Corrado Segre

Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche

Giornale di Mat., Vol. **22** (1884), p. 29–32

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 229–233

XLV.

TEOREMA SULLE RELAZIONI TRA UNA COPPIA DI FORME BILINEARI E LA COPPIA DELLE LORO FORME RECIPROCHE

«Giornale di matematiche di BATTAGLINI», vol. XXII, 1884, pp. 29-32.

TEOREMA. — Siano a_{ik}, b_{ik} $(i, k = 1, \dots, n)$ due sistemi di n^2 quantità qualunque, $A = |a_{ik}|$ e $B = |b_{ik}|$ i loro determinanti, supposti non nulli, e α_{ik}, β_{ik} i quozienti dei subdeterminanti complementari degli elementi a_{ik}, b_{ik} rispettivamente per questi determinanti. Indicando con p, q delle indeterminate qualunque, i due determinanti

$$|pa_{ik} + qb_{ik}| \qquad \text{e} \qquad |q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|$$

saranno identici, a meno del fattor costante AB, ed ammetteranno gli stessi divisori elementari.

Eseguendo in fatti in modo conveniente il prodotto delle tre matrici

$$|a_{ik}|, \qquad |b_{ik}|, \qquad |q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|$$

è chiaro che l'elemento generale (di posti i, k) della matrice così ottenuta sarà:

$$\sum_{i'k'} a_{i'k}\, b_{ik'}\, (q\alpha_{i'k'} + p\beta_{i'k'}) = p \sum_{i'} a_{i'k} \sum_{k'} b_{ik'}\, \beta_{i'k'} + q \sum_{k'} b_{ik'} \sum_{i'} a_{i'k}\, \alpha_{i'k'} .$$

Ora in virtù della definizione delle α_{ik}, β_{ik} si ha:

$$\sum_{k'} b_{ik'}\, \beta_{i'k'} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad i' > \text{o} < i \\ 1 & \text{per} \quad i' = i \end{cases}, \qquad \sum_{i'} a_{i'k}\, \alpha_{i'k'} = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad k' > \text{o} < k \\ 1 & \text{per} \quad k' = k \end{cases},$$

e quindi quell'elemento generale diventa:

$$= pa_{ik} + qb_{ik} .$$

Dunque il determinante di quella matrice sarà:

$$|pa_{ik} + qb_{ik}| = AB\,|q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|\ (^1).$$

Inoltre ogni subdeterminante di dato ordine di questo determinante delle $pa_{ik} + qb_{ik}$ potrà esprimersi come somma di prodotti di subdeterminanti dello stesso ordine del determinante delle $q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}$ per delle costanti (subdeterminanti di A e B), e quindi ogni divisore comune a tutti i subdeterminanti di un dato ordine di $|q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|$ sarà pure divisore comune ai subdeterminanti dello

---

[1] Questa relazione è dovuta ad un mio caro ed illustre professore, il prof. SIACCI (V. *Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni*, Atti Acc. Torino, VII, 1872, p. 772), la cui dimostrazione consiste in sostanza nel mostrare come negli sviluppi dei due membri secondo le potenze di p, q i coefficienti omologhi siano uguali. Ma l'uguaglianza dei divisori elementari dei due determinanti $|pa_{ik} + qb_{ik}|$, $|q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|$ non fu notata dal prof. SIACCI; pare in fatti che seguendo quel metodo essa sarebbe difficile da dimostrarsi.

Già il prof. SIACCI aveva riconosciuta l'importanza analitica del suo teorema. Completato ora, come noi abbiamo fatto, colla considerazione dei divisori elementari, la sua importanza viene ad essere assai maggiore. Qui per brevità ci limitiamo ad accennarne un'applicazione, oltre a quelle che ne faremo nel testo. Suppongasi che le a_{ik}, b_{ik} siano i coefficienti di due sostituzioni ortogonali di moduli ε, ε', aventi, com'è noto, per valor assoluto 1. Sarà $\alpha_{ik} = \varepsilon a_{ik}$, $\beta_{ik} = \varepsilon' b_{ik}$, e quindi applicando il nostro teorema abbiamo che: 1° Se a_{ik}, b_{ik} sono coefficienti di due sostituzioni ortogonali della stessa specie (cioè $\varepsilon = \varepsilon'$), allora i divisori elementari del determinante $|pa_{ik} + qb_{ik}|$ non corrispondenti alle radici ± 1 di questo determinante sono a coppie di ugual grado e corrispondenti a radici reciproche. 2° Se a_{ik}, b_{ik} sono coefficienti di due sostituzioni ortogonali di specie diversa ($\varepsilon = -\varepsilon'$), allora i divisori elementari di $|pa_{ik} + qb_{ik}|$ non corrispondenti alle radici $\pm\sqrt{-1}$ di questo determinante sono a coppie di ugual grado e corrispondenti a radici aventi -1 per prodotto. Di queste proposizioni la 2ª crediamo sia nuova; la 1ª invece è contenuta in una proposizione dovuta al FROBENIUS (V. *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, CRELLE's J., 84, p. 42) e comprende la proposizione dedotta dal prof. SIACCI come caso particolare, cioè che se a_{ik}, b_{ik} sono i coefficienti di due sostituzioni ortogonali di modulo 1 si ha $|pa_{ik} + qb_{ik}| = |qa_{ik} + pb_{ik}|$. Notiamo del resto che quelle due proposizioni si estendono immediatamente al caso in cui le a_{ik}, b_{ik} siano i coefficienti di due sostituzioni qualunque atte a trasformare una stessa forma quadratica non degenere in se stessa, perocchè esse hanno evidentemente carattere invariantivo. Se poi in esse si suppone $b_{ik} = 0$, $b_{ii} = 1$, esse forniscono proprietà notevoli dei coefficienti di una sola sostituzione ortogonale, diverse a seconda che il modulo di questa è $+1$ ovvero -1. L'importanza di queste proposizioni è capitale quando si vogliano classificare le sostituzioni ortogonali, o le coppie di tali sostituzioni, problema importantissimo anche dal lato geometrico, e che forse verrà da noi trattato altrove.

stesso ordine di $|pa_{ik} + qb_{ik}|$. Per la stessa ragione (poichè la relazione tra le a_{ik}, α_{ik} e tra le b_{ik}, β_{ik} è reciproca) ogni divisore comune a questi ultimi subdeterminanti sarà pure divisore comune dei primi. Quindi se per ciascuno dei determinanti $|pa_{ik} + qb_{ik}|$, $|q\alpha_{ik} + p\beta_{ik}|$ si forma la serie dei massimi comuni divisori di tutti i subdeterminanti dello stesso ordine, queste due serie di funzioni di p e q saranno identiche, a meno di fattori costanti. In altri termini quei due determinanti hanno gli stessi divisori elementari.

Dal teorema importante così dimostrato seguono conseguenze del pari importanti. Anzitutto è noto che il sig. WEIERSTRASS ha trovato la seguente proposizione fecondissima (2): La condizione necessaria e sufficiente affinchè una coppia di forme bilineari $\Sigma a_{ik} x_i y_k$, $\Sigma b_{ik} x_i y_k$ possa trasformarsi con due sostituzioni lineari qualunque (di moduli non nulli) in un'altra coppia data $\Sigma a'_{ik} x'_i y'_k$, $\Sigma b'_{ik} x'_i y'_k$ è che i determinanti $|pa_{ik} + qb_{ik}|$, $|pa'_{ik} + qb'_{ik}|$ abbiano gli stessi divisori elementari. Ora il nostro teorema prova che questa condizione è soddisfatta ponendo $a'_{ik} = \beta_{ik}$ e $b'_{ik} = \alpha_{ik}$. Dunque:

COROLLARIO 1.° — Date due forme bilineari qualunque $P = \Sigma a_{ik} x_i y_k$, $Q = \Sigma b_{ik} x_i y_k$ e le loro forme reciproche $P' = \Sigma \alpha_{ik} x'_i y'_k$, $Q' = \Sigma \beta_{ik} x'_i y'_k$ si può sempre con una sostituzione lineare delle x_i nelle x'_i e un'altra delle y_i nelle y'_i trasformare P nella reciproca Q' di Q, e Q nella reciproca P' di P.

Supponiamo poi che le due coppie di forme che compaiono in quel teorema di WEIERSTRASS siano simmetriche. In tal caso questo scienziato ha dimostrato che, se esse soddisfanno alla condizione enunciata riguardante i divisori elementari, si potrà trasformare l'una coppia nell'altra con un'unica sostituzione, cioè legando le y_i alle y'_i e le x_i alle x'_i colle stesse relazioni lineari. Se dunque si suppone $y_i = x_i$, sarà pure $y'_i = x'_i$. Quindi nel caso nostro avremo:

COROLLARIO 2.° — Date due forme quadratiche qualunque $P = \Sigma a_{ik} x_i x_k$, $Q = \Sigma b_{ik} x_i x_k$ e le loro reciproche $P' = \Sigma \alpha_{ik} x'_i x'_k$, $Q' = \Sigma \beta_{ik} x'_i x'_k$, si può sempre con una stessa sostituzione lineare, nell'ipotesi che quelle forme non abbiano determinanti nulli, trasformare P in Q' e Q in P' (3).

---

(2) V. *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin., Mai 1868.

(3) Il prof. SIACCI ha anzi dimostrato (V. *Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date so-*

Il nostro corollario 2^0 stabilisce soltanto, tradotto geometricamente, che esistono in uno spazio a quante si vogliano dimensioni delle *correlazioni* che mutano l'una nell'altra due quadriche non degeneri date di quello spazio, qualunque sia la loro mutua posizione. Ma questa proposizione, che non crediamo sia stata dimostrata finora in modo generale e rigoroso, ha già molta importanza. Crediamo poi non sia difficile stabilire cogli stessi metodi che tra quelle correlazioni vi sono pure sempre delle *polarità* rispetto a quadriche, il che non ci pare sia stato finora rigorosamente dimostrato neppure per lo spazio ordinario.

Il teorema dimostrato e questi due corollari che ne abbiamo dedotto trovano immediatamente un'applicazione geometrica nello studio e nella classificazione delle omografie di due spazi lineari sovrapposti ad $n-1$ dimensioni e nello studio e classificazione del sistema formato da due quadriche in un tale spazio. In fatti da essi seguono proposizioni importanti che possiamo riassumere nel seguente enunciato (e delle quali abbiamo trattato più diffusamente in due lavori che verranno presto pubblicati [*]).

Qualunque siano le particolarità proiettive che presenta il sistema di due quadriche non degenerate, ovvero un'omografia non degenere, in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, quella coppia di quadriche, o quell'omografia, presen-

---

no polari reciproche, Atti Acc. Torino, VII, p. 758) che si può scegliere questa sostituzione lineare in guisa che il suo determinante sia simmetrico, cioè che essa coincida con una polarità rispetto ad una forma quadratica, sicchè traducendo geometricamente il suo risultato si potrebbe dire che esso prova che in uno spazio a quante si vogliano dimensioni esiste sempre almeno una quadrica rispetto a cui due quadriche date non degeneri sono polari reciproche. Però a quella dimostrazione si potrebbe forse muovere qualche appunto, poichè essa si basa sul confronto tra il numero delle indeterminate e il numero delle condizioni, metodo che si sa poter condurre ad errori se non è accompagnato da altre osservazioni (e lo stesso dicasi per la dimostrazione data dello stesso teorema nel vol. X, p. 307 di questo giornale). Notisi inoltre che il calcolo, che vien fatto in seguito in quella Memoria, dei coefficienti di quella forma quadratica si basa essenzialmente sull'ipotesi che il determinante del fascio delle due forme date abbia radici tutte distinte e quindi costituisce una dimostrazione della validità di quel teorema solo nel caso generale in cui questa condizione si verifica.

[*] V. questo volume, p. 304 e p. 334 [N.d.R.].

terà sempre nello stesso tempo le particolarità che a quelle corrispondono per dualità (4).

Torino, 17 Ottobre 1883.

---

(4) Per lo spazio ordinario il fatto che ogni posizione particolare di due quadriche coincide colla sua correlativa (scambiando tra loro le due quadriche) fu già dimostrato e press'a poco nello stesso modo, cioè colla considerazione dei determinanti del fascio e della schiera determinati da quelle due quadriche, dal sig. LÜROTH nell'ultimo paragrafo della sua Memoria « *Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung* », (Zeitschrift Math. u. Ph., 13, 1868, pp. 404-413).