

le equazioni dei due sistemi lineari di superficie, nelle quali i simboli U, V rappresentano funzioni date delle coordinate di punti rispettivamente dei gradi dati l, k, e le λ, μ sono i parametri variabili delle superficie dei due sistemi. Affinchè questi parametri appartengano a superficie corrispondenti dovranno, per la definizione data della reciprocità, soddisfare ad un'equazione bilineare fissa tra le due serie di variabili λ e μ. Sia:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, \lambda_i\, \mu_k = 0, \tag{3}$$

quest'equazione, in cui le a_{ik} siano costanti date. Consideriamo un punto qualunque x del luogo cercato; vi sarà per ipotesi un determinato sistema di valori delle λ pei quali x soddisferà l'equazione (1) e pei quali inoltre tutti gl'infiniti sistemi corrispondenti per la (3)

([23]) Il PADOVA, nella Memoria « *Della generazione delle superficie mediante reti proiettive* » (Giornale di matem., 9), fece pel primo questa ricerca analiticamente. Però egli considerò solo il caso delle reti di superficie nello spazio ordinario; inoltre il ragionamento, di cui noi qui facciamo uso, pare preferibile per eleganza e semplicità a quello usato in quel lavoro.

di valori delle μ saranno tali che, sostituiti nella (2), questa sarà sempre soddisfatta dal punto x. In altri termini le equazioni (2) e (3) lineari nelle μ devono equivalersi se vi si pongono il punto considerato x ed il sistema considerato di valori delle λ. Dunque dev'essere:

$$\varrho V_k = \sum_i a_{ik} \lambda_i\,, \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

essendo ϱ costante rispetto a k, ed essendosi nelle V_k sostituite le coordinate del punto x. Ma le λ devono pur soddisfare la (1), cioè:

$$0 = \sum_i U_i \lambda_i\,,$$

dove nelle U_i si sia fatta la stessa sostituzione. Dunque, eliminando tra queste $m+1$ equazioni omogenee ϱ e le λ_i, il punto x dovrà soddisfare l'equazione:

$$\begin{vmatrix} 0 & U_1 & . & U_m \\ V_1 & a_{11} & . & a_{m1} \\ . & . & . & . \\ V_m & a_{1m} & . & a_{mm} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Viceversa se il punto x soddisfa quest'equazione si potranno determinare le λ in guisa da soddisfare la (1) e le (4), e queste mostrano che allora quel punto starà su una superficie determinata (λ) del sistema (1) e su tutte quelle (μ) corrispondenti del sistema (2). Dunque l'equazione (5) è quella del luogo cercato. Essa essendo simmetrica rispetto alle U, V ci mostra che questo luogo è una superficie d'ordine $l+k$ [24], la quale è pure luogo dei punti comuni ad ogni superficie del 2^0 sistema ed a tutte le corrispondenti del 1^0 sistema. Se le superficie di un sistema hanno punti comuni, l'equazione (5) mostra pure che essi apparterranno alla superficie così generata.

---

[24] La trattazione del problema qui considerato si può pur fare sinteticamente senza difficoltà. Così questo risultato si dimostra brevemente come segue col principio di corrispondenza. Consideriamo un S_1' qualunque: per ogni suo punto passa un sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie del primo sistema, cui corrisponderà nel 2^0 una determinata superficie, che taglierà quel S_1' in k punti; viceversa se prendiamo uno di questi vi passerà un sistema lineare $m-2$ volte infinito di superficie del secondo sistema, cui corrisponderà una sola superficie del 1^0, la quale taglierà l'S_1' in l punti. Vi è dunque su questo una corrispondenza (l, k) i cui $l+k$ punti uniti staranno sul luogo cercato, che è quindi di ordine $l+k$.

43. Poniamo in particolare $l = k = 1$, cioè che i sistemi lineari reciproci considerati (1) e (2) di superficie siano sistemi lineari di piani. Allora la superficie (5) da essi generata sarà una quadrica: vediamo se sia specializzata o generale. Indicando con A_{ik} il subdeterminante complementare di a_{ik} nel determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

dell'equazione di reciprocità (3), l'equazione (5) della quadrica si potrà scrivere:

$$\sum_{ik} A_{ik}\, U_i V_k = 0.$$

Annullando le derivate parziali di quest'equazione rispetto alle n coordinate, si hanno n equazioni tutte omogenee lineari nelle $2m$ espressioni U e V. Quando $2m \geqq n$ è facile persuadersi che in generale non vi saranno punti soddisfacenti quelle n equazioni derivate, cioè non vi saranno punti doppi. Ma quando $2m < n$, allora quelle n equazioni saranno soddisfatte dai punti comuni ai piani U, V dei due sistemi reciproci (1), (2), punti che in tal caso formano un S'_{n-2m-1}, pel quale passano i sostegni S'_{n-m-1} dei due sistemi reciproci. Dunque nel caso in cui $2m < n$, la quadrica generata da questi è in generale specializzata $n - 2m$ volte, avendo per punti doppi i punti comuni ai sostegni dei due sistemi reciproci. Conchiudiamo dunque:

Due sistemi lineari reciproci ad m — 1 *dimensioni di piani generano colle intersezioni dei piani dell'uno con tutti quelli corrispondenti dell'altro una quadrica passante pei sostegni dei due sistemi; quando* $\mathrm{m} < \mathrm{n}/2$ *questa quadrica è specializzata* n — 2m *volte, avendo per punti doppi quelli comuni a quei due sostegni. In particolare due fasci proiettivi di piani* (m = 2) *generano colle intersezioni dei piani corrispondenti una quadrica avente per punti doppi l'*$\mathrm{S}'_{\mathrm{n}-5}$ *che è in generale comune ai sostegni dei due fasci.*

La condizione $m \geqq n/2$ affinchè la quadrica generata non sia specializzata è ben naturale, giacchè i sostegni sono S'_{n-m-1} e stanno sulla quadrica; quindi perchè questa non sia specializzata dev'essere $n - m - 1 \leqq (n - 2)/2$, cioè appunto $m \geqq n/2$.

44. Possiamo ora invertire il risultato ottenuto ricordando la proposizione a cui giungemmo nel § 2 (n⁰ 25), che due quadriche specializzate uno stesso numero h di volte si possono trasformare

l'una nell'altra in $\infty^{n(n-1)/2+h(h-1)/2}$ modi. Di qui segue infatti che se una quadrica h volte specializzata è generabile con sistemi reciproci di piani di una certa specie, tutte le quadriche h volte specializzate saranno generabili a quel modo, ed inoltre si potranno mutare in infiniti modi i sistemi reciproci (ed i loro sostegni) atti a generare una stessa quadrica. Invero, considerando anzitutto una quadrica generale, essa contiene (V. n° 30) $\infty^{(n-m)(3m-n-1)/2}\ S'_{n-m-1}$, e quindi le condizioni perchè i sostegni di due sistemi reciproci generanti un'altra quadrica, che si può in $\infty^{n(n-1)/2}$ modi trasformare in questa, si trasformino appunto in due dati S'_{n-m-1} di questa saranno $(n-m)$ $(3m-n-1)$, sicchè di parametri disponibili nella trasformazione ne rimangono:

$$\frac{1}{2}n(n-1)-(n-m)(3m-n-1)=3m^2-(4n+1)m+\frac{1}{2}(3n^2+n),$$

numero che è sempre positivo, qualunque siano m ed n (purchè $n>1$), e che esprime l'ordine d'infinità del numero di modi in cui i 2 sistemi lineari di piani aventi i sostegni scelti si possono ancora riferire reciprocamente tra loro sì da generare la data quadrica. Dunque:

Ogni quadrica si può generare come luogo delle intersezioni dei piani corrispondenti di due sistemi reciproci di piani, i cui sostegni si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica; la specie dei due sistemi atti a questa generazione può esser qualunque, purchè tale che la quadrica data, specializzata o non, sia capace di contenerne i sostegni (25).

Ad esempio una quadrica generale dello spazio ad $n-1$ dimensioni può generarsi con due sistemi lineari reciproci di piani ad $n-1$ dimensioni ($m=n$), cioè con una correlatività tra due spazi sovrapposti, come luogo di quei punti dello spazio che stanno sui piani corrispondenti. Può generarsi con due sistemi lineari reciproci ad $n-2$ dimensioni di piani ($m=n-1$) aventi per sostegni due punti arbitrari della quadrica e nei quali ad un piano dell'uno corrisponde un S_1' nell'altro. E così via. Se n è impari si può solo andare fino ai sistemi lineari di piani ad $(n-1)/2$ dimensioni; se invece n è pari, si può solo andare fino ai sistemi lineari di piani ad $(n-2)/2$ dimensioni.

---

(25) Questo teorema si trova già, senza dimostrazione, nella Memoria citata del VERONESE (loc. cit., p. 192).

Se invece la quadrica data è specializzata h volte, e si prendono i sostegni dei due sistemi lineari reciproci sì, che passino pei suoi punti doppi, allora si può prendere il numero delle dimensioni di quei due sistemi da $n-1$ fino a $(n-1-h)/2$ oppure $(n-2-h)/2$ secondo che l'uno o l'altro dei due numeri è intero. Del resto, questo caso si deduce da quello di una quadrica non specializzata, considerando in luogo della data la sua intersezione con un S'_{n-1-h}, che sarà una quadrica non specializzata, e proiettando tutto dal S'_{h-1} doppio della data quadrica. Gli è chiaro che proiettando sistemi lineari reciproci di S'_{n-2-h} posti in quel S'_{n-1-h} si hanno sistemi lineari reciproci di piani nello spazio S.

45. Per ultimo osserviamo che quando si ha una quadrica a numero pari di dimensioni S^2_{2p}, essa è generabile con sistemi reciproci di piani aventi per sostegni due S'_p contenuti in essa, e siccome gli S'_p della quadrica formano in tal caso due diversi sistemi, come vedemmo nel § precedente, si può domandare se quei sostegni devono essere S'_p dello stesso oppure di diverso sistema. Notiamo che quando si prendano ad arbitrio nello spazio a $2p+1$ dimensioni due sistemi lineari reciproci di piani, i quali siano p volte infiniti, cioè abbiano per sostegni degli S'_p, la quadrica che essi generano è generale, perchè i due sostegni S'_p non hanno in generale punti comuni. Ma, se questi avessero punti comuni, la quadrica generata ne riceverebbe dei punti doppi. Dunque, se la quadrica data non ha, come noi supponiamo, punti doppi, per generarla con sistemi reciproci di piani p volte infiniti, bisognerà prendere ad arbitrio per loro sostegni due S'_p della quadrica, i quali non abbiano punti comuni, e quindi, in virtù dei risultati del § precedente, siano di uno stesso sistema se p è impari, di diverso sistema se p è pari.

I casi più semplici $p=1$ e $p=2$ corrispondono alla quadrica ordinaria a 2 dimensioni ed alla quadrica a 4 dimensioni. La quadrica ordinaria è generabile con due fasci proiettivi di piani, i cui sostegni si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica stessa, purchè siano generatrici dello *stesso* sistema. La quadrica a 4 dimensioni invece è generabile con due *stelle* reciproche di piani aventi per sostegni degli S'_2, sì che ad ogni piano S'_4 dell'una stella ne corrisponde nell'altra un fascio, o, se si vuole, l'S'_3 comune a questo fascio, e le intersezioni S'_2 dei corrispondenti S'_4 ed S'_3 delle due stelle hanno per luogo la quadrica: orbene i sostegni delle due stelle si possono prendere ad arbitrio sulla quadrica, purchè siano S'_2 di *diverso* sistema (i quali non abbiano posizione particolare l'uno rispetto all'altro, cioè non abbiano punti comuni).

PARTE SECONDA

FASCI E SCHIERE DI QUADRICHE; QUARTICHE OMOFOCALI

§ 1.

Fascio di quadriche e polarità rispetto ad esso.

46. Abbiansi nello spazio di punti S ad $n-1$ dimensioni due quadriche

$$\varphi \equiv \Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

$$f \equiv \Sigma c_{ik}\, x_i\, x_k = 0.$$

Tutte le quadriche, che si ottengono dall'equazione $\lambda\varphi + \mu f = 0$, dando al rapporto $\lambda : \mu$ tutti i valori possibili, diconsi formare un *fascio* di quadriche. È chiaro che esse si possono anche definire come quelle quadriche che contengono tutti i punti comuni alle due date φ, f. Questi punti comuni formano (V. n⁰ 6) un S_{n-3}^4, che costituisce la *base* del fascio e che noi chiameremo *quartica* (mentre non daremo tal nome a quegli S_{n-3}^4, che non si potessero ottenere in questo modo).

47. Consideriamo i punti in cui le quadriche del fascio sono tagliate da uno spazio lineare qualunque di punti, p. e. da un S'_{m-1} rappresentato dalle equazioni:

$$x_i = \sum_r \lambda^{(r)}\, x_i^{(r)} \qquad (r = 1, \ldots, m)\,(i = 1, \ldots, n),$$

in cui gli $x^{(r)}$ sono m punti dati che determinano l'S'_{m-1}, e le $\lambda^{(r)}$ sono variabili, che si possono considerare come coordinate di punti sul S'_{m-1}. Facendo questa sostituzione nell'equazione del fascio

$$\lambda\varphi(x) + \mu f(x) = 0,$$

essa diventa:

$$\lambda \sum_{rs} \varphi(x^{(r)}\, x^{(s)})\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} + \mu \sum_{rs} f(x^{(r)}\, x^{(s)})\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} = 0,$$

e quindi nelle m coordinate omogenee $\lambda^{(r)}$ sullo spazio S'_{m-1} rappresenta un nuovo fascio di quadriche; sicchè ogni spazio lineare di punti di S taglierà il dato fascio di quadriche secondo un nuovo fascio di quadriche a minor numero di dimensioni: base di questo nuovo fascio sarà l'intersezione di quello spazio lineare colla quartica base del dato fascio. In particolare, ponendo $m=2$, ogni S'_1 dello spazio S taglia il fascio di quadriche dato nelle coppie di punti di un'involuzione quadratica.

48. Volendo vedere quali tra le quadriche del fascio dato siano tangenti al S'_{m-1} considerato basta far uso del criterio generale dato al n⁰ 35. I loro parametri $\lambda:\mu$ saranno dunque dati dall'equazione:

$$|\lambda\varphi(x^{(r)}x^{(s)})+\mu f(x^{(r)}x^{(s)})|=0.$$

Notando che quest'equazione è del grado m in $\lambda:\mu$ possiamo dunque conchiudere:

Ogni $\mathrm{S}'_{\mathrm{m}-1}$ *dello spazio è toccato in generale da* m *quadriche di un dato fascio. In particolare per un punto qualunque dello spazio passa una sola quadrica di questo, un* S'_1 *è toccato da due, un* S'_2 *da tre, ecc.; un piano* $\mathrm{S}'_{\mathrm{n}-2}$ *dello spazio è toccato da* $\mathrm{n}-1$ *quadriche del fascio.*

49. La stessa cosa si dimostra supponendo che l'S'_{m-1} di punti sia determinato mediante $n-m$ piani $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-m)}$ passanti per esso. In tal caso la condizione di contatto colla quadrica (λ, μ) del fascio diventa (V. n⁰ 36):

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11}+\mu c_{11} & . & \lambda a_{1n}+\mu c_{1n} & \xi'_1 & . & \xi_1^{(n-m)} \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda a_{n1}+\mu c_{n1} & . & \lambda a_{nn}+\mu c_{nn} & \xi'_n & . & \xi_n^{(n-m)} \\ \xi'_1 & . & \xi'_n & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \xi_1^{(n-m)} & . & \xi_n^{(n-m)} & 0 & . & 0 \end{vmatrix}=0,$$

equazione che, imaginata svolta secondo le ultime $n-m$ orizzontali e verticali, non solo si mostra del grado m in $\lambda:\mu$, a conferma del risultato già avuto, ma inoltre contiene questo $\lambda:\mu$ solo nei subdeterminanti d'ordine m del discriminante della quadrica $\lambda\varphi+\mu f$. Ciò prova che, se vi è un valore di $\lambda:\mu$ al quale corrisponda una quadrica specializzata (come luogo) un numero di volte che sia $\geqq n-m+1$, quel valore di $\lambda:\mu$ annullando per conseguenza quei subdeterminanti d'ordine m sarà una radice dell'equazione scritta in $\lambda : \mu$, e precisamente una radice, in generale, del grado stesso a cui esso è radice simultaneamente di tutti quei subdeterminanti. Dunque:

Una quadrica h *volte specializzata di un dato fascio di quadriche conta tante volte tra le* m *quadriche tangenti ad un* S'_{m-1} *qualunque dello spazio (essendo* $m - 1 \geqq n - h$) *quante sono le unità contenute nell'ordine di multiplicità a cui la radice corrispondente* $\lambda : \mu$ *del discriminante di una quadrica indeterminata* $\lambda\varphi + \mu f$ *del fascio entra come radice simultaneamente in tutti i subdeterminanti d'ordine* m.

Questa proposizione importante verrà completata nel seguito.

50. Un punto qualunque x dello spazio ha per polare rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio il piano di coordinate $\xi_i = \lambda\varphi_i(x) + \mu f_i(x)$. Dunque, variando $\lambda : \mu$, quel piano descrive un fascio. *I piani polari di un punto rispetto ad un fascio di quadriche formano pure un fascio.* L'S'_{n-3} comune a questi è dunque il luogo di quei punti che sono coniugati di x rispetto a tutte le quadriche del fascio. Del resto è chiaro, anche senza ricorrere ad equazioni, che i punti comuni ai piani polari di x rispetto a due quadriche del fascio saranno coniugati di x rispetto ad entrambe e quindi anche rispetto a tutte le quadriche del fascio, e quindi staranno in tutti i piani polari di x, onde questi formeranno pure un fascio. In particolare tra i piani di questo fascio quello che passa pel punto x sarà il piano tangente all'unica quadrica del fascio dato, la quale passi per x. Se il punto x stesse su quel S'_{n-3}, che diremo suo *polare* rispetto al fascio di quadriche, allora starebbe pure sui suoi piani polari rispetto a tutte queste, e quindi anche su queste, cioè il punto x starebbe sulla quartica base del fascio, e quel S'_{n-3} passante per esso sarebbe tangente a tutte le quadriche di questo, e quindi anche, come si vede facilmente, a quella quartica.

Considerando una quadrica h volte specializzata del fascio, il piano polare di x rispetto ad essa passerà per tutto l'S'_{h-1} doppio di essa, e quindi l'S'_{n-3} polare di x rispetto al fascio giacendo su quel piano taglierà quel S'_{h-1} secondo un S'_{h-2} (per $h > 1$), e non soltanto secondo un S'_{h-3} come accade per un S'_{n-3} qualunque dello spazio S. Diremo allora che l'S'_{n-3} è *secante* del S'_{h-1}. Quindi conchiudiamo che:

Gli S'_{n-3} *polari dei punti dello spazio rispetto ad un dato fascio di quadriche sono secanti dei sistemi di punti doppi delle quadriche del fascio specializzate più d'una volta.*

51. Le espressioni date nel n° precedente delle coordinate del piano polare di x rispetto alla quadrica (λ, μ) del fascio dato mostrano che:

Il fascio dei piani polari di un punto rispetto ad un fascio di quadriche corrisponde proiettivamente a questo fascio.

Se consideriamo in particolare quelle quadriche fisse del fascio le quali sono specializzate, i piani polari corrispondenti sono determinati dal dover passare pei sistemi di punti doppi appartenenti a quelle quadriche specializzate, e noi vediamo che gli S'_{n-3} polari di punti dello spazio rispetto al fascio di quadriche godono della proprietà che i gruppi degli r piani passanti per essi e per i sistemi di punti doppi delle r quadriche specializzate del fascio sono tutti tra loro proiettivi. Nel caso più generale si ha $r = n$, poichè in generale l'equazione

$$|\lambda a_{ik} + \mu c_{ik}| = 0,$$

di grado n in $\lambda : \mu$ ha n radici distinte, che corrispondono ad n quadriche semplicemente specializzate del fascio. Orbene si considerino gli n punti doppi di queste. Ogni S'_{n-3} dello spazio, il quale sia polare di un punto rispetto al fascio di quadriche gode della proprietà che gli n piani che lo congiungono a quegli n punti fissi formano un gruppo che rimane sempre proiettivo a se stesso mutando quel S'_{n-3}, cioè un gruppo che è proiettivo al gruppo delle n quadriche specializzate, o delle n radici di quell'equazione di grado n in $\lambda : \mu$. (Viceversa la condizione che quel gruppo rimanga sempre proiettivo ad uno dato equivalendo ad $n - 3$ condizioni semplici ed essendo $\infty^{2(n-2)}$ il numero di S'_{n-3} dello spazio, segue che, assoggettando questi a quella condizione, il loro numero si riduce ad ∞^{n-1}, quale è appunto il numero degli S'_{n-3} polari di punti dello spazio rispetto al fascio di quadriche; cosicchè questo sistema di S'_{n-3} equivale a quello assoggettato alla prima condizione).

Se supponiamo $n = 4$ otteniamo così il teorema noto che nello spazio ordinario a 3 dimensioni le rette polari dei punti dello spazio rispetto ad una coppia di quadriche, od al loro fascio, sono tali che da esse i vertici dei 4 coni di questo sono proiettati con 4 piani aventi un rapporto anarmonico costante, cioè sono le rette di un *complesso tetraedrale*. L'analogo di questo in uno spazio ad $n - 1$ dimensioni qualunque è dunque l'insieme di quegli S'_{n-3} che, congiunti ad n punti fissi dello spazio dànno n piani formanti un gruppo di dati rapporti anarmonici (od invarianti assoluti).

52. Un S_1' qualunque dello spazio ha, come sappiamo, per spazio polare rispetto ad ogni quadrica del fascio dato un S_{n-3}', che è l'intersezione dei piani polari rispetto ad essa di due punti fissi qualunque del S_1'. Dicendo x', x'' questi punti ed indicando in generale con L_k e M_k i primi membri delle equazioni dei piani polari del punto dato $x^{(k)}$ rispetto alle quadriche φ ed f, i piani polari di x', x'' rispetto alle quadriche del fascio $\lambda\varphi + \mu f$ avranno per equazioni:

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = 0 ; \qquad \lambda L_2 + \mu M_2 = 0 ;$$

e quindi gli S_{n-3}' d'intersezione dei piani che corrispondono ad una stessa quadrica avranno per luogo la superficie d'equazione:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora, questa rappresenta una quadrica generabile con fasci di piani proiettivi (ed avente quindi in generale un S_{n-5}' doppio) avente un secondo sistema di (generatrici) S_{n-3}', che risultano dalle equazioni

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 = 0 ; \qquad k_1 M_1 + k_2 M_2 = 0 ;$$

facendovi variare $k_1 : k_2$, e sono gli S_{n-3}' polari dei punti $(k_1 x' + k_2 x'')$ del S_1' considerato rispetto al fascio dato di quadriche.

L'S_1' taglia quella quadrica in due punti, i quali staranno in conseguenza rispettivamente sugli S_{n-3}' polari del S_1' rispetto a due certe quadriche del fascio e quindi saranno punti di contatto del S_1' con queste due quadriche. Così vediamo confermato il fatto che ogni S_1' tocca due quadriche di un fascio.

53. Un S_2' qualunque ha per polare rispetto ad ogni quadrica del fascio un S_{n-4}', cosicchè il luogo di questi sarà un S_{n-3}, di cui cerchiamo l'equazione. Sia l'S_2' rappresentato da $k_1 x' + k_2 x'' + k_3 x'''$ dove k_1, k_2, k_3 variano, mentre i punti x', x'', x''' sono fissi. L'S_{n-4}' polare di quel S_2' rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ sarà rappresentato dalle equazioni lineari (ritenendo le notazioni precedenti L_k e M_k):

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = 0 ; \qquad \lambda L_2 + \mu M_2 = 0 ; \qquad \lambda L_3 + \mu M_3 = 0 ;$$

e quindi, variando la quadrica nel fascio, il luogo di quel S_{n-4}' avrà per equazioni:

$$\begin{Vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{Vmatrix} = 0,$$

ed è quindi uno spazio cubico S_{n-3}^3, che taglierà l'S_2' in 3 punti comuni a questo ed ai suoi S_{n-4}' polari rispetto a 3 quadriche del fascio, laonde quelli saranno i punti di contatto del S_2' con queste 3 quadriche. Ma la forma di quell'equazione mostra che essa è soddisfatta da quei punti pei quali le due equazioni

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0, \qquad k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0,$$

sono identiche tra loro, cioè da quei punti pei quali passano solo piani corrispondenti tra loro di questi due sistemi proiettivi doppiamente infiniti, ossia passano S_{n-3}' corrispondenti di quei due sistemi. È chiaro che i piani corrispondenti di questi sistemi si tagliano secondo gli S_{n-3}' polari dei punti del S_2' dato rispetto al fascio di quadriche, e ciascuno di questi S_{n-3}' taglia l'S_{n-3}^3 precisamente nel S_{n-4}^2 in cui (escludendo la parte $L_1 = L_2 = L_3 = 0$) questo è tagliato dal piano $k_1 L_1 + k_2 L_2 + k_3 L_3 = 0$. Quindi quegli S_{n-3}' sono *secanti* del S_{n-3}^3, cioè, invece di tagliarlo in spazi di 3^0 ordine ad $n - 5$ dimensioni, lo tagliano in S_{n-4}^2.

54. In generale consideriamo l'S_{m-1}' di punti rappresentato da

$$k_1 x' + k_2 x'' + \ldots + k_m x^{(m)};$$

il suo S_{n-m-1}' polare rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio dato sarà determinato dalle equazioni

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = 0 ; \ldots ; \lambda L_m + \mu M_m = 0 ;$$

ed il suo luogo avrà quindi per equazioni:

$$\begin{vmatrix} L_1 & . & L_m \\ M_1 & . & M_m \end{vmatrix} = 0,$$

sicchè sarà, com'è facile vedere, un S_{n-m}^m (26). Questo taglia in generale l'S_{m-1}' dato in m punti, che saranno i punti di contatto di questo colle m quadriche ad esso tangenti. Quell'equazione rappresenta pure il luogo di quei punti pei quali passano due S_{n-m}' cor-

(26) La teoria dei luoghi generati da sistemi proiettivi di piani, il loro doppio modo di generazione e la considerazione degli spazi lineari secanti, si trovano svolti in modo completo nel lavoro del Veronese, che ne fa pure importanti applicazioni (V. Mem. cit., pp. 245 e seg.).

rispondenti dei due sistemi lineari proiettivi:

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_m L_m = 0$$

$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + \dots + k_m M_m = 0,$$

i cui piani corrispondenti si tagliano negli S'_{n-3} polari dei punti

$$(k_1 x' + k_2 x'' + \dots + k_m x^{(m)}),$$

del S'_{m-1} rispetto al fascio di quadriche. Uno qualunque $(k_1 \dots k_m)$ di questi S'_{n-3} taglia l'S^m_{n-m} di cui trovammo le equazioni precisamente nella sua intersezione con $k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_m L_m = 0$, dalla quale però si escluda $L_1 = 0$, $L_2 = 0, \dots, L_m = 0$, cioè taglia l'S^m_{n-m} in un S^{m-1}_{n-m-1} (invece che in un S^m_{n-m-2}) e quindi è uno spazio lineare secante di quello.

55. Finalmente (per $m = n - 1$) un piano S'_{n-2} dello spazio ha per polo rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio il punto determinato dalle $n - 1$ equazioni:

$$\lambda L_1 + \mu M_1 = 0 \; ; \dots ; \; \lambda L_{n-1} + \mu M_{n-1} = 0 \; ;$$

e quindi il luogo del suo polo rispetto alle quadriche del fascio stesso è dato da

$$\begin{vmatrix} L_1 & . & L_{n-1} \\ M_1 & . & M_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

cioè è un S_1^{n-1} (curva d'ordine $n - 1$) razionale, i cui $n - 1$ punti d'intersezione col piano dato sono i punti di contatto di questo colle $n - 1$ quadriche del fascio, che toccano quel piano. Quell'S_1^{n-1} (il quale gode di molte proprietà notevoli) è pure il luogo dei punti per cui passano due S_1' corrispondenti dei sistemi lineari proiettivi (stelle):

$$k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_{n-1} L_{n-1} = 0$$

$$k_1 M_1 + k_2 M_2 + \dots + k_{n-1} M_{n-1} = 0,$$

i cui piani corrispondenti si tagliano negli S'_{n-3} polari dei punti del dato piano rispetto al fascio di quadriche. Ognuno di questi S'_{n-3} è *secante* del S_1^{n-1}, cioè lo taglia in $n - 2$ punti.

La teoria così svolta della polarità rispetto ad un fascio di quadriche si estenderebbe facilmente alla polarità rispetto ad un sistema lineare qualunque di quadriche. Ma non lo facciamo per non uscire dai limiti, che ci siamo imposti.

§ 2.

Spazi quadratici e lineari contenuti in una quartica. Generazione di questa con sistemi reciproci.

56. La ricerca degli spazi quadratici di punti ad $m-1$ dimensioni S_{m-1}^2 contenuti nella quartica Q d'intersezione di due date quadriche f e φ è assai semplice dopo quella, che abbiamo fatto nel § 3 della 1ª parte, degli spazi lineari S_m' contenuti in una quadrica. È chiaro in fatti che ogni S_m' contenuto in una quadrica del fascio $f\varphi$ taglierà un'altra di queste quadriche in un S_{m-1}^2 contenuto nella quartica Q. Viceversa poi, se un S_{m-1}^2 è contenuto in Q, esso sarà determinato dall'intersezione di un S_m' contenuto in una determinata quadrica del fascio con qualunque altra, o, in casi più particolari, starà in un S_m' contenuto in Q; invero ogni S_{m-1}^2 sta in un S_m' (V. n⁰ 7) e se si considera un punto esterno al S_{m-1}^2, ma posto su questo S_m', per esso passerà una determinata quadrica del fascio (oppure tutte, e quindi anche la quartica Q), la quale, tagliando l'S_m' in quel punto oltre che nel S_{m-1}^2, conterrà tutto l'S_m'. Quindi noi vediamo che ad ogni quadrica del fascio corrisponde un sistema di S_{m-1}^2 contenuti nella quartica Q, cioè gli S_{m-1}^2 pei quali gli S_m' che li contengono sono gli S_m' contenuti nella quadrica considerata. Diremo dunque che ad ogni quadrica passante per la quartica Q corrisponde una *generazione* di questa, sicchè questa ha infinite generazioni corrispondenti a quelle infinite quadriche; in particolare essa ha delle generazioni *specializzate* corrispondenti alle quadriche specializzate del fascio. Ad ogni generazione corrispondono, secondo che n è impari o pari (V. n⁰ 30) $\infty^{(n-1)(n+1)/8}\, S_{(n-5)/2}^2$ ovvero $\infty^{n(n-2)/8}\, S_{(n-4)/2}^2$ (formanti in questo caso due sistemi), nè le appartengono in generale spazi quadratici di maggior numero di dimensioni. Per un punto qualunque della quartica passano di ogni generazione a seconda dei due casi: $\infty^{(n-3)(n-1)/8}\, S_{(n-5)/2}^2$ ovvero $\infty^{(n-4)(n-2)/8}\, S_{(n-4)/2}^2$.

57. Fanno solo eccezione quelle generazioni (in numero finito $\leqq n$) della quartica, le quali sono specializzate. Consideriamo una quadrica h volte specializzata del fascio: avrà un S_{h-1}' doppio, il quale o taglierà un'altra quadrica del fascio secondo un S_{h-2}^2 (purchè $h>1$), oppure vi sarà tutto contenuto; si avranno così sulla quartica un S_{h-2}^2 oppure un S_{h-1}' tutto composto di *punti doppi* di questa, cioè di punti tali che ogni S_2' passante per uno di essi taglia la quartica stessa in 4 punti, di cui due sempre coincidono in quello. In fatti

ogni tal S_2' (piano, nello spazio ordinario) taglia la quadrica specializzata considerata secondo una coppia di S_1' (rette, nello spazio ordinario) tagliantisi in quel punto e taglia un'altra quadrica del fascio in un S_1^2 (conica) passante pel punto stesso, onde in questo coincidono appunto due dei 4 punti d'intersezione di questo S_1^2 con quella coppia di S_1', cioè dei punti d'intersezione del S_2' colla quartica. Diremo *sistema* di punti doppi della quartica tutti quelli così ottenuti da una stessa quadrica specializzata del fascio.

Viceversa ogni punto doppio della quartica, come fu dianzi definito, apparterrà ad un gruppo, cioè sarà un punto doppio di una quadrica specializzata del fascio. In fatti se si proietta la quartica da un suo punto doppio, siccome ogni S_2' uscente da questo la taglia, per definizione, soltanto in altri due punti, così è chiaro che il cono che la proietta sarà quadrico (mentre quello che la proietta da un suo punto qualunque è di 3^0 ordine), cosicchè quel punto è veramente punto doppio di questa quadrica specializzata.

Ricordando i risultati trovati (V. n^0 37) sugli spazi lineari contenuti in una quadrica specializzata avremo:

Ad ogni generazione h *volte specializzata di una data quartica corrispondono secondo che* $n+h$ *è impari o pari*

$$\infty^{(n-h-1)(n-h+1)/8}\, S^2_{(n+h-5)/2} \quad ovvero \quad \infty^{(n-h)(n-h-2)/8}\, S^2_{(n+h-4)/2}$$

(formanti in questo 2^0 caso due sistemi diversi) contenuti nella quartica e passanti tutti pel gruppo di punti doppi di questa corrispondente a quella generazione; per ogni punto della quartica ne passano a seconda dei due casi

$$\infty^{(n-h-3)(n-h-1)/8} \quad ovvero \quad \infty^{(n-h-4)(n-h-2)/8}.$$

In particolare, una generazione semplicemente specializzata della quartica presenta, riguardo alla specie degli spazi quadratici corrispondenti della quartica una differenza dalle generazioni non specializzate solo quando n è impari, e non quando è pari. In fatti, se n è impari le generazioni ordinarie della quartica dànno luogo solo a degli $S^2_{(n-5)/2}$ contenuti in questa, mentre una generazione semplicemente specializzata dà luogo a degli $S^2_{(n-3)/2}$ della quartica. Invece, se n è pari, tanto le generazioni qualunque quanto quelle semplicemente specializzate dànno luogo a degli $S^2_{(n-4)/2}$ contenuti nella quartica.

58. Considerando una quadrica qualunque del fascio, essa si può generare, come vedemmo (V. n^0 44), in infiniti modi mediante due sistemi lineari reciproci di piani ad $m-1$ dimensioni, i cui

sostegni si possono prendere ad arbitrio su essa, cosicchè deve essere: $m \geqq n/2$, a meno che quella quadrica fosse specializzata un certo numero di volte, nel qual caso si può diminuire il numero di dimensioni dei due sistemi, prendendo i sostegni di questi ad arbitrio, purchè tali che siano contenuti nella quadrica. Ciò posto noi abbiamo immediatamente il modo di generare proiettivamente una quartica. Ad ogni quadrica di questa corrisponderà una serie di modi di generare la quartica: basterà prendere i sostegni di due sistemi lineari reciproci ad arbitrio su quella quadrica (in modo però che non abbiano punti comuni) e imaginare tagliati tutti i piani dei due sistemi con una quadrica fissa qualunque del fascio: la intersezione poi di un piano dell'un sistema con tutti i piani corrispondenti dell'altro e con questa quadrica fissa avrà per luogo la quartica considerata. Se la generazione che si considera di questa è h volte specializzata, si potranno prendere per sostegni dei due sistemi reciproci, secondo che $n+h$ è impari o pari, due $S^2_{(n+h-5)/2}$ ovvero due $S^2_{(n+h-4)/2}$ di quella generazione della quartica.

59. Gli spazi quadratici di punti contenuti in una quartica possono servire alla costruzione dell'S'_{n-3} polare di un punto qualunque dello spazio rispetto a quella quartica od al fascio di quadriche da essa determinato. In fatti un S'_m qualunque passante per quel punto taglia ogni quadrica del fascio in un S^2_{m-1} rispetto al quale prendendo l'S'_{m-1} polare del punto stesso, esso starà sul piano polare del punto rispetto a quella quadrica; ma se l'S'_m sta su una delle quadriche del fascio, l' S^2_{m-1} d'intersezione sarà lo stesso per tutte le altre quadriche, appartenendo esso alla quartica comune, e quindi l'S'_{m-1}, polare del punto rispetto a quello, apparterrà al S'_{n-3} polare del punto rispetto alla quartica. Adunque si consideri la quadrica del fascio passante pel dato punto, e nella sua intersezione col suo piano tangente in questo e con un'altra quadrica qualunque del fascio si prendano i vari S^2_{m-1} appartenenti per conseguenza alla quartica e posti su S'_m passanti per quel punto: gli S'_{m-3} polari del punto stesso rispetto a questi avranno per luogo l'S'_{n-3} polare del punto rispetto alla quartica.

60. Gli spazi quadratici di punti contenuti in una quartica data possono anche specializzarsi acquistando uno od infiniti punti doppi. Consideriamo quella generazione che corrisponde ad una quadrica φ h volte specializzata del fascio, provenendo dagli spazi lineari S'_m contenuti in questa quadrica e passanti pel suo S'_{h-1} doppio (sicchè

$m \geqq h$, ma $\leqq (n+h-2)/2$). Uno di questi spazi S'_m avrà con una altra quadrica data del fascio (e quindi colla quartica) un contatto d'ordine k, cioè la taglierà in un S^2_{m-1} k volte specializzato, se saranno soddisfatte certe condizioni determinate, tra cui quelle indipendenti sono $k(k+1)/2$ (V. n⁰ 17). Dunque, ricordando il numero degli S'_m contenuti in φ, conchiudiamo (n⁰ 37):

Tra gli $\infty^{(m-h+1)(2n-3m+h-4)/2}$ S^2_{m-1} *della quartica corrispondenti ad una generazione* h *volte specializzata ve ne sono* $\infty^{(m-h+1)(2n-3m+h-4)/2-k(k+1)/2}$ *che sono* k *volte specializzati.*

In particolare, per k uguale ad $m-1$ o ad m, sappiamo che un S^2_{m-1} $m-1$ volte specializzato si scinde in due S'_{m-1} (V. n⁰ 21), e che un S^2_{m-1} m volte specializzato si riduce ad un S'_{m-1} contato due volte. In questo modo si potrebbe ottenere il numero degli S'_m contenuti in una data quartica. Ma esso si può anche avere direttamente ricordando che uno spazio lineare di punti S'_m dipende da $(m+1)(n-m-1)$ quantità indipendenti, e che d'altra parte le condizioni affinchè esso stia su una data quadrica, che ad esempio supporremo generale, sono $(m+1)(m+2)/2$, e perchè stia su due date quadriche $(m+1)(m+2)$, laonde il numero degli S'_m contenuti in queste, e quindi nella loro quartica d'intersezione sarà $\infty^{(m+1)(n-m-1)-(m+1)(m+2)}$, ossia $\infty^{(m+1)(n-2m-3)}$. Dunque:

Una quartica qualunque contiene nel caso generale $\infty^{(m+1)(n-2m-3)}$ S'_m.

61. Questi spazi lineari contenuti in una quartica si possono anche costrurre effettivamente in modo analogo a quello tenuto (V. n⁰ 30) per gli spazi lineari contenuti in una quadrica. Sia dato un punto x della quartica: se ne costruisca l'S'_{n-3} tangente a questa e sul S^4_{n-5} in cui esso taglierà la quartica stessa (il quale S^4_{n-5} sarà un *cono* di *vertice* x e di 4⁰ ordine) si prenda ad arbitrio un punto x': l'S'_1 che lo congiunge ad x starà sulla quartica data. Indi si consideri l'S'_{n-3} tangente in x' alla quartica: esso taglierà l'S^4_{n-5} suddetto in un S^4_{n-7} (*cono* di 4⁰ ordine avente per *asse* l'S'_1 xx') di cui un punto qualunque x'' si congiungerà ad xx' con un S'_2 contenuto tutto in esso, e quindi sulla quartica data. Similmente l'S'_{n-3} tangente a questa in x'' taglierà quel S^4_{n-7} in un S^4_{n-9}, di cui ogni punto si congiungerà ad $x\,x'\,x''$ mediante un S'_3 contenuto nella quartica data. E così via dicendo. Come si vede, questa costruzione dà un S'_m mediante un S^4_{n-3-2m} in cui esso è contenuto, e quindi serve finchè $m \leqq n-3-2m$, cioè $m \leqq (n-3)/3$. Fra i punti x

della quartica ve ne possono tuttavia essere di quelli eccezionali i quali stiano in spazi lineari S'_m della quartica pei quali m superi anche quel limite.

§ 3.

Classificazione dei fasci di quadriche e delle quartiche mediante i divisori elementari. Teorema di Weierstrass e sua interpretazione geometrica.

62. Abbiamo già notato nei §§ precedenti come tra le quadriche del fascio determinato da due date

$$\varphi \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0, \quad f \equiv \Sigma\, c_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,,$$

ve ne siano di quelle specializzate un certo numero di volte, cioè aventi dei punti doppi. Se la quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ del fascio è specializzata, dovrà esser nullo il suo discriminante:

$$(1) \qquad | \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} | = 0\,.$$

Ora questa è un'equazione di grado n, la quale determinerà nel caso più generale n valori per $\lambda : \mu$, ai quali corrisponderanno n quadriche semplicemente specializzate del fascio. Ciascuna di queste avrà un punto doppio x, il quale sarà determinato da $n-1$ delle n equazioni lineari:

$$(2) \qquad \lambda\varphi_i(x) + \mu f_i(x) = 0,$$

in cui per $\lambda : \mu$ si ponga il corrispondente tra i suddetti n valori.

63. Però può presentarsi il caso particolare che una di quelle quadriche semplicemente specializzate corrisponda ad una radice multipla dell'equazione (1), e più in generale può accadere che ad una radice multipla $\lambda' : \mu'$ di quest'equazione corrisponda una quadrica del fascio specializzata più d'una volta, p. e. h volte. In tal caso quel valore di $\lambda : \mu$ annullerà non solo il discriminante $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} |$, ma anche i suoi subdeterminanti d'ordine $n-h+1$. E siccome i subdeterminanti di un ordine qualunque hanno evidentemente le loro prime derivate rispetto a $\lambda : \mu$ espresse linearmente mediante i subdeterminanti d'ordine immediatamente inferiore, così quella radice $\lambda' : \mu'$ comune ai subdeterminanti d'ordine $n-h+1$ apparterrà pure secondo gradi di multiplicità crescenti ai subdeterminanti d'ordine superiore. Indicando dunque con $l, l', l'', \dots, l^{(h-1)}$ gl'indici di multiplicità secondo cui entra il divisore lineare $\lambda/\mu - \lambda'/\mu'$ rispettivamente nel determinante $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} |$, in tutti i suoi sub-

determinanti d'ordine $n-1$, in tutti quelli d'ordine $n-2, \ldots$, in tutti quelli d'ordine $n-h+1$; e supponendo che quel divisore lineare non entri più in tutti i subdeterminanti d'ordine $n-h$, cosicchè la quadrica $\lambda'\varphi+\mu' f$ del fascio sia specializzata appunto h volte, e non $h+1$, sarà:

$$l > l' > l'' > \ldots > l^{(h-1)} > 0,$$

cosicchè le differenze

$$e = l - l', \quad e' = l' - l'', \ldots, e^{(h-1)} = l^{(h-1)}$$

saranno positive; si può anzi dimostrare che esse sono in questa serie ordinate secondo la loro grandezza, cosicchè $e^{(k)} \geqq e^{(k+1)}$.

La potenza l-esima del divisore lineare $\lambda/\mu - \lambda'/\mu'$, la quale è contenuta nel discriminante $|\lambda a_{ik} + \mu c_{ik}|$ si può quindi rappresentare con

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e'} \cdots \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda'}{\mu'}\right)^{e^{(h-1)}},$$

e perciò queste singole potenze $(\lambda/\mu - \lambda'/\mu')^{e^{(k)}}$ furono chiamate dal WEIERSTRASS *divisori elementari* (Elementartheiler) del discriminante stesso ([27]). Ve ne sono diversi gruppi corrispondentemente alle diverse radici distinte di questo.

Ad ogni quadrica specializzata del fascio $\lambda\varphi + \mu f$ corrisponde adunque un gruppo di divisori elementari ed il numero h di questi coincide col numero delle volte che la quadrica stessa è specializzata. Il gruppo dei numeri interi positivi decrescenti, $e\, e'\, e'' \ldots e^{(h-1)}$, rappresentanti i gradi dei divisori elementari di quel gruppo lo chiameremo per brevità gruppo degl'*indici caratteristici*, o semplicemente *gruppo caratteristico*, corrispondente a quella radice del discriminante, ossia a quella quadrica specializzata del fascio. La somma degl'indici caratteristici di un gruppo darà l'ordine di multiplicità della corrispondente radice pel discriminante, e la somma degl'indici stessi a partire dal k-esimo darà l'ordine di multiplicità a cui questa radice entra nei subdeterminanti d'ordine $n-k+1$ di questo.

L'insieme poi degli r gruppi caratteristici corrispondenti alle r radici distinte $(r \leqq n)$ $\lambda_1 : \mu_1, \lambda_2 : \mu_2, \ldots, \lambda_r : \mu_r$ del discriminante, cioè alle r quadriche specializzate, si dirà la *caratteristica* del fascio di

---

([27]) V. WEIERSTRASS, « *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* » (Monatsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 18 Mai 1868).

quadriche, oppure della loro quartica d'intersezione, e la indicheremo colla seguente notazione introdotta dal WEILER:

$$[(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}), \ldots, (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})].$$

La somma di tutti gl'indici compresi nella caratteristica dovrà uguagliare n.

64. Ciò premesso, si ha il seguente importantissimo teorema di WEIERSTRASS:

« La condizione necessaria e sufficiente affinchè le due forme quadratiche φ, f di n variabili si possano rispettivamente trasformare in altre due forme quadratiche φ', f' pure di n variabili mediante una sostituzione lineare il cui determinante non sia nullo è che i determinanti delle due forme quadratiche $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda\varphi' + \mu f'$ (dove λ e μ sono indeterminate) abbiano gli stessi divisori elementari (28) ».

Questo teorema, dato dal WEIERSTRASS sotto questa forma analitica, esaurisce completamente, dal punto di vista dell'algebra moderna, ogni questione che si possa fare sui vari casi che può presentare il sistema di due forme quadratiche e sugli invarianti di questo sistema corrispondenti ai casi stessi, dando una classificazione, completa da quel punto di vista, di questi sistemi di forme. Vediamo di tradurlo geometricamente.

Per questo notiamo anzitutto che, ritenendo le n variabili omogenee che entrano in φ ed f, e quelle che entrano in φ' ed f' come coordinate omogenee di punti in due spazi lineari ad $n-1$ dimensioni (i quali spazi possono anche coincidere), le forme quadratiche φ, f e φ', f' rappresentano due coppie di quadriche poste rispettivamente in quei due spazi. La sostituzione lineare (di modulo non nullo) di cui si parla nel teorema si traduce in una trasformazione proiettiva (non specializzata) dei due spazi l'uno nell'altro, e questo teorema ci dà la condizione perchè vi sia una tale proiettività tra i due spazi che in essa si corrispondano le quadriche φ e φ', f ed f'. Quella condizione si può decomporre in due parti distinte: essa

(28) Il WEIERSTRASS dando questo teorema nella Memoria citata, esclude il caso in cui tutte le forme quadratiche $\lambda\varphi + \mu f$, qualunque sia $\lambda : \mu$, abbiano discriminante nullo. Quindi nelle applicazioni che noi faremo di quel teorema al fascio di quadriche sarà escluso il caso in cui questo sia tutto composto di quadriche specializzate. Ci riserviamo di ritornare altrove su questo caso [V. Atti Acc. Torino, XIX, 1884, pp. 878-896; questo volume, n° LII; N. d. R.].

ci dice anzitutto che i due fasci φf e $\varphi' f'$ di quadriche debbono avere la stessa caratteristica, e poi che i gruppi caratteristici che entrano in questi devono corrispondere agli stessi valori per la radice $\lambda : \mu$ sia nell'uno sia nell'altro fascio. (È chiaro però che, potendosi moltiplicare ad arbitrio una qualunque delle forme quadratiche considerate per un fattore costante arbitrario senza che esse cessino di rappresentare le stesse quadriche, non occorre precisamente che i valori delle radici $\lambda_i : \mu_i$ corrispondenti ai due discriminanti di $\lambda\varphi + \mu f$ e di $\lambda\varphi' + \mu f'$ siano uguali, ma solo che siano proporzionali). Le quadriche dei due fasci $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda\varphi' + \mu f'$ corrispondenti allo stesso valore di $\lambda : \mu$ si corrispondono proiettivamente, come formanti due forme di 1ª specie, e in questa corrispondenza φ corrisponde a φ', ed f a f'. La condizione che le due quadriche specializzate dei due fasci corrispondenti ad uno stesso gruppo caratteristico corrispondano allo stesso valore di $\lambda : \mu$ (radice del discriminante) significa dunque che queste quadriche specializzate si corrispondano in quella corrispondenza proiettiva tra i due fasci. Due fasci di quadriche (o le due quartiche corrispondenti) aventi la stessa caratteristica si diranno *della stessa specie*. Ciò posto, il teorema di WEIERSTRASS si traduce nel seguente teorema fondamentale per la geometria delle quartiche e fasci di quadriche:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè si possano trasformare proiettivamente l'uno nell'altro due spazi lineari ad $n-1$ *dimensioni in guisa che due date quadriche* φ, f *dell'uno si trasformino rispettivamente in due date quadriche* φ', f' *dell'altro è che le loro quartiche d'intersezione siano della stessa specie ed inoltre che i due fasci* φf *e* $\varphi' f'$ *da esse determinati, considerati quali forme di prima specie, si possano far corrispondere proiettivamente sì che si corrispondano:* φ *e* φ', f *e* f', *ed inoltre quelle quadriche specializzate dei due fasci, le quali corrispondono allo stesso gruppo caratteristico nella caratteristica comune ai due fasci.*

E siccome le particolarità proiettive a cui può dar luogo una figura qualunque di uno spazio lineare (considerata in questo) sono appunto quelle, e solo quelle, che si conservano passando alla figura corrispondente di uno spazio lineare proiettivo a quello, così possiamo conchiudere che il sistema di due quadriche dà luogo, dal punto di vista proiettivo, a queste sole particolarità: 1º la *specie* della quartica in cui quelle si tagliano, specie che è determinata dalla caratteristica, 2º gl'*invarianti assoluti* del sistema, i quali sono i rapporti anarmonici che colle due quadriche date formano le diverse quadriche specializzate del loro fascio.

Dicendo r il numero di queste quadriche specializzate (cioè il numero dei gruppi d'indici che entrano nella caratteristica corrispondente alla specie considerata), questi rapporti anarmonici saranno evidentemente determinati da $r - 1$ di essi e quindi $r - 1$ saranno gl'invarianti assoluti indipendenti del sistema delle due quadriche.

65. Quando poi si vogliano solo le condizioni perchè la quartica d'intersezione di φ e f si possa trasformare in quella di φ' e f', cioè il fascio φf nel fascio $\varphi' f'$, ma senza che occorra che φ si trasformi precisamente in φ' ed f in f', allora dovranno coincidere nei divisori elementari i determinanti delle forme $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda(g\varphi' + hf') + \mu(g_1\varphi' + h_1 f')$, essendo g, h, g_1, h_1 costanti qualunque. Quindi le due quartiche dovranno avere la stessa caratteristica, ed inoltre, corrispondentemente ai gruppi caratteristici che entrano in questa, esser contenute in quadriche specializzate corrispondenti a radici dei discriminanti di $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda'\varphi' + \mu' f'$, le quali si corrispondano mediante le formule:

$$\varrho\lambda' = g\lambda + g_1\mu, \qquad \varrho\mu' = h\lambda + h_1\mu,$$

che formano una trasformazione lineare binaria. Questo prova che gl'invarianti assoluti della quartica d'intersezione di due quadriche φ, f sono precisamente gl'invarianti assoluti della forma binaria in λ, μ che costituisce il determinante della forma $\lambda\varphi + \mu f$, sicchè: gl'invarianti assoluti di una quartica di data specie sono gl'invarianti assoluti o rapporti anarmonici del gruppo delle quadriche specializzate passanti per essa, sicchè se queste quadriche specializzate sono r, saranno $r - 3$ gl'invarianti assoluti indipendenti della quartica.

66. Finalmente, può presentarsi il caso intermedio (come ci accadrà appunto in seguito) in cui si vogliano le condizioni perchè si possa trasformare proiettivamente una data quadrica φ ed una quartica φf giacente su essa in una quadrica φ' con una sua quartica $\varphi' f'$, senza che si richieda che f si trasformi precisamente in f'. Allora siccome nella sostituzione lineare binaria considerata al n° precedente si richiederà che sia $h = 0$, così è chiaro che gl'invarianti assoluti di una quartica di data specie su una quadrica data saranno i rapporti anarmonici (tra cui $r - 2$ indipendenti) delle r quadriche specializzate passanti per la quartica colla quadrica data.

67. Quanto ai rapporti anarmonici delle quadriche di un fascio, essi si possono sempre avere, non solo analiticamente dai valori di $\lambda : \mu$ che corrispondono a quelle quadriche, ma anche geometrica-

mente mediante il teorema già dimostrato: « Il fascio dei piani polari di un punto qualunque dello spazio rispetto alle quadriche di un fascio corrisponde proiettivamente a queste » (V. n⁰ 51). Quindi la proprietà importante, notata allora, degli S'_{n-3} polari dei punti dello spazio rispetto alla quartica, di proiettare gli r gruppi di punti doppi delle r quadriche specializzate del fascio mediante r piani, i cui mutui rapporti anarmonici sono costanti, riceve ora la sua spiegazione completa nel fatto che questi rapporti anarmonici non sono altro che gl'invarianti assoluti della quartica che si considera.

68. La classificazione delle quartiche (sia che si considerino da sè, sia che si considerino insieme con una o due delle quadriche passanti per esse) è così ridotta dalla nostra interpretazione del teorema di WEIERSTRASS al riconoscere in che cosa si distinguano tra loro le varie *specie* di quartiche, quali noi le abbiamo definite, cioè quale sia il significato geometrico della caratteristica di una specie data di quartiche. Di questo appunto ci occuperemo ora.

Consideriamo un punto doppio di una quadrica specializzata qualunque del fascio: il suo piano polare rispetto ad un'altra qualunque quadrica di questo si potrà pure considerare come polare rispetto a quella (poichè il piano polare rispetto ad una quadrica specializzata di un suo punto doppio è affatto indeterminato) e quindi sarà piano polare del punto stesso rispetto a tutte le quadriche del fascio. Ciò è pure provato dal fatto che, se diciamo x un punto doppio qualunque della quadrica specializzata $\lambda_s\varphi + \mu_s f$, si ha:

$$\lambda_s \varphi_i(x) + \mu_s f_i(x) = 0\,, \qquad (i = 1, \dots, n)$$

le quali n equazioni esprimono pure che il piano polare di x rispetto alla quadrica $\lambda\varphi + \mu f$ qualunque del fascio non dipende da $\lambda : \mu$, poichè le sue coordinate $\lambda\varphi_i(x) + \mu f_i(x)$ sono tutte, in virtù di quelle equazioni, divisibili per $\lambda\mu_s - \mu\lambda_s$, ed i loro quozienti; indipendenti da λ, μ, si possono assumere come coordinate del piano stesso. Viceversa se si cercano quei punti x dello spazio, ciascuno dei quali ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, è chiaro che per questo basterà che siano proporzionali le coordinate $\varphi_i(x)$, $f_i(x)$ dei piani polari rispetto a due quadriche distinte φ, f del fascio, cioè che vi sia un tal valore per $\lambda : \mu$ che:

$$\lambda\varphi_i(x) + \mu f_i(x) = 0\,.$$

Ora queste n equazioni lineari omogenee nelle x permettono di eliminare queste immediatamente, e così si ottiene l'equazione:

$$|\,\lambda\, a_{ik} + \mu\, c_{ik}\,| = 0\,.$$

Ogni radice distinta di questa, sostituita in quelle equazioni lineari, darà un punto x od infiniti formanti un sistema lineare; e, come si vede, questi punti saranno precisamente i punti doppi di quella quadrica specializzata del fascio, la quale corrisponde a quella radice. Quindi il problema di cercare le quadriche specializzate di un fascio, e quello di cercare quei punti dello spazio che hanno lo stesso piano polare rispetto a due date quadriche od a tutte le quadriche del loro fascio si equivalgono, cioè:

Ogni punto doppio di una quadrica specializzata del fascio ha uno stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche di questo, e viceversa ogni punto avente lo stesso piano polare rispetto a queste è punto doppio di una di esse.

69. Considerando un'altra quadrica specializzata del fascio, siccome il piano polare di un punto qualunque dello spazio rispetto ad essa passa pel sistema dei suoi punti doppi, così passerà per questo sistema il piano polare di un punto doppio della prima quadrica specializzata rispetto a tutto il fascio. In altri termini, due punti doppi appartenenti a quadriche specializzate distinte del fascio sono coniugati rispetto a tutto il fascio. Ciò si vede pure immediatamente dalle equazioni, che caratterizzano due tali punti x, x':

$$\lambda_s \varphi_i(x) + \mu_s f_i(x) = 0\,; \quad \lambda_t \varphi_i(x') + \mu_t f_i(x') = 0\,;$$

dalle quali si trae:

$$\lambda_s \varphi(x, x') + \mu_s f(x, x') = 0\,; \quad \lambda_t \varphi(x, x') + \mu_t f(x, x') = 0\,;$$

donde finalmente, supponendo $\lambda_s : \mu_s$ e $\lambda_t : \mu_t$ distinti tra loro:

$$\lambda \varphi(x, x') + \mu f(x, x') = 0,$$

qualunque sia $\lambda : \mu$; e quest'equazione prova appunto che x, x' sono punti coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio.

Di qui segue un raggruppamento notevole dei punti doppi delle quadriche specializzate del fascio. Diciamo $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ queste quadriche, $h_1, h_2, \ldots, h_r$ il numero delle volte che sono rispettivamente specializzate, sicchè i loro spazi lineari doppi siano $S'_{h_1-1}, S'_{h_2-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$. Allora i punti di uno di questi, p. e. del S'_{h_1-1}, hanno ciascuno uno stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, e tutti questi piani polari dei punti del S'_{h_1-1} formano un Σ'_{h_1-1} di piani, la cui intersezione S'_{n-h_1-1} costituisce lo spazio polare del S'_{h_1-1} rispetto a tutte le quadriche del fascio. Orbene questo S'_{n-h_1-1} conterrà tutti gli spazi doppi delle altre quadriche specializzate del fascio, cioè i suddetti $S'_{h_2-1}, \dots, S'_{h_r-1}$. Similmente lo spazio polare comune S'_{n-h_2-1} del S'_{h_2-1} rispetto a tutte le quadriche del fascio contiene gli $S'_{h_1-1}, S'_{h_3-1}, \dots, S'_{h_r-1}$, e via dicendo.

70. In particolare, se supponiamo di essere nel caso più generale in cui le n radici $\lambda : \mu$ dell'equazione $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} | = 0$ sono tutte distinte e quindi per la quartica data passano n quadriche semplicemente specializzate, i punti doppi di queste saranno i soli punti aventi lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio, e questo piano polare per ciascuno di quegli n punti sarà il piano che congiunge gli altri $n - 1$, cosicchè essi costituiranno una n-upla polare (V. n⁰ 24) comune a tutte quelle quadriche. In questo caso, più generale, la caratteristica è

$$[1 \quad 1 \quad 1 \dots 1 \quad 1],$$

e se si riferiscono tutte le quadriche del fascio a quella n-upla polare comune come sistema di riferimento, le loro equazioni saranno della forma (V. n⁰ 26): $\Sigma\, a_i\, x_i^2 = 0$, ed in particolare le equazioni delle due quadriche φ, f saranno rispettivamente:

$$\Sigma\, \mu_i\, x_i^2 = 0\,, \qquad \Sigma\, \lambda_i\, x_i^2 = 0.$$

Si vede dunque come il problema della riduzione simultanea di due quadriche ad equazioni di questo tipo coincida con quello che stiamo studiando.

71. Più generalmente supponiamo soltanto che tutti gl'indici caratteristici siano uguali ad 1 (e quindi in numero di n), ma raggruppati comunque, cioè si abbia la caratteristica:

$$[(11 \dots 1)\ (1 \dots 1) \dots (1 \dots 1)\ (1 \dots 1)],$$

dove siano $h_1, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r$ i numeri d'indici compresi rispettivamente negli r gruppi caratteristici. Allora se consideriamo il gruppo $(\overbrace{11 \dots 1}^{h_i})$ composto di h_i indici, esso corrisponderà ad una quadrica h_i volte specializzata del fascio, anzi al caso più generale di una tal quadrica, poichè ad una quadrica h_i volte specializzata vedemmo dover corrispondere una radice h_i-upla (almeno) di $| \lambda a_{ik} + \mu c_{ik} |$, la quale entri pure nei subdeterminanti d'ordine $n - h_i + 1$, e quindi se, come accade nel caso più generale, quella radice entra solo al grado h_i in quel discriminante, darà necessariamente il gruppo caratteristico $(\overbrace{11 \dots 1}^{h_i})$; e solo ove vi entrasse un maggior numero di volte darebbe un altro gruppo caratteristico. Dunque, il caso più generale in cui vi siano quadriche specializzate $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ aventi rispettivamente un $S'_{h_1-1}, S'_{h_2-1}, \ldots, S'_{h_r-1}$ doppio è appunto (nel senso detto) quello corrispondente a questa caratteristica. In questo caso lo spazio polare di uno qualunque di quelli rispetto a tutto il fascio di quadriche è perfettamente determinato dal dover passare per gli altri.

72. Già dimostrammo (V. n⁰ 57) che ogni S'_{h_i-1} doppio di una quadrica del fascio ha comuni con un'altra quadrica qualunque di questo dei punti che sono doppi per la quartica che si considera, e che anzi tutti i punti doppi della quartica si hanno in questo modo. Ora in generale quei punti comuni costituiscono un $S^2_{h_i-2}$ e questo spazio quadratico giacerà adunque sulla quartica, e vi figurerà come doppio. La quartica avrà dunque r sistemi di punti doppi (di cui però possono scomparire quelli che corrispondono a quadriche semplicemente specializzate del fascio, per le quali $h_i = 1$), cioè $S^2_{h_1-2}, S^2_{h_2-2}, \ldots, S^2_{h_r-2}$ (esclusi i casi, sui quali ritorneremo, in cui tutto l'S'_{h_i-1} considerato è composto di punti doppi della quartica) tali che due punti doppi appartenenti a due sistemi diversi saranno coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio, cioè saranno congiunti da un S'_1 tutto contenuto nella quartica. Ma col variare della caratteristica variano il numero e la disposizione di questi sistemi di punti doppi della quartica, e questo costituisce appunto la diversità nella *specie* della quartica.

Così nel caso dianzi considerato in cui la caratteristica contiene solo gl'indici caratteristici 1, quei sistemi di punti doppi della quartica $S^2_{h_1-2}, S^2_{h_2-2}, \ldots, S^2_{h_r-2}$ non soddisfano ad altre condizioni che quelle dette, e queste caratterizzano perfettamente in tal caso la specie della quartica per ogni sistema di valori dati pei numeri h_1, $h_2, \ldots, h_r$ (la cui somma in questo caso deve uguagliare n).

73. Più difficile è riconoscere quali singolarità della quartica corrispondano in altri casi ad una data caratteristica. Daremo però alcune regole generali che possono poi servire in ogni caso speciale a risolvere completamente la questione. Ed anzitutto notiamo che quando si è già riconosciuto il significato di due gruppi caratteristici $(e_1, e'_1, e''_1, \ldots, e_1^{(h_1-1)})$, e $(e_2, e'_2, e''_2, \ldots, e_2^{(h_2-1)})$, si avrà pure il significato del gruppo proveniente dal sommare gl'indici corrispondenti di quei due, cioè:

$$(e_1 + e_2, \quad e'_1 + e'_2, \quad e''_1 + e''_2, \ldots),$$

poichè questo corrisponderà ad una quadrica specializzata del fascio, la quale provenga dal coincidere le due quadriche specializzate corrispondenti ai due gruppi primitivi, come si vede immediatamente supponendo che i due valori di $\lambda : \mu$ corrispondenti a questi divengano infinitamente vicini, e considerando i gradi di multiplicità in cui così tenderanno a comparire come radici del discriminante e dei suoi subdeterminanti. Se supponiamo $h_1 \geqq h_2$, la nuova quadrica che si otterrà sarà ancora h_1 volte specializzata: il suo S'_{h_1-1} doppio proverrà dall'esser venuto l'S'_{h_2-1} doppio dell'una quadrica a stare sul S'_{h_1-1} doppio dell'altra. Ma notiamo che gli ultimi due spazi S'_{h_2-1} e S'_{h_1-1} sono, come vedemmo, coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio. Quindi, venendo l'uno di essi a stare sull'altro, questo diverrà (se ancora non era tale) tangente di determinata specie a tutte le quadriche (V. n⁰ 34). Otteniamo così questo importante risultato:

Se in un gruppo caratteristico $(\mathrm{e}, \mathrm{e}', \mathrm{e}'', \ldots, \mathrm{e}^{(\mathrm{h}-1)})$ *composto di* h *indici, gli ultimi* k *soltanto sono uguali ad* 1, *l'*$\mathrm{S}'_{\mathrm{h}-1}$ *doppio della quadrica specializzata corrispondente del fascio sarà tangente di specie* $\mathrm{h}-\mathrm{k}$ *a tutte le quadriche del fascio, cioè le taglierà in un* $\mathrm{S}^2_{\mathrm{h}-2}$ *(composto di punti doppi della quartica) specializzato* $\mathrm{h}-\mathrm{k}$ *volte.*

Il caso più semplice in cui ciò accada è quando:

$$e = e' = e'' = \ldots = e^{(h-k-1)} = 2\,; \qquad e^{(h-k)} = e^{(h-k+1)} = \ldots = e^{(h-1)} = 1.$$

Ma lo stesso accadrà ancora quando tra i primi $h-k$ indici caratteristici alcuni, od anche tutti, superino il valore 2.

74. In particolare, ricordando come accada il degenerare di una quadrica S^2_{h-2} col suo specializzarsi, avremo come casi particolari dal n⁰ precedente che: Se il numero k degl'indici caratteristici uguali ad 1 di un gruppo caratteristico si riduce a due soli, allora il sistema S^2_{h-2} corrispondente di punti doppi della quartica si scinde in due S'_{h-2}; se vi è un sol indice uguale ad 1, allora l'S'_{h-1} doppio della corrispondente quadrica specializzata del fascio tocca tutte le quadriche di questo lungo un S'_{h-2}, al quale, contato due volte, si riduce il sistema corrispondente di punti doppi della quartica. Finalmente quando nel gruppo caratteristico considerato non vi è alcun indice uguale ad 1, tutto quel S'_{h-1} sarà contenuto nelle quadriche del fascio, e si comporrà completamente di punti doppi della quartica. In questo caso adunque non è solo uno spazio ad $h-2$ dimensioni del S'_{h-1} che si componga di punti doppi della quartica; bensì tutto l'S'_{h-1}.

Ponendo ancora in quest'ultimo caso, oltre a $k = 0$, $h = 1$, noi vediamo che un gruppo caratteristico composto di un indice solo e rappresenta una quadrica semplicemente specializzata del fascio, il cui punto doppio unico quando quell'indice e supera 1 (e solo allora) sta sulle quadriche del fascio (le quali hanno comune in esso il piano tangente) ed è punto doppio della quartica. Questo del resto si dimostra pure facilmente in modo diretto.

75. Abbiamo già visto (V. n⁰ 47) come lo spazio lineare S'_{m-1} rappresentato dalle equazioni

$$x_i = \sum_r \lambda^{(r)} x_i^{(r)} \qquad (r = 1, \dots, m)\ (i = 1, \dots, n),$$

tagli il fascio di quadriche

$$\lambda\varphi + \mu f = 0$$

nel fascio di S^2_{m-2} avente per discriminante

$$|\ \lambda\varphi(x^{(r)} x^{(s)}) + \mu f(x^{(r)} x^{(s)})\ |\ .$$

Imaginando scritto un subdeterminante qualunque di dato ordine di questo determinante, si vede che esso può esprimersi come somma di prodotti di tre determinanti, di cui due formati colle $x_i^{(r)}$ e l'altro è un subdeterminante di quello stesso ordine del discriminante del dato fascio

$$|\ \lambda a_{ik} + \mu c_{ik}\ |\ .$$

Di qui segue, che ogni divisore lineare in λ, μ comune ai subdeterminanti di un dato ordine $\leqq m$ di quest'ultimo discriminante entra pure in generale allo stesso grado nei subdeterminanti dello stesso ordine del discriminante dell'intersezione di un S'_{m-1} qualunque dello spazio col fascio di quadriche. Quindi, ricordando la definizione degl'indici caratteristici, segue che, se uno qualunque dei gruppi caratteristici relativi al fascio dato è

$$(e, e', e'', \dots, e^{(h-1)}),$$

dove $h > n - m$, l'intersezione di quel fascio con un S'_{m-1} qualunque dello spazio avrà, corrispondentemente al S^2_{m-2} d'intersezione della quadrica specializzata relativa a quel gruppo, il gruppo caratteristico

$$(e^{(n-m)}, e^{(n-m+1)}, \dots, e^{(h-1)}).$$

Così in particolare l'intersezione con un piano ($m = n - 1$) otterrà, in generale, il gruppo caratteristico $(e', e'', \dots, e^{(h-1)})$; l'intersezione con un S'_{n-3} il gruppo caratteristico $(e'', e''', \dots, e^{(h-1)})$; e così via.

Questa proposizione è importante, e completa un'altra che avevamo trovato al n° 49. Essa ci permette di ridurre la ricerca che stiamo facendo del significato geometrico dei gruppi caratteristici al caso in cui il numero degl'indici contenuti in un gruppo vada diminuendo fino a ridursi ad un solo. Inoltre da essa scaturisce come tra le m quadriche, le quali toccano in generale un S'_{m-1} qualunque dello spazio (n° 48), ne coincidono

$$e^{(n-m)}+e^{(n-m+1)}+\ldots+e^{(h-1)}$$

colla quadrica specializzata h volte del fascio già considerata, cosicchè, se si prescinde da queste quadriche fisse, le quadriche mobili del fascio, le quali toccano un S'_{m-1} qualunque, sono in numero di

$$m-\Sigma\, e_s^{(n-m)}-\Sigma\, e_s^{(n-m+1)}-\ldots,$$

od anche, ricordando che la somma di tutti gl'indici caratteristici è n:

$$\Sigma\, e_s+\Sigma\, e'_s+\Sigma\, e''_s+\ldots+\Sigma\, e_s^{(n-m-1)}+m-n.$$

In particolare il numero delle quadriche mobili del fascio, le quali toccano un piano dato qualunque è (poichè diventa $m=n-1$): $\Sigma\, e_s-1$.

76. Finalmente una nuova osservazione ci darà il modo di vedere in ogni caso quale sia il significato geometrico di un gruppo caratteristico, se si terrà pur conto delle osservazioni precedenti. Il punto doppio di una quadrica semplicemente specializzata del fascio, alla quale corrisponda un indice caratteristico (isolato) $\geqq 2$, sta, come vedemmo, su tutte le quadriche del fascio e costituisce un punto doppio della quartica d'intersezione. Ma ci resta a vedere quali particolarità introduca in questo punto doppio il crescere di quell'indice caratteristico; cioè qual differenza vi sia tra i punti doppi della quartica provenienti dai gruppi caratteristici 2, 3, 4, ecc. Consideriamo anzi più in generale, per questo scopo, un punto doppio qualunque x della quartica, il quale appartenga come punto doppio a quella quadrica, specializzata un numero qualsiasi di volte, del fascio $s\varphi+f$, che corrisponde al valore $s=c$ del parametro indeterminato s. Noi vedemmo che in tal caso il punto x ha uno stesso piano tangente ξ per tutte le quadriche del fascio, e che si possono prendere per coordinate di questo piano le quantità costanti

$$\xi_i=(s\varphi_i+f_i)/(s-c),$$

dove s rimane indeterminata (V. n° 68). Ciò posto noi vedremo che le particolarità del punto doppio x dipendono dalle intersezioni di quel piano col fascio di quadriche. Queste intersezioni sono S^2_{n-3} aventi in x comune un punto doppio: esse formano un fascio, la cui base è un S^4_{n-4} giacente nella quartica considerata e composto di infiniti S_1' uscenti dal punto doppio x (cioè un cono quartico di 1ª specie di vertice x). Potremo riconoscere come si particolarizzi quel fascio di S^2_{n-3}, o questo S^4_{n-4}, considerandone l'intersezione con un piano qualunque ζ dello spazio, poichè basterà poi proiettare quest'intersezione dal punto x per ottenere di nuovo quel fascio e quel S^4_{n-4}. Ora l'intersezione di ξ e ζ colla quadrica $s\varphi+f$ si specializza (V. nº 36) per:

$$\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & \xi_1 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & \xi_n \\ \zeta_1 & . & \zeta_n & 0 & 0 \\ \xi_1 & . & \xi_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ossia, ponendo per le ξ_i i loro valori, indipendenti da s come vedemmo:

$$\frac{1}{(s-c)^2}\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & s\varphi_1+f_1 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & s\varphi_n+f_n \\ \zeta_1 & . & \zeta_n & 0 & 0 \\ s\varphi_1+f_1 & . & s\varphi_n+f_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Moltiplicando in questo determinante le prime n verticali rispettivamente per $x_1, \dots, x_n$ e sottraendole dall'ultima, e similmente per le orizzontali, e ricordando che $\varphi=0, f=0$, quell'equazione diverrà:

$$\frac{1}{(s-c)^2}\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} & \zeta_1 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} & \zeta_n & 0 \\ \zeta_1 & . & \zeta_n & 0 & -\zeta_x \\ 0 & . & 0 & -\zeta_x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero, finalmente, ponendo

$$\begin{vmatrix} sa_{11}+c_{11} & . & sa_{1n}+c_{1n} \\ . & . & . \\ sa_{n1}+c_{n1} & . & sa_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \Delta(s);$$

diverrà:

$$-\zeta_x^2\,\Delta(s)/(s-c)^2 = 0.$$

Dunque, notando, che noi dobbiamo sempre supporre che il piano arbitrario ζ non passi per x e quindi non sia $\zeta_x = 0$, e ricordando che l'equazione $\Delta(s) = 0$ ha per radici i valori di s corrispondenti alle quadriche specializzate del fascio dato, noi vediamo che nell'intersezione del dato fascio con $\xi\zeta$ si ha un fascio di S_{n-4}^2 in cui sono specializzate appunto quelle che sono intersezioni con quadriche specializzate del fascio dato, e contano tra le specializzate uno stesso numero di volte che queste; esclusa solo quella quadrica specializzata del dato fascio, la quale corrisponde ad $s = c$, poichè l'equazione trovata

$$\Delta(s)/(s-c)^2 = 0$$

mostra che se questa conta e volte (essendo $e \gtreqless 2$), cioè ha per indice caratteristico corrispondente e (se ora supponiamo che la quadrica specializzata considerata del dato fascio sia semplicemente specializzata), la sua intersezione con $\xi\zeta$ avrà per indice caratteristico $e-2$. Quindi, se si conosce il significato geometrico di una radice multipla d'ordine $e-2$ del discriminante, si conoscerà pure quello di una radice multipla di ordine e. Ora noi conosciamo il significato di una radice semplice o doppia: dunque conosceremo pure quello di una radice avente un ordine qualunque di multiplicità.

77. Possiamo dare un'altra forma a questo risultato. A tal fine notiamo che, mentre in un punto qualunque della quartica vedemmo (n° 50) esservi un S'_{n-3} *tangente*, cioè luogo degli S_1', che congiungono quel punto ad uno infinitamente vicino della quartica stessa, invece per un punto doppio x vi è un cono quadrico S_{n-3}^2 *tangente*, cioè luogo di questi S_1' (29). In fatti ogni tale S_1' dovrà stare evidentemente nel piano tangente comune in x a tutte le quadriche del fascio dato, e d'altra parte, siccome congiunge il punto doppio x di una certa quadrica specializzata ψ del fascio ad un altro punto di ψ, dovrà esser contenuto in questa quadrica: esso avrà dunque per luogo l'S_{n-3}^2 (specializzato una o più volte con x per punto doppio) in cui quel piano tangente comune in x è tagliato da ψ, sicchè questo S_{n-3}^2 è appunto lo spazio tangente alla quartica nel punto doppio x di questa.

---

(29) In generale, *qualunque* siano l'ordine ed il numero delle dimensioni di uno spazio algebrico di punti, sempre in un suo punto doppio lo spazio tangente, invece che lineare, è quadrico; la proposizione si estende anzi a punti multipli qualunque (V. VERONESE, loc. cit., p. 167).

Ciò posto il risultato del n^0 precedente, limitandoci ancora al caso di un indice caratteristico unico, si può enunciare così:

Ad un indice caratteristico isolato $e \geqq 2$ *corrisponde un punto doppio* x *della quartica dotato di cono quadrico* S^2_{n-3} *tangente, il quale nel fascio di coni quadrici passanti pel* S^4_{n-4} *(cono quartico) costituito dagli* S'_1 *uscenti da* x *della quartica considerata corrisponde in generale all'indice caratteristico isolato* $e-2$.

Quindi, quel cono quadrico tangente in x *è di 1ª specie se* $e=2$, *ma ha un* S'_1 *doppio, cioè è cono di 2ª specie, quando* $e \geqq 3$, *e quel* S'_1 *doppio viene a stare su quel* S^4_{n-4}, *cioè sulla quartica considerata, quando* $e \geqq 4$, *ed è in tal caso doppio per quel* S^4_{n-4} *con un cono di 2ª specie* S^2_{n-4} *tangente, contenuto nel* S^2_{n-3}. *Per* $e \geqq 5$ *questo* S^2_{n-4} *tangente nel* S'_1 *doppio al* S^4_{n-4} *diventa cono di 3ª specie, cioè acquista un* S'_2 *doppio passante per questo* S'_1, *e per* $e \geqq 6$ *quel* S'_2 *viene a stare sul* S^4_{n-4}. *E così via dicendo.*

Così noi abbiamo precisamente quello che cercavamo, cioè in che cosa si distinguano tra loro i punti doppi della quartica provenienti dagl'indici caratteristici isolati 2, 3, 4, 5, 6, ... ([30]).

78. Si potrebbe usare un metodo analogo per studiare i casi di gruppi caratteristici composti di più indici. Ma qui per brevità ci limiteremo a considerare solo più il caso, in cui il precedente è incluso, nel quale si abbia il gruppo caratteristico

$$(e\,\overbrace{1\,1\,\ldots\,1}^{h}),$$

essendo $e>2$, e quindi (n^0 73) una quadrica ψ del fascio h volte specializzata, avente l'S'_{h-1} doppio tangente di 1ª specie in un certo punto x ed in un piano ξ ad ogni quadrica del fascio. Allora, applicando il risultato del n^0 76, se si considera su ξ un S'_{n-3} qualunque $\xi\zeta$, esso taglierà quel fascio in un fascio di S^2_{n-4}, in cui l'intersezione con ψ (quadrica corrispondente ad una radice $(e+h-1)$-upla del

([30]) Questo risultato ci dà alcuni esempi delle specie di punti doppi che si incontreranno quando si farà uno studio delle singolarità che può presentare uno spazio algebrico qualunque contenuto in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Una prima distinzione dei punti doppi in specie (corrispondente alla distinzione dei punti doppi delle superficie dello spazio ordinario in punti conici, biplanari ed uniplanari) sarà data appunto dal cono quadrico tangente, che potrà essere specializzato un numero qualunque di volte. Entro ciascuna di queste specie poi vi saranno delle sottospecie.

discriminante del fascio) corrisponde ad una radice $(e+h-3)$-upla del relativo discriminante. Se questa intersezione con ψ fosse, come nel caso di $e=2$, specializzata soltanto $h-1$ volte, avendo l'intersezione di $\xi\zeta$ col S'_{h-1} doppio di ψ per S'_{h-2} doppio, allora questo dovrebbe necessariamente (n⁰ 73) esser tangente a tutto quel fascio di S^2_{n-4}, e ciò qualunque sia ζ, e quindi l'S'_{h-1} doppio di ψ sarebbe tangente di specie superiore alla 1ª al fascio dato di quadriche, il che non è. Ne segue che la intersezione di $\xi\zeta$ con ψ è specializzata h volte (cioè che ξ è piano tangente propriamente detto di ψ), donde segue che in generale la sua caratteristica sarà:

$$(e-2, \overbrace{1 \ldots 1}^{h}).$$

79. Per ultimo avvertiamo, ricordando come degenerino le quadriche $n-2$ od $n-1$ volte specializzate (V. n⁰ 21), che, allorquando un gruppo caratteristico contiene $n-2$ indici, allora, e solo allora, la quartica S^4_{n-3} si scinderà in due S^2_{n-3} giacenti nei piani in cui si è scissa la corrispondente quadrica specializzata del fascio; e che, allorquando un gruppo caratteristico contiene $n-1$ indici, allora, e solo allora, la quartica si riduce ad un S^2_{n-3} doppio giacente nel piano doppio a cui si riduce la corrispondente quadrica specializzata del fascio e nei punti di quel S^2_{n-3} si toccheranno tutte le altre quadriche di questo. Non può esservi un gruppo caratteristico di n indici (i quali avendo per somma n dovrebbero allora esser tutti uguali ad 1), poichè, se vi fosse, dovrebbe esservi un valore di $\lambda : \mu$ tale che

$$\lambda a_{ik} + \mu c_{ik} = 0,$$

cioè tutte le quadriche del fascio dovrebbero coincidere.

§ 4.

Applicazione alla classificazione dei fasci di quadriche nello spazio lineare a tre dimensioni [31].

80. Per applicare le cose dette nel § precedente alla classificazione delle quartiche intersezioni di quadriche in uno spazio lineare a 3 dimensioni terremo conto di tutte le osservazioni, che ivi fa-

(31) La classificazione dell'intersezione di due quadriche nello spazio ordinario fu data per la prima volta in modo completo (anche tenendo conto della distin-

cemmo. Le varie *specie* di fasci di quadriche o le specie di tali quartiche corrispondono dunque alle seguenti 13 caratteristiche:

[1 1 1 1], [2 1 1], [3 1], [2 2], [4];
[(1 1) 1 1], [(2 1) 1], [(1 1) 2], [(3 1)], [(2 2)];
[(1 1) (1 1)];
[(1 1 1) 1], [(2 1 1)].

Abbiamo anzitutto cinque specie di quartiche per cui non passano coppie di piani, cioè che non si scindono in coniche. La specie [1 1 1 1] è quella generale (V. n^0 70): questa quartica sta su 4 coni quadrici, i cui vertici formano una quadrupla polare rispetto a tutte le quadriche del fascio. La [2 1 1] ha un punto doppio per la quartica con due tangenti distinte (V. n^0 77), intersezioni del piano tangente in quello al fascio di quadriche col cono del fascio corrispondente all'indice caratteristico 2; oltre a questo vi sono solo più due coni nel fascio. La quartica [3 1] ha un punto doppio, nel quale la coppia di tangenti (il cono S^2_{n-3} tangente, che si considerava al n^0 77) acquista un S_1' doppio, cioè coincidono, ha cioè una *cuspide*; oltre al cono che ha questo punto per vertice, il fascio di quadriche ne contiene solo un altro, corrispondente all'indice caratteristico 1. La quartica [2 2] sta su due soli coni, i cui vertici sono suoi punti doppi (ordinari); ma questi sono congiunti (V. n^0 72) da una retta facente parte della quartica, sicchè questa si scinde nella retta stessa ed una cubica. La quartica [4] poi, caso particolare delle precedenti, contiene (V. al n^0 77 il significato generale dell'indice caratteristico isolato 4) la tangente nel punto cuspidale che si aveva per la specie [3 1] e quindi si scinde in quella retta ed una cubica che la tocca in quel punto.

zione tra gli elementi reali e gl'imaginari) dal Painvin nel 1868 (Nouv. ann. de math., (2) 7) e nello stesso tempo dal Lüroth (Zeitschrift für M. u. Ph., 1868), e fu data più tardi (1876) dal Gundelfinger nelle sue pregevoli note alla 3ª edizione dell'«*Analytische Geometrie des Raumes*» di Hesse (V. p. 518), dove anch'egli la deriva dalla Memoria di Weierstrass; con questa differenza però da quanto io qui faccio, che, mentre egli dal Weierstrass prende le forme canoniche delle due forme quadratiche, e da queste forme canoniche, che servirono a questo per stabilire il suo teorema, e che mutano dall'una caratteristica all'altra, egli deduce le proprietà geometriche corrispondenti, io ho invece dedotto queste proprietà geometriche da considerazioni generali prima fatte su quel teorema, basate non su una forma particolare d'equazione, ma bensì sulla teoria geometrica delle quadriche.

Poi troviamo quei fasci di quadriche, in cui vi è un gruppo caratteristico contenente 2 indici al quale quindi corrisponde una coppia di piani (V. n⁰ 79). Il caso generale [(1 1) 1 1] dà una quartica scissa in 2 coniche che si tagliano in 2 punti. Corrispondentemente ai gruppi caratteristici 1 e 1 vi sono due coni propriamente detti nel fascio; i loro vertici hanno lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio. Ma questa proprietà spetta pure (e soltanto) ai punti della retta doppia della coppia di piani che corrisponde ad (1 1) ed in particolare ai due punti in cui essa taglia tutte le altre quadriche. Così dalla teoria generale si ottengono tutte le proprietà note di questo fascio. La specie [(2 1) 1] corrisponde al coincidere dei due punti suddetti, cioè al toccarsi delle due coniche (V. n⁰ 73); per queste passa solo più un cono. Per [(1 1) 2] invece si ottiene nella coppia di coniche, fuori della retta d'intersezione dei loro piani, un punto doppio proveniente dal 2, sicchè si hanno (V. anche n⁰ 72) una conica e due rette che la tagliano e si tagliano mutuamente: il loro punto d'intersezione è vertice del cono (2) che rimane nel fascio. Se poi supponiamo che questo cono s'avvicini indefinitivamente alla coppia di piani abbiamo il caso [(3 1)], nel quale il punto comune alle due rette nel caso precedente è venuto a coincidere coi due punti, che queste avevano comuni colla conica. Del resto, questo significato del gruppo caratteristico (31) risulta pure direttamente dal teorema dimostrato al n⁰ 78. Nel caso [(2 2)] ogni punto della retta doppia della coppia di piani è punto doppio della quartica, cioè sta su tutte le quadriche del fascio ed è un loro punto di contatto (V. n⁰ 74), sicchè il fascio si compone di quadriche raccordate lungo una loro generatrice comune e tagliantisi quindi ancora in due generatrici dell'altro sistema.

Nel caso [(1 1) (1 1)] vi sono nel fascio due coppie di piani, e quindi la quartica si compone di 4 rette, formanti un quadrilatero sghembo, le cui diagonali, rette doppie di quelle coppie di piani, saranno luogo dei punti aventi lo stesso piano polare rispetto a tutto il fascio di quadriche, e pei punti dell'una diagonale i piani polari faranno fascio intorno all'altra. Ritroviamo così un teorema noto.

Finalmente, vi sono due casi in cui il fascio di quadriche contiene un piano contato due volte, cioè le quadriche si toccano lungo una conica (V. n⁰ 79). Il caso generale è [(1 1 1) 1]: la conica non è in tal caso specializzata, e nel fascio di quadriche vi è un cono corrispondente al gruppo caratteristico 1. Caso particolare è [(2 1 1)]: la conica si scinde (V. n⁰ 73) in due rette, generatrici di diverso sistema, lungo le quali le quadriche del fascio sono raccordate.

Così si è visto con quanta semplicità le considerazioni generali da noi prima sviluppate si applichino al caso di $n=4$; ed avremo più tardi occasione di applicarle ai valori 5 e 6 di n. Qui vogliamo ancora notare come la formula generale data al n° 75 ci dia immediatamente nelle varie specie di fasci di quadriche quante siano quelle mobili che toccano un piano qualunque dello spazio. Nei fasci [1 1 1 1], [2 1 1], [3 1], [2 2], [4] esse sono sempre in numero di 3; nei fasci [(1 1) 1 1], [(2 1) 1], [(1 1) 2], [(3 1)] sono solo 2; negli altri fasci, cioè [(2 2)], [(1 1) (1 1)], [(1 1 1) 1], [(2 1 1)] vi è una sola quadrica (mobile) che tocchi un piano dato qualunque. Quella stessa formula generale citata dà il numero delle quadriche mobili che toccano una retta data qualunque: esso è 2 per tutte le specie di fasci, salvo per le specie [(1 1 1) 1], [(2 1 1)], per le quali esso è 1.

81. Se poi si domandassero gl'invarianti assoluti dei fasci di quadriche o delle loro quartiche d'intersezione, noi vediamo che ve n'è uno solo nel caso generale [1 1 1 1] ed è il rapporto anarmonico dei quattro coni che allora vi sono nel fascio. Negli altri casi la quartica non ha invarianti assoluti, in virtù dell'interpretazione geometrica da noi data del teorema di Weierstrass, e se si prendono due quartiche della stessa specie, che non sia però quella generale, si può sempre stabilire una proiettività tra due spazi tale che in essa quelle due curve si corrispondano. Se $r < 4$ è il numero di gruppi caratteristici (quadriche specializzate) corrispondenti a quella specie di quartiche, si potranno prendere ad arbitrio $3-r$ quadriche dell'un fascio come corrispondenti a $3-r$ quadriche fissate ad arbitrio nell'altro, in una proiettività tra due spazi, nella quale i due fasci di quadriche si corrisponderanno, cosicchè, se il numero dei gruppi caratteristici di una specie di quartiche è $r < 4$, vi saranno almeno ∞^{3-r} proiettività tra due spazi, nelle quali due quartiche date di quella specie si corrispondano. In particolare una tal quartica si trasformerà in se stessa con (almeno) ∞^{3-r} proiettività. Due quartiche [2 1 1] a punto doppio possono servire a determinare (se non individuare) una proiettività tra due spazi; una di esse si trasforma proiettivamente in se stessa in un numero determinato di modi. Ma ogni quartica della specie [3 1], oppure [2 2], ecc. si trasforma proiettivamente in se stessa in ∞^1 modi, ed ogni quartica della specie [4] in ∞^2 modi. Noi riconosciamo in questo modo come le cubiche sghembe e le quartiche dotate di cuspidi siano della specie di

quelle curve che furono studiate da KLEIN e LIE [32] sotto il nome di curve V, mentre non sono tali le quartiche a punto doppio, e tanto meno le quartiche generali. Benchè su ogni quartica a punto doppio si possa stabilire una corrispondenza proiettiva tra i suoi punti in infiniti modi, pure questa non farà parte in generale di una corrispondenza proiettiva tra due spazi. Invece, con qualche riflessione sulle ultime cose dette, si vede che una corrispondenza proiettiva tra i punti di una cubica fa sempre parte di una corrispondenza proiettiva tra i punti dello spazio, e che lo stesso vale per la quartica a cuspide, purchè la proiettività stabilita tra i suoi punti soddisfi a due condizioni, di cui una è, che la cuspide corrisponda a se stessa.

Come dicemmo, solo le quartiche della specie più generale [1 1 1 1] hanno un invariante assoluto, e due tali quartiche si possono trasformare proiettivamente l'una nell'altra solo quando quell'invariante abbia lo stesso valore. Questo invariante assoluto non è altro (V. n^0 67) che il rapporto anarmonico costante dei 4 piani che proiettano i vertici dei 4 coni del fascio dalla retta polare di un punto qualunque dello spazio rispetto al fascio stesso. Questo rapporto anarmonico essendo costante, noi vediamo che quelle polari formano un complesso tetraedrale, avente appunto quel rapporto anarmonico.

Quando si studiassero le quartiche come poste su una data quadrica, cosicchè si dovesse sempre soddisfare nelle proiettività alla condizione che questa si trasformi in se stessa, od in un'altra pure assegnata, allora (V. n^0 66) agl'invarianti assoluti già considerati se ne aggiungerebbe uno, cioè il rapporto anarmonico che quella quadrica determina con 3 delle quadriche specializzate del fascio (ove il numero di queste quadriche sia $\geqq 3$, cioè nei casi [1 1 1 1], [2 1 1], [(1 1) 1 1]).

§ 5.

Schiere di quadriche.

82. Abbiamo definito il fascio di quadriche considerando il punto come elemento dello spazio lineare S ad $n-1$ dimensioni, e considerando per conseguenza le quadriche come luoghi di punti di

[32] V. KLEIN e LIE, « *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* », Comptes-rendus, 1870, 1er sem. (70, pp. 1222 e 1275). In questo lavoro sono appunto notate tra le più semplici curve sghembe di quella famiglia le cubiche e le quartiche dotate di cuspide (V. p. 1224).

2^0 ordine. Se consideriamo invece il piano come elemento dello spazio lineare Σ pure ad $n-1$ dimensioni, dovremo considerare le quadriche come inviluppi di piani di 2^a classe, e la teoria svolta nei §§ precedenti sarà ancora applicabile perfettamente con pochi scambi di parole, essendo i due spazi S e Σ perfettamente scambiabili tra loro (e in ciò sta, come già notammo, la vera causa della dualità). Enunceremo dunque senz'altro le proposizioni che c'importano.

Date due quadriche come inviluppi di piani

$$\Phi \equiv \Sigma A_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0\,; \quad F \equiv \Sigma C_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0,$$

l'insieme di tutte le quadriche che toccano i piani comuni a queste formano un sistema semplicemente infinito rappresentato dall'equazione

$$l\Phi + mF = 0,$$

dove al rapporto $l:m$ vanno dati tutti i valori possibili; diremo questo sistema una *schiera* di quadriche. I piani tangenti comuni formano un Σ_{n-3}^4, che diremo *sviluppabile di* 4^a *classe*, e che costituisce la *base* della schiera. Per ogni spazio lineare di punti S_i' passano dei Σ_{n-i-3}^2 appartenenti alle quadriche della schiera, e questi Σ_{n-i-3}^2 nello spazio Σ_{n-i-2}' dei piani passanti pel S_i' formano una schiera, avente per sviluppabile di base il Σ_{n-i-4}^4 dei piani appartenenti alla base della schiera data. In particolare per ogni S_{n-4}' i piani, che vi passano, delle quadriche della schiera formano una nuova schiera di Σ_1^2 aventi comuni 4 piani tangenti, che sono piani della sviluppabile di 4^a classe, e ciò giustifica questo nome. Per ogni S_{n-3}' poi passano infinite coppie di piani tangenti alle quadriche date, e queste coppie formano un'involuzione quadratica in un fascio di piani.

83. Ogni Σ_{i-1}', cioè ogni S_{n-i-1}', è toccato in generale da i quadriche della schiera. In particolare ogni piano dello spazio $(i=1)$ è toccato da una sola quadrica, mentre per ogni punto $(i=n-1)$ ne passano $n-1$. Ma ogni quadrica h volte specializzata come inviluppo, la quale stia nella schiera, conta almeno $i+h-n$ volte tra le i quadriche suddette.

Per un punto x qualunque passano, come dicemmo, $n-1$ quadriche della schiera. Se dal punto stesso conduciamo i piani tangenti a tutte le quadriche di questa, notammo che essi formeranno una schiera di Σ_{n-3}^2: ora tra queste ve ne saranno in generale $n-1$ specializzate, cioè aventi un piano doppio e questi $n-1$ piani doppi saranno i piani tangenti in x alle $n-1$ quadriche della schiera passanti per x. Ora essi formano una $(n-1)$-upla polare rispetto a quella schiera di Σ^2_{n-3} e quindi anche rispetto alla schiera data di quadriche, cioè: *I piani tangenti in un punto qualunque dello spazio alle quadriche della schiera passanti per esso sono coniugati tra loro rispetto ad ogni quadrica della schiera.*

84. I poli di un piano rispetto alla schiera di quadriche formano un S_1' proiettivo alla schiera stessa; lo diremo l'S_1' *polare* del piano rispetto alla schiera. Esso taglia il piano dato nel suo punto di contatto con quella quadrica della schiera che lo tocca. Ma se questo piano fa parte della sviluppabile comune alla schiera di quadriche, allora quel S_1' vi giace sopra e costituisce la serie dei punti di contatto di quel piano colle diverse quadriche. Ora tra le quadriche di una schiera ve ne sono in generale n semplicemente specializzate come inviluppo, e ridotte quindi come luogo ad un piano doppio su cui sta il nucleo S^2_{n-3} della quadrica stessa; e si hanno così n piani formanti una n-upla polare rispetto a tutte le quadriche della schiera. L'S_1' polare di un piano qualunque dello spazio rispetto alla schiera taglia quei piani fissi nei poli di quello rispetto alle corrispondenti quadriche specializzate. Dunque, in virtù della corrispondenza proiettiva tra quegli S_1' e le quadriche della schiera, vediamo che il gruppo degli n punti d'intersezione di un S_1' polare colla n-upla polare di piani si mantiene proiettivo a se stesso col mutare del S_1'. In particolare tra questi S_1' corrispondenti proiettivamente alle quadriche della schiera e contenenti tali gruppi di n punti vi sono gli S_1' di contatto dei piani della sviluppabile.

85. Questi piani essendo in numero di ∞^{n-3}, quegli S_1' di contatto avranno per luogo una ∞^{n-2} di punti formanti una superficie-luogo che è assai importante di considerare. E' facile vedere che il nucleo di ogni quadrica specializzata della schiera è contenuto in quella superficie come *spazio doppio*. Ciò è analogo a quanto accade nel fascio di quadriche. Se in questo si considera un piano tangente (propriamente detto) ad una quadrica specializzata un numero qualunque h di volte, esso la taglierà in un S^2_{n-3} specializzato $h+1$ volte, avente per S_h' doppio un S_h' passante per l'S_{h-1}' doppio di quella: quel S_h' taglierà le altre quadriche del fascio in un S^2_{h-1}, parte della quartica d'intersezione, in ciascun punto del quale questa avrà un S_{n-3}' tangente il quale giacerà nel piano stesso. In particolare, per $h=1$ vi saranno in ogni piano tangente alla quadrica semplicemente specializzata del fascio due punti della quartica

(posti sul S_1' di contatto) nei quali l'S_{n-3}' tangente alla quartica sta nel piano stesso. Se il punto doppio della quadrica specializzata stesse sulla quartica (come punto doppio), allora di quei due punti uno sarebbe sempre fisso in esso. Ciò posto, passando allo spazio Σ di piani, noi abbiamo:

Ogni quadrica-inviluppo semplicemente specializzata di una schiera ha per nucleo un S_{n-3}^2, i cui punti sono doppi per la superficie considerata, in quanto che per un S_{n-3}' tangente di questo nucleo in un suo punto qualunque passano due diversi piani della sviluppabile i cui S_1' di contatto si tagliano nel punto stesso, sicchè v'è ragione di considerare questo punto come doppio in quella superficie. Più generalmente siavi (per eccezione) nella schiera una quadrica-inviluppo h volte specializzata, avente quindi per nucleo un S_{n-2-h}^2 giacente in un S_{n-1-h}'. Allora per ogni S_{n-2-h}' giacente in questo e tangente a quel nucleo in un punto qualunque x passerà un Σ_{h-1}^2 di piani della sviluppabile aventi gli S_1' di contatto passanti per x, sicchè per ogni punto x di quel nucleo passerà un cono S_h^2 composto di ∞^{h-1} S_1' passanti per esso ed appartenenti alla superficie considerata. I punti di contatto degli S_1' di questo S_h^2 con una quadrica qualunque della schiera formano un S_{h-1}^2 che varia con quella. Si potrebbe chiamare quel nucleo S_{n-2-h}^2 di quadrica h volte specializzata come inviluppo della schiera *spazio doppio di specie* h-*esima* per la superficie-luogo considerata.

86. Non stiamo ad enunciare le proposizioni corrispondenti per la sviluppabile di 4ª classe e la schiera di quadriche a quelle dimostrate nei §§ 1 e 2 sulla polarità rispetto ad una quartica od un fascio di quadriche, sugli spazi quadratici e lineari contenuti nella quartica e sulla generazione di questa mediante sistemi reciproci. Facciamo invece qualche osservazione sulla classificazione delle sviluppabili stesse analoga a quelle fatte nel § 3 sulla classificazione delle quartiche.

La considerazione del discriminante dell'equazione tangenziale

$$l\Phi + mF = 0$$

e dei suoi subdeterminanti permetterà di applicare ad una coppia di quadriche-inviluppi Φ, F ed alla schiera da loro determinata il teorema di WEIERSTRASS. E notiamo che la trasformazione proiettiva dei piani dello spazio Φ che si considera, coincide con una trasformazione proiettiva dei punti dello spazio S, cosicchè otterremo di nuovo dal teorema di WEIERSTRASS interpretato geometricamente le condizioni necessarie e sufficienti perchè due quadriche (luoghi di punti od inviluppi di piani) si possano trasformare mediante una proiettività in altre due quadriche date. Di qui segue che, classificando la posizione mutua che possono avere due quadriche, considerandole prima come luoghi di punti, poi come inviluppi di piani, si dovranno ottenere gli stessi casi. Anzi si può dimostrare ([33]) che se A e B sono i determinanti, supposti non nulli, delle due forme φ, f di cui Φ, F sono le forme aggiunte, il determinante di $l\Phi + mF$ avrà gli stessi divisori elementari che il determinante di $Alf + Bm\varphi$; quindi non solo la quartica d'intersezione di due quadriche e la sviluppabile dei loro piani tangenti comuni avranno la stessa caratteristica, ma inoltre le quadriche specializzate, rispettivamente come luogo e come inviluppo, del loro fascio e della loro schiera, le quali corrispondono agli stessi gruppi caratteristici, si corrisponderanno proiettivamente, e in questa corrispondenza proiettiva così determinata tra il fascio e la schiera le due quadriche date si corrisponderanno inversamente.

87. Consideriamo un piano doppio di una quadrica-inviluppo specializzata della schiera: esso avrà lo stesso polo rispetto a tutta la schiera di quadriche, e quindi, ove sia tangente all'una di esse, le toccherà tutte nello stesso punto. In questo caso adunque ogni S_1' passante per quel punto e giacente in quel piano si potrà considerare come facente parte di quella superficie, che dianzi consideravamo, luogo degli S_1' di contatto dei piani della sviluppabile di 4ª classe colle quadriche della schiera; laonde quel piano (contato due volte almeno) si separerà dalla superficie stessa.

88. Alla caratteristica [1 1 ... 1 1] corrisponde la schiera più generale di quadriche con n quadriche semplicemente specializzate come inviluppi, i cui nuclei stanno sugli n piani formanti la n-upla polare comune. In generale, ad un gruppo caratteristico qualunque contenente h indici corrisponde nella schiera una quadrica h volte specializzata come inviluppo, di cui soltanto la posizione rispetto alla schiera stessa dipende dal valore di quegli indici. Il caso in cui questi sono tutti uguali ad 1 è quello più generale. Se k tra essi sono uguali a 2 e gli altri tutti uguali ad 1, allora il Σ_{h-1}' di piani

---

([33]) V. una nostra Nota nel prossimo fascicolo del *Giornale di Matematiche* (Gennaio 1884). [Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche, Giornale di matem., 22, 1883, pp. 29-33; questo volume, nº XLV; N. d. R.].

doppi della quadrica, ossia l'S'_{n-h-1} che ne contiene il nucleo, sarà tangente di specie k-esima a tutte le quadriche della schiera. Per valori degl'indici maggiori di 2 si hanno posizioni particolari del nucleo di quella quadrica rispetto a tutta la schiera. Così, mentre il gruppo caratteristico 2 significa solo che il piano doppio (contenente il nucleo) di una quadrica semplicemente specializzata tocca in un punto tutta la schiera, il gruppo caratteristico 3 significa che inoltre il nucleo di quella quadrica passa per questo punto, ed il gruppo caratteristico 4 che l'S'_{n-3} tangente a quel nucleo in quel punto è pure tangente, ma di 2ª specie, a tutta la schiera di quadriche. E così via.

89. Per un S'_{n-h-1} qualunque dello spazio conducendo i piani tangenti alle quadriche di una schiera, vedemmo che essi formano nel Σ'_{h-1} dei piani passanti per quel S'_{n-h-1} una schiera di Σ^2_{h-2}. Se in particolare quel S'_{n-h-1} ha rispetto a tutta la schiera di quadriche uno stesso S'_{h-1} polare, questo taglierà tutte quelle quadriche precisamente nei luoghi dei punti di contatto della suddetta schiera di Σ^2_{h-2} colla schiera data di quadriche, sicchè potremo dire che le intersezioni di quel S'_{h-1} colla schiera di quadriche faranno ancora una schiera di quadriche S^2_{h-2}. Ora un S'_{h-1} siffatto, che goda cioè della proprietà di avere uno stesso S'_{n-h-1} polare rispetto alla schiera di quadriche, si ottiene sempre in quello che contiene il nucleo di una quadrica della schiera specializzata $n-h$ volte. Dunque, noi vediamo che ogni tale spazio taglia la schiera di quadriche data in una nuova schiera di quadriche (a numero minore di dimensioni), della quale fa parte, come risulta dal ragionamento tenuto, il nucleo di quella quadrica specializzata. Della stessa proprietà godrà evidentemente ogni spazio lineare intersezione di quelli che contengono i nuclei di due o più quadriche specializzate qualunque della schiera.

90. Della superficie luogo degli S_1', in cui i piani della sviluppabile toccano le quadriche della schiera, si trova facilmente l'equazione, e per conseguenza l'ordine. Per questo notiamo che l'equazione locale della quadrica avente per equazione tangenziale

$$l\Phi + mF = 0$$

sarà della forma:

$$\varphi l^{n-1} + \varphi_1 l^{n-2} m + \dots + \varphi_{n-1} m^{n-1} = 0,$$

dove $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ sono funzioni quadratiche delle coordinate di punti. Facendo variare $l:m$ si hanno così le equazioni locali delle quadriche della data schiera. Ora è chiaro che la superficie suddetta non è altro che il luogo delle intersezioni di ogni quadrica della schiera colla infinitamente vicina e che essa tocca appunto ogni quadrica della schiera lungo questa quartica d'intersezione con quella infinitamente vicina. Quindi, mentre per un punto qualunque dello spazio passano $n-1$ quadriche della schiera, i cui parametri $l:m$ sono radici dell'equazione dianzi scritta, in cui si siano poste le coordinate di quel punto, invece per un punto di quella superficie due di quelle quadriche (o di quei valori di $l:m$) verranno a coincidere. Ne segue che l'equazione locale di essa sarà data dal discriminante di quell'equazione. Questo discriminante essendo di grado $2(n-2)$ nei coefficienti, e questi di grado 2 nelle coordinate di punti, si avrà così un'equazione di grado $4(n-2)$ in queste, cosicchè conchiudiamo che questa superficie, cui dà luogo la sviluppabile di 4ª classe, è di ordine $4(n-2)$, ossia è un $S_{n-2}^{4(n-2)}$.

91. Più in generale, consideriamo un punto pel quale coincidano k delle $n-1$ quadriche della schiera che vi passano. Dovranno soddisfare a quell'equazione ed alle sue prime $k-1$ derivate, cioè ad un sistema di k equazioni che si vede facilmente potersi ridurre ad esser tutte di grado $n-k$ nel parametro $l:m$ e che sono di grado 2 nelle coordinate di punti. Ora, da una formula generale, che dà l'*ordine* di un sistema qualunque di equazioni, risulta che quel sistema è dell'ordine $2^{k-1}k(n-k)$. Quindi conchiudiamo che i punti pei quali passano k quadriche della schiera infinitamente vicine formano (nel caso più generale) uno spazio algebrico S_{n-k} di ordine $2^{k-1}k(n-k)$. Si potrebbero chiamare tutti questi spazi algebrici, cui dà luogo la sviluppabile considerata, *spazi cuspidali* di questa dei vari ordini. I casi estremi corrispondono a $k=2$, che dà appunto l'$S_{n-2}^{4(n-2)}$ di cui parlammo al n⁰ precedente, ed a $k=n-1$, che dà un S_1 di ordine $2^{n-2}(n-1)$ per ogni punto del quale coincidono tutte le quadriche della schiera, che vi passano.

Nello spazio lineare a 3 dimensioni, $n=4$, noi vediamo così che la sviluppabile di 4ª classe, base di una schiera di quadriche, dà per luogo una superficie d'ordine 8, e per linea cuspidale una curva d'ordine 12; e queste sono proprietà note di quella sviluppabile.

92. Consideriamo una quadrica qualunque φ della schiera: la sua intersezione con quel $S_{n-2}^{4(n-2)}$ conterrà, come già notammo, una quartica di contatto, la quale quindi conta due volte. La parte

rimanente dell'intersezione sarà dunque dell'ordine $2 \cdot 4\,(n-2) - 2 \cdot 4 = 8\,(n-3)$, cioè sarà un $S_{n-3}^{8(n-3)}$. D'altronde ogni S_1' di quel $S_{n-2}^{4(n-2)}$ essendo già tangente a φ non può tagliarla in un altro punto, senza giacervi completamente. Adunque quel $S_{n-3}^{8(n-3)}$, che è la parte rimanente dell'intersezione di φ col $S_{n-2}^{4(n-2)}$ si compone tutto di S_1', ciascuno dei quali è formato dai punti di contatto della schiera di quadriche con un piano, pure tangente a φ. Consideriamo in uno di quegli S_1' il punto di contatto con una quadrica qualunque f della schiera: questo punto apparterrà alla quartica in cui f taglia la quadrica fissa φ, e l'S_{n-3}' tangente nel punto stesso a quella quartica dovrà stare sui piani tangenti in esso ad f e φ, piani, che passano entrambi per quel S_1', cosicchè quel S_{n-3}' tangente alla quartica sarà tangente di 2ª specie a φ, cioè la toccherà lungo quel S_1'. Un tal punto di una quartica giacente su φ si dirà *punto singolare* di quella quartica rispetto a φ. Noi giungiamo dunque a questa conclusione: *L'*$\mathrm{S}_{n-3}^{8(n-3)}$ *in cui* φ *è tagliata (non toccata) dalla superficie-luogo* $\mathrm{S}_{n-2}^{4(n-2)}$ *della sviluppabile è composto di* ∞^{n-4} S_1' *ciascuno dei quali contiene un punto singolare (rispetto a* φ*) di ogni quartica d'intersezione di* φ *colle altre quadriche della schiera, anzi tocca quella quartica in quel punto singolare.*

Come tutti gli S_1' polari dei piani dello spazio rispetto alla schiera di quadriche, così anche questi S_1' composti di punti singolari delle quartiche che queste determinano su φ corrisponderanno proiettivamente alla schiera di quadriche e quindi saranno proiettivi tra loro. Ognuno di essi contiene un punto di ciascun nucleo di quadriche specializzate della schiera, punto che va considerato come singolare per la corrispondente intersezione di φ colla quadrica specializzata.

Notiamo poi che viceversa ogni punto singolare della quartica in cui φ è tagliata da un'altra quadrica qualunque f della schiera è compreso nel $S_{n-3}^{8(n-3)}$ suddetto; in fatti per definizione il suo S_{n-3}' tangente alla quartica toccherà φ secondo un S_1', che sarà luogo dei punti di contatto di φ col fascio dei piani passanti pel S_{n-3}': tra questi piani ve n'è uno tangente nel punto considerato ad f, e questo piano sarà in conseguenza tangente ad f e φ, cioè farà parte della sviluppabile considerata, ed inoltre l'S_1' considerato sarà appunto quello che congiunge i punti di contatto di quel piano con quelle quadriche. E' dunque provato l'asserto.

93. Come abbiamo considerato l'intersezione di una quadrica qualunque φ della schiera col $S_{n-2}^{4(n-2)}$, così si può in generale considerarne l'intersezione col S_{n-k} di ordine $2^{k-1}\,k\,(n-k)$, che ve-

demmo (n° 91) essere luogo dei punti d'intersezione di k quadriche infinitamente vicine della schiera. Se consideriamo con φ le $k-1$ consecutive, avremo k quadriche tagliantisi in un $S^{2^k}_{n-k-1}$, il quale giacerà su φ: in ogni suo punto vi sarà contatto k-punto, com'è facile vedere, col suddetto S_{n-k} di ordine $2^{k-1}k(n-k)$, cosicchè l'intersezione S_{n-k-1} di ordine $2^k k(n-k)$, di questo con φ si comporrà di quel $S^{2^k}_{n-k-1}$ contato k volte ed inoltre di un S_{n-k-1} di ordine $2^k k(n-k-1)$, sicchè questo si può riguardare come l'intersezione propriamente detta che cercavamo. Facendo crescer k a partire da 2 si hanno così vari spazi algebrici su φ, ciascuno contenuto nei precedenti. I punti di quello che corrisponde ad un dato valore di k godono della proprietà che per ciascuno di essi passano oltre a φ altre $n-2$ quadriche della schiera, di cui k sono infinitamente vicine.

§ 6.

Quartiche su una quadrica e serie di quartiche omofocali.

94. Consideriamo una quartica qualunque Q giacente su una quadrica data φ, cioè intersezione di un fascio di quadriche, di cui questa fa parte. L'S'_{n-3} tangente in un suo punto qualunque x alla quartica Q taglierà quel fascio di quadriche secondo un fascio di S^2_{n-4} (coni di vertice x), tra cui ve ne saranno in generale $n-3$ aventi un S_1' doppio passante per x; orbene rispetto alle $n-3$ corrispondenti quadriche del fascio dato quel punto x si dirà *singolare* (di 1° ordine). In particolare un punto singolare x di Q rispetto a φ sarà, come appunto già definimmo al n° 92, un punto nel quale l'S'_{n-3} tangente a Q è tangente di 2ª specie a φ, cioè la tocca secondo un S_1'. Questo S_1' di contatto si dirà composto dei *punti corrispondenti* al punto singolare x. I piani tangenti in essi a φ sono tangenti in x rispettivamente alle varie quadriche che passano per Q (V. n° 92).

Sia f una qualunque di queste quadriche. Il punto considerato x, di f e φ, avrà per piano tangente ad f un piano tangente a φ. Dunque starà sulla quadrica che è polare di φ rispetto ad f; e viceversa, cosicchè l'S_{n-4} dei punti singolari della quartica φf (rispetto a φ) è determinato dall'intersezione di questa colla quadrica polare di φ rispetto ad f, e forma quindi un S^8_{n-4} determinato dalle equazioni:

$$\varphi=0, \qquad f=0, \qquad \Phi(f_i)=0.$$

95. Chiameremo *punto singolare* di 2^0 ordine della quartica Q un punto singolare (rispetto a φ), il cui S_1' di punti corrispondenti appartenga a Q, punto singolare di 3^0 ordine un punto singolare il cui S_1' corrispondente si componga di punti singolari di 1^0 ordine, ed in generale *punto singolare d'ordine* k un punto singolare il cui S_1' corrispondente si componga di punti singolari d'ordine $k-2$. E' facile vedere che basta che sia singolare d'ordine $k-2$ uno solo dei punti corrispondenti perchè siano tutti tali. Si trova inoltre senza difficoltà, partendo dalle equazioni, che abbiamo date, dei punti singolari di 1^0 ordine, che le equazioni dei punti singolari d'ordine k saranno:

$$\varphi=0,\quad f=0,\quad \Phi(f_i)=0,\quad f(\Phi_i(f_i))=0,\quad \Phi[f_i(\Phi_i(f_i))]=0,$$
$$f\{\Phi_i[f_i(\Phi_i(f_i))]\}=0, \ldots$$

dove intendiamo che in genere s'indichi:

$$\Theta_i(\chi_i)=\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Theta(\chi_1,\ldots,\chi_n)}{\partial\chi_i},$$

e dove l'ultima equazione contiene $k+1$ simboli tra Φ ed f, cosicchè secondo che k è pari od impari, essa comincia con f oppure con Φ. Quelle equazioni mostrano che i punti singolari d'ordine k formano un $S^{2^{k+2}}_{n-3-k}$, e che si possono ottenere mediante la successiva costruzione di quadriche reciproche polari rispetto alle due quadriche date φ, f.

Nel caso in cui queste siano nella posizione più generale, ed anzi in tutti i casi in cui la caratteristica della schiera o del fascio da esse determinato contiene solo indici uguali ad 1, si possono porre le loro equazioni sotto la forma:

$$\varphi\equiv\Sigma x_i^2=0\,;\quad f\equiv\Sigma s_i x_i^2=0.$$

Sarà per conseguenza $\Phi(\xi)\equiv\Sigma\xi_i^2$, e quindi le equazioni precedenti che determinano i punti singolari d'ordine k della quartica $f\varphi$ su φ prendono la forma semplicissima:

$$\Sigma x_i^2=0,\quad \Sigma s_i x_i^2=0,\quad \Sigma s_i^2 x_i^2=0,\quad \Sigma s_i^3 x_i^2=0,\ \ldots,\ \Sigma s_i^{k+1} x_i^2=0.$$

96. In ciascun punto singolare x della quartica Q abbiamo visto che i piani tangenti a φ nei punti del S_1' corrispondente ad x non sono altro che i piani tangenti in x alle varie quadriche passanti per Q, cosicchè queste quadriche del fascio fanno corrispondere proiettivamente tra loro i punti di quegli S_1'. Consideriamo una qualunque f, di queste quadriche e la schiera di quadriche che essa

determina con φ. Questa schiera taglierà φ secondo un sistema di quartiche (tra cui è compresa Q), che diremo serie di *quartiche omofocali*. Le principali proprietà di una tal serie di quartiche poste su φ furono già trovate alla fine del § precedente (n^i 92, 93). Queste quartiche godono cioè della proprietà di aver comuni gli S_1' corrispondenti ai punti singolari, sicchè tutti questi S_1' formano su φ un $S_{n-3}^{8(n-3)}$ che è perfettamente determinato da una di quelle quartiche, p. e. da Q. Su ogni tale S_1' un punto qualunque è singolare per una determinata quartica della serie, la quale tocca l'S_1' in esso ed è corrispondente ad un punto singolare per tutte le altre quartiche, e si ha in tal modo una corrispondenza proiettiva tra i punti di questi S_1' e le quartiche della serie aventi quei punti per punti singolari. L'S_{n-3}' tangente a φ lungo un tale S_1' è tangente a tutte le quartiche del sistema rispettivamente nei loro punti singolari posti su questo S_1' e di qui segue che ogni spazio lineare di φ passante per quel S_1' e contenuto per conseguenza in quel S_{n-3}' è tangente a tutte le quartiche della serie nei punti singolari, cioè le taglia secondo spazi quadratici specializzati aventi questi punti doppi. In particolare ogni S_1' della serie considerata taglia ogni quartica del sistema in due punti che coincidono nel punto singolare; ed ogni S_2' di φ passante per un tale S_1' taglia ciascuna quartica in un S_1^2 che si scinde in due S_1' aventi comune il punto singolare corrispondente.

97. Dalle cose dette nel § precedente, risulta come ogni punto del $S_{n-3}^{8(n-3)}$ considerato goda della proprietà che due delle $n-2$ quartiche omofocali che in generale passano pel punto stesso coincidono. Più in generale si può dimostrare che gli spazi $S_{n-k-1}^{2^k \cdot k(n-k-1)}$ che ivi (n^0 93) considerammo come luoghi di quei punti pei quali coincidono k delle $n-2$ quartiche omofocali, che vi passano, sono i luoghi degli ∞^1 $S_{n-k-2}^{2^{k+1}}$ di punti singolari d'ordine $k-1$ appartenenti alle ∞^1 quartiche omofocali; e precisamente ogni punto del $S_{n-k-1}^{2^k \cdot k(n-k-1)}$ suddetto è singolare d'ordine $k-1$ per quella quartica nella quale coincidono appunto k delle $n-2$ quartiche omofocali che vi passano.

Di qui poi segue che se indichiamo, come al n^0 90, con

$$\varphi l^{n-1} + \varphi_1 l^{n-2} m + \dots + \varphi_{n-1} m^{n-1} = 0$$

la forma aggiunta nelle x della forma $l\Phi(\xi) + mF(\xi)$, sicchè questa equazione e le sue prime k derivate rispetto ad m, ponendovi poi

$l = 0$ diventano:

$$\varphi_{n-1} (\equiv f) = 0, \quad \varphi_{n-2} = 0, \quad \varphi_{n-3} = 0, \ldots, \varphi_{n-k-1} = 0,$$

queste insieme colla $\varphi = 0$ determineranno i punti singolari d'ordine k della quartica $f\varphi$ su φ. Esse hanno forma diversa da quella data al n^0 95 per la determinazione degli stessi punti singolari. Però i due sistemi di equazioni si equivalgono.

98. Quelle proprietà di un sistema di quartiche omofocali che furono viste al n^0 96 ed in particolare il fatto che tutti gli S_1' di φ considerati formano un $S_{n-3}^{8(n-3)}$, che è perfettamente determinato da una qualunque di quelle quartiche, mostrano che queste formano un sistema semplicemente infinito, che è completamente determinato da una qualunque di esse. La quartica Q è determinata come intersezione di un fascio di quadriche di cui fa parte φ; orbene qualunque sia la quadrica f che si prende in questo fascio, la schiera di quadriche determinata da f e φ taglierà sempre φ nello stesso sistema semplicemente infinito di quartiche omofocali, sicchè variando f nel fascio suddetto questo sistema di quartiche non muta e quindi ogni quadrica della schiera $f\varphi$ descriverà a sua volta un fascio avente per base una delle quartiche omofocali ([34]).

([34]) Questo teorema interessante si può anche enunciare così: Siano date oltre ad una quadrica φ due altre quadriche f e g; se queste son tali che il fascio di quadriche $f\varphi$ e la schiera $g\varphi$ abbiano, oltre a φ, un'altra quadrica comune, anche il fascio di quadriche $g\varphi$ e la schiera $f\varphi$ avranno comune, oltre a φ, una quadrica diversa da φ. — La dimostrazione che ne ho dato sopra basta pel mio scopo; sarebbe però desiderabile una dimostrazione *diretta* di questo teorema, ma non mi è riuscito di trovarne una tale che, oltre ad essere diretta, valga ancora per una posizione mutua qualunque di quelle quadriche. Nel caso, in cui la caratteristica del fascio o della schiera $f\varphi$ abbia tutti gl'indici uguali ad 1, la dimostrazione è assai semplice, poichè si potrà assumere: $\varphi = \Sigma x_i^2$, $f = \Sigma k_i\, x_i^2$ e quindi le forme aggiunte saranno: $\Phi = \Sigma \xi_i^2$, $F = \Sigma \xi_i^2 / k_i$. Una quadrica del fascio $f\varphi$ sarà $\Sigma (k_i + l)\, x_i^2$ e la sua forma aggiunta $\Sigma \xi_i^2 / (k_i + l)$. La quadrica g per ipotesi determina con φ una schiera, in cui suppongo stia precisamente quella quadrica del fascio $f\varphi$ (oltre a φ), cosicchè g sarà della forma $\Sigma \xi_i^2 [\lambda + 1/(k_i + l)]$, ossia in coordinate di punti $\Sigma x_i^2 / [\lambda + 1/(k_i + l)]$. Nel fascio che questa quadrica g determina con φ una quadrica qualunque sarà $\Sigma x_i^2 (\mu + 1/[\lambda + 1/(k_i + l)])$, mentre nella schiera $f\varphi$ una quadrica qualunque è $\Sigma \xi_i^2 (m + 1/k_i)$, ed il teorema consiste in questo, che si possono sempre determinare m e μ in modo che questa qua-

Si ha così un sistema doppiamente infinito di quadriche, il cui studio non sarebbe privo d'interesse. Esso si compone di ∞^1 fasci di quadriche, poichè ogni quadrica del sistema determina con φ un fascio, che fa parte di quello. Esso è pure composto di ∞^1 schiere di quadriche, poichè la schiera che una quadrica qualunque del sistema determina con φ è tutta contenuta nel sistema. Tutti i fasci del sistema si corrispondono proiettivamente, essendo in essi corrispondenti quelle quadriche che stanno in una stessa schiera del sistema, e analogamente si corrispondono proiettivamente le schiere del sistema. Due schiere qualunque, ovvero due fasci qualunque di quadriche del sistema non hanno alcuna quadrica comune, salvo φ, mentre un fascio ed una schiera hanno sempre comune una quadrica oltre a φ (la qual quadrica può però venir a coincidere con φ).

99. Il sistema di quadriche considerato è polare reciproco di se stesso rispetto alla quadrica φ. In fatti, si consideri un suo fascio qualunque, e in questo sia f la quadrica infinitamente prossima a φ. La schiera $f\varphi$ appartiene pure al sistema, ed è facile vedere con considerazioni infinitesimali che essa è appunto polare di quel fascio rispetto a φ. Così si vede come i fasci e le schiere del sistema si corrispondano gli uni alle altre, essendo polari reciproci rispetto a φ.

---

drica coincida con quella, pel che basta che sia:

$$\text{cost.} = \left(m + \frac{1}{k_i}\right)\left(\mu + \frac{1}{\lambda + 1/(k_i + l)}\right) = \frac{(mk_i + 1)[(\mu\lambda + 1)\,k_i + \mu\,(l\lambda + 1) + l]}{[\lambda k_i + l\lambda + 1]\,.\,k_i}\,.$$

Di qui (trascurando l'ipotesi $m = \infty$, $\mu = \infty$, che conduce solo alla quadrica comune φ) si traggono le due equazioni: $m\,(l\lambda + 1) - \lambda = 0$, $\mu\,(l\lambda + 1) + l = 0$, ossia: $m = \lambda/(l\lambda + 1)$, $\mu = -\,l/(l\lambda + 1)$, formule che determinano perfettamente m e μ. Si ha così una dimostrazione diretta del teorema. Di più queste formule mostrano che solo quando $l\lambda = -1$ la quadrica considerata comune alla schiera $f\varphi$ ed al fascio $g\varphi$ viene a coincidere ($m = \mu = \infty$) con quella quadrica che questi hanno sempre comune, cioè con φ. Inoltre, considerando in esse come fissa l'una delle due quantità l, λ, e l'altra come variabile, esse stabiliscono una corrispondenza proiettiva tra questi parametri ed i parametri m e μ, dalla quale si ha una verificazione delle proposizioni che sopra si esporranno.

Noterò finalmente, che il teorema di cui si tratta fu per lo spazio a 3 dimensioni enunciato, credo per la prima volta dal DARBOUX nella sua opera « *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* etc. » [Mémoires Bordeaux], 1873, a p. 59, ma dimostrato pel solo caso appunto in cui le quadriche considerate si possono rappresentare con somme di quadrati.

Ed è appunto un fascio ed una schiera del sistema, i quali si corrispondano in questa polarità, che avranno comune oltre a φ solo una quadrica infinitamente vicina a questa. Questa polarità poi mostra che vi è una corrispondenza proiettiva non solo tra i fasci di quadriche del sistema o tra le schiere del sistema stesso, ma anche tra quelli e queste.

100. Si ha una rappresentazione molto semplice di questo sistema doppiamente infinito di quadriche considerando il luogo dei poli di un piano dello spazio (o l'inviluppo dei piani polari di un punto) rispetto alle quadriche del sistema. Se P è il polo rispetto a φ, il luogo dei poli relativi ad un fascio di quadriche del sistema passante per φ è un S_1^{n-1} (V. n^0 55) passante per P: gli S_1' che congiungono P ai punti di quel S_1^{n-1} saranno luoghi dei poli relativi alle schiere di quadriche che congiungono φ alle quadriche del fascio considerato. Il luogo di questi S_1' sarà un cono di vertice P a 2 dimensioni e d'ordine $n-2$, nel quale esisterà un sistema semplicemente infinito di S_1^{n-1}, luoghi dei poli relativi a fasci di quadriche del sistema. Ed il fatto che in quel cono ogni S_1' taglia ogni S_1^{n-1} in un punto determinato oltre a P, mentre due S_1' ovvero due S_1^{n-1} non si tagliano che in P, conferma quanto dicemmo sul sistema di quadriche. Così pure si vede che gli S_1' saranno punteggiati proiettivamente dagli S_1^{n-1} e questi da quelli. Finalmente possiamo far corrispondere ad ogni S_1^{n-1} l'S_1' che lo tocca in P e viceversa, ed allora le punteggiate poste su un S_1' e su un S_1^{n-1} si potranno far corrispondere proiettivamente mediante rispettivamente gli S_1^{n-1} e gli S_1' corrispondentisi. — Viceversa, da questa rappresentazione su quel cono, si potrebbe facilmente dedurre una dimostrazione del teorema del n^0 98 e della nota relativa.

101. Tutti i fasci e tutte le schiere contenuti nel sistema hanno la stessa caratteristica. Consideriamo in fatti una schiera passante per φ: se in essa prendiamo un'altra quadrica qualunque, il fascio che essa determinerà con φ avrà la stessa caratteristica della schiera (V. n^0 86), anzi gli stessi invarianti assoluti, e quindi avranno la stessa caratteristica tutti i fasci così ottenuti; e similmente si scorge che quella caratteristica e quegl'invarianti assoluti appartengono pure alle schiere del sistema. Quegl'invarianti assoluti dipendono dalle quadriche specializzate rispettivamente come luoghi e come inviluppi dei fasci e delle schiere. Ora le quadriche specializzate, come luogo e quelle specializzate come inviluppo, si corrispondono nella polarità rispetto

a φ. — Se consideriamo una quadrica h volte specializzata, come inviluppo, di una schiera passante per φ, il suo nucleo S^2_{n-h-2} godrà rispetto alla sviluppabile di base delle proprietà viste al n° 85, e quindi taglierà φ in un S^4_{n-h-3}, i cui punti saranno doppi di specie *h-esima* per quella sviluppabile, cioè saranno punti per ciascuno dei quali passerà un cono S^2_h tutto composto di S_1' della sviluppabile, i quali staranno tutti su φ e saranno perciò composti di punti singolari delle quartiche omofocali; anzi in questo modo si avranno tutti questi punti singolari. Tutti quegli S^4_{n-h-3} contenuti in φ si diranno *quartiche focali* o semplicemente *focali* di quella serie di quartiche date (e di qui il nome dato a queste di quartiche *omofofocali*). Poichè essi dipendono solo evidentemente da questo sistema di quartiche, il quale non muta cambiando la schiera di quadriche, così potremo conchiudere che i nuclei delle quadriche specializzate delle varie schiere formano fasci insieme coll'intersezione di φ cogli spazi lineari in cui i nuclei stessi sono contenuti (spazi lineari, che sono gli stessi per tutte quelle schiere).

102. Data la caratteristica di una quartica su φ e quindi anche di tutte le quartiche omofocali, gl'invarianti assoluti di quella quartica saranno dati dagl'invarianti assoluti del gruppo composto di φ e delle quadriche specializzate del fascio che determina quella quartica. Invece, se si vogliono gl'invarianti assoluti del sistema di quartiche omofocali (cioè quelle quantità, che occorre e basta abbiano lo stesso valore per due serie omofocali di quartiche aventi la stessa caratteristica, affinchè queste serie si possano trasformare proiettivamente l'una nell'altra) non occorrerà considerare anche φ in quel gruppo.

Da un risultato avuto al n° 75 ricaviamo per dualità che, se nella caratteristica di una serie di quartiche omofocali poste su φ s'indicano con e i primi indici dei vari gruppi caratteristici, il numero delle quartiche (variabili) della serie che passano per un punto qualunque di φ è: $\Sigma e - 2$.

103. Noteremo finalmente che, ponendo $n = 4$ nei risultati degli ultimi §§, otteniamo per lo spazio lineare a 3 dimensioni le seguenti proposizioni:

La sviluppabile circoscritta ad una schiera di quadriche è in generale di 4ª classe d'ordine 8 ed ha uno spigolo di regresso d'ordine 12. Essa tocca una quadrica qualunque della schiera secondo una quartica e la taglia secondo 8 rette, cioè due quaterne di generatrici dei due sistemi, le quali sono precisamente le generatrici tangenti a quella quartica ([35]). In ogni quadrica φ della schiera le altre determinano come intersezione un sistema di quartiche omofocali, cioè tangenti a due quaterne fisse di generatrici di φ: gli 8 punti di contatto con queste sono per ciascuna quartica i punti singolari rispetto a φ (*singolari* in quanto che hanno per tangente non una tangente ordinaria di φ, ma una sua generatrice). Sulle 8 generatrici di φ si hanno così 8 punteggiate dei punti singolari, tutte proiettive tra loro ed al sistema di quartiche omofocali. In particolare vi sono, nel caso più generale, nella schiera 4 quadriche specializzate, i cui nuclei sono 4 coniche doppie della sviluppabile, le quali tagliano φ in 4 quaterne di punti, le quali non mutano cambiando la schiera ma lasciando fisso il sistema di quartiche omofocali e godono della proprietà che per ogni punto di una di esse passano due delle generatrici dei punti singolari, sicché quei 4.4 punti non sono altro che i 16 punti d'intersezione delle 8 generatrici suddette. In ognuna di queste stanno 4 di quei punti, uno per ogni quaterna; e, come dicemmo, questi gruppi di 4 punti sono proiettivi al gruppo delle 4 quadriche specializzate della schiera, sicchè possiamo aggiungere alle proposizioni enunciate dallo CHASLES quest'altra: che i rapporti anarmonici delle due quaterne di generatrici singolari di φ sono uguali. Essi costituiscono l'invariante assoluto della serie di quartiche omofocali su φ. Se ad esso aggiungiamo un rapporto anarmonico in cui entri un punto singolare di una data quartica del sistema, avremo i due invarianti assoluti di questa quartica.

([35]) V. CHASLES, « *Propriétés des courbes à double courbure du 4e ordre provenant de l'intersection de deux surfaces du second ordre* », Comptes-rendus, 1862, 54, pp. 317 e 418. Ivi sono pure dati altri caratteri per la quartica e la sviluppabile di 4a classe; si potrebbe cercarne gli analoghi per uno spazio a più dimensioni.