Corrado Segre

Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2° dégré double

Math. Annalen, Vol. **23** (1884), p. 235–243

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 218–228

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_218>

XLIV.

NOTE SUR LEX COMPLEXES QUADRATIQUES DONT LA SURFACE SINGULIÈRE EST UNE SURFACE DU 2e DEGRÉ DOUBLE

« Mathematische Annalen », Band XXIII, 1884, pp. 235-243.

Chaque complexe du 2e degré Q^2 de ceux dont nous voulons nous occuper ici brièvement jouit de la propriété caractéristique d'avoir pour droites doubles toutes les *génératrices* (d'un même système) d'une surface du 2e degré S^2, laquelle, comptée deux fois, forme en conséquence sa surface singulière. Considérons l'une quelconque r des *directrices* (c'est-à-dire des génératrices de l'autre système) de S^2. Le cône du complexe Q^2, qui appartient à un point quelconque P de r, se décompose en deux plans qui se coupent dans la génératrice de S^2 passant par P (puisque cette génératrice est une droite double du complexe) et qui par conséquent coupent encore S^2 suivant deux directrices r', r'': or il est facile de voir que toutes les droites qui coupent r et r', ou bien r et r'', appartiennent à Q^2; car si, par exemple, l'on cherche les deux plans (tangents à S^2) qui relativement à ce complexe correspondent à un point quelconque de r' on voit que l'un d'entr'eux, devant passer par P, contiendra aussi toute la directrice r. De là il s'ensuit que le complexe Q^2 contient une ∞^1 de congruences linéaires: chaque directrice r de S^2 est une directrice de deux diverses congruences contenues dans Q^2, de sorte qu'il lui correspond deux autres directrices r', r'' de S^2. Deux congruences linéaires quelconques dont les deux couples de directrices soient des directrices de S^2 appartiennent toujours à un complexe linéaire bien défini du *réseau* des complexes linéaires qui contiennent toutes les génératrices de S^2. En conséquence, si l'on prend deux quelconques de ces congruences linéaires contenues dans Q^2 et qu'on les joigne successivement par des complexes linéaires à toutes les autres, l'on obtiendra deux faisceaux projectifs de complexes linéaires de ce réseau. Viceversa on voit sans difficulté que le complexe du 2^e degré lieu des intersections des éléments correspondants de deux faisceaux projectifs de complexes linéaires (complexe qui a en général pour droites doubles seulement les deux droites communes à ces deux faisceaux) aura toutes les génératrices d'un même système d'une surface du 2^e degré pour droites doubles, lorsque ces deux faisceaux de complexes appartiendront à un même réseau (et contiendront en conséquence toutes ces génératrices).

On peut trouver de la manière suivante les droites singulières du complexe Q^2. Avant tout notons que la droite singulière qui correspond à un point (ou plan) singulier quelconque, c'est-à-dire à un point quelconque P de S^2, est une droite double du complexe, c'est-à-dire la génératrice de S^2 passant par P. S'il y avait aussi une autre droite singulière correspondant à P, il faudrait que les deux plans, dans lesquels se décompose le cône de Q^2 qui appartient à P, se coupassent soit dans cette droite, soit dans la génératrice qui passe par P, c'est-à-dire que ces deux plans coïncidassent, ou que le point P fût un point *double* pour le complexe Q^2. Dans ce cas il arrive que les deux directrices r', r'', qui correspondent de la manière vue à la directrice r passant par P, viennent coïncider entr'elles. Or lorsqu'on prend arbitrairement sur S^2 la directrice r', il y a deux directrices r qui lui correspondent et en conséquence aussi deux directrices r''; de sorte qu'entre r', r'' qui correspondent à la même directrice r il y a une correspondance (2, 2) (sur une forme géométrique rationnelle). Il y a donc en général 4 droites r, que nous nommerons r_1, r_2, r_3, r_4, pour chacune desquelles les deux directrices correspondantes r', r'' coïncident, respectivement dans les directrices r_1', r_2', r_3', r_4'. Cette construction de ces deux quaternes de directrices est corrélative à elle-même. Donc il s'ensuit de ce que nous avions dit et de cette observation que:

Les points doubles et les plans doubles du complexe Q^2 sont les points et les plans de quatre directrices r_1, r_2, r_3, r_4. Les droites singulières de ce complexe forment quatre congruences linéaires, dont les couples de directrices sont $r_1, r_1'; r_2, r_2'; r_3, r_3'; r_4, r_4'$. À chaque droite singulière de la congruence i^{me} appartiennent comme point et plan singuliers correspondants le point et le plan qu'elle a communs avec r_i, c'est-à-dire un point et un plan doubles du complexe (1).

On peut étudier avec avantage les complexes Q^2, dont la surface singulière est une surface S^2 du 2e degré comptée deux fois,

---

(1) M. Weiler dans sa classification des complexes du 2e degré (*Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*, Math. Ann., VII, pp. 145-207) n'a pas aperçu le vrai rôle que jouent, parmi les 8 directrices des 4 congruences linéaires des droites singulières d'un complexe quelconque de ceux que nous considérons ici, les 4 que nous avons nommées r_1, r_2, r_3, r_4. Effectivement il dit pour le cas général [(1 1 1) 1 1 1] (p. 159) et le répète ensuite pour les cas particuliers [(2 1 1) 1 1] (p. 175), [(1 1 1) 2 1] (p. 177), etc., que 4 de ces 8 directrices sont remplies des points singuliers et les autres 4 des plans singuliers, qui correspondent aux droites singulières du complexe; tandis que nous voyons que les 4 mêmes directrices contiennent tous ces points et ces plans singuliers. Il faut en conséquence rectifier quelque construction inexacte que M. Weiler déduit de ce rôle dualistique qu'il suppose être joué par les deux quaternes de directrices. — Nous ajouterons que les coordonnées de ces directrices dans le cas [(1 1 1) 1 1 1], en supposant avec M. Weiler que l'équation de condition pour les droites et l'équation du complexe soient:

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0,$$

sont: pour les directrices r_i:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)}, \quad x_5 = \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)}, \quad x_6 = \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)},$$

et pour les directrices r'_i correspondantes:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)(\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6)}, \quad x_5 = \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_4)},$$
$$x_6 = \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_4 - \lambda_5)}.$$

M. Weiler donne les coordonnées des directrices des congruences de droites singulières seulement dans le cas [(2 1 1) 1 1] (V. p. 175), mais ses expressions ne sont pas exactes et il faut les corriger comme il suit: en supposant avec lui que l'équation du complexe en coordonnées plückeriennes soit:

$$\lambda_1(p_{12} + p_{34})^2 - \lambda_2(p_{12} - p_{34})^2 + p_{14}^2 = 0$$

les coordonnées d'une directrice r_i seront:

$$\left.\begin{matrix} p_{12} \\ p_{34} \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \left.\begin{matrix} p_{34} \\ p_{12} \end{matrix}\right\} = 0, \quad p_{13} = p_{42} = p_{14} = 0, \quad p_{23} = \lambda_2 - \lambda_1$$

et celles de la directrice r'_i correspondante seront:

$$\left.\begin{matrix} p_{34} \\ p_{12} \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \left.\begin{matrix} p_{12} \\ p_{34} \end{matrix}\right\} = 0, \quad p_{13} = p_{42} = p_{14} = 0, \quad p_{23} = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Ces expressions et celles que nous avons données pour le cas [(1 1 1) 1 1 1] peuau moyen d'une représentation. On sait, en effet, que l'on peut représenter le réseau des ∞^2 complexes linéaires contenant les génératrices de S^2 sur les droites d'un plan π, de sorte qu'à un faisceau de ces complexes corresponde un faisceau de ces droites. Alors aux points de π correspondront univoquement les faisceaux contenus dans ce réseau de complexes, ou bien les congruences qui en sont les soutiens et qui sont des congruences linéaires quelconques ayant pour directrices deux directrices de S^2. Nous les appellerons simplement les congruences du réseau. Comme parmi les complexes d'un faisceau il y en a en général deux spéciaux, il s'ensuit que

---

vent servir à vérifier analytiquement les résultats que nous obtenons ci-dessus.

Peut-être ne sera-t-il pas inutile que nous notions ici quelques autres inexactitudes, que nous avons rencontrées dans le Mémoire de M. WEILER. À propos des complexes de la classe [(1 1) (1 1) 1 1] il dit (p. 162) que par une droite quelconque il en passe 4 ayant une même surface singulière (couple de surfaces du 2e degré); car, dit-il, dans un plan qui passe par cette droite il y a 4 coniques tangentes à celle-ci et doublement tangentes aux deux coniques d'intersection avec la surface singulière; or on sait qu'au contraire les coniques satisfaisant à ces conditions forment 3 couples bien distinctes et on voit facilement que seulement celles d'un couple peuvent appartenir à un complexe ayant cette surface singulière: par une droite quelconque passent donc seulement *deux* de ces complexes. — À propos du complexe [(4 2)] il n'est pas exact de dire (p. 198) que la surface singulière suffit à en déterminer les coniques appartenant aux divers plans de l'espace: pour cette détermination il faut encore donner p. e. la congruence des droites singulières. — Le complexe de la classe [(3 3)] peut être considéré comme une particularisation du complexe tétraédral: il est donc étrange que M. WEILER (p. 200) parle de deux congruences linéaires, aux directrices infiniment voisines, de droites singulières de ce complexe et s'en serve pour la construction de celui-ci: on doit dire au contraire que les droites singulières sont les droites des deux plans et des deux points qui composent la surface singulière, en comptant trois fois celles qui appartiennent au plan et au point triples. — Pour les complexes [(2 1 1) 2] la congruence des droites singulières se décompose (comme l'on pourra du reste vérifier par les méthodes que nous exposerons ci-dessous) en un point et un plan doubles et en outre en deux congruences linéaires qui sont tout-à-fait générales, et non pas spéciales, comme dit M. WEILER (p. 187). — Il n'est pas vrai que les deux complexes linéaires auxquels appartiennent les deux congruences quadratiques des droites singulières du complexe [(2 2) 1 1] (p. 185) soient en général en involution. — On retrouve la même inexactitude à propos du complexe [(3 2) 1] (p. 192) que l'on peut d'ailleurs considérer comme un cas particulier du précédent. — Nous ne notons pas les inexactitudes relatives aux cas [(2 2) 2], [(1 1) (1 1) 2] et [(3 1) (1 1)], car elles ont déjà été corrigées par M. HIRST (V. Proc. Lond. math. soc., X, ou bien Coll. math. in mem. CHELINI, p. 51 et suiv.).

dans le plan π parmi les droites d'un faisceau il y en a en général deux qui correspondent à des complexes linéaires spéciaux du réseau: donc les droites de π qui correspondent à des complexes linéaires spéciaux, c'est-à-dire aux directrices de S^2, enveloppent une courbe de la 2e classe γ^2. Les points de γ^2 correspondent aux congruences linéaires spéciales du réseau, c'est-à-dire aux congruences dont les directrices coïncident (ces directrices correspondant aux tangentes de γ^2 en ces points). Comme chaque droite de π contient en général deux points de γ^2, chaque complexe du réseau contient (parmi les ∞^1 congruences du réseau qui lui appartiennent et dont les couples de directrices forment une involution) deux congruences spéciales du réseau, dont les directrices sont les éléments doubles de cette involution.

Maintenant si nous considérons le complexe quadratique Q^2 et les ∞^1 congruences linéaires (du réseau) que nous avons vu lui appartenir, il est clair qu'à celles-ci correspondent dans π les points d'une courbe du 2e ordre c^2, car sur une droite quelconque de π il y a deux de ces points, puisque dans un complexe linéaire quelconque du réseau il y a deux de ces congruences. Vice-versa à chaque courbe du 2e ordre c^2 de π correspond un complexe quadratique Q^2 ayant les génératrices de S^2 pour droites doubles. Les ∞^1 droites tangentes à cette conique c^2 correspondent à ∞^1 complexes linéaires du réseau, chacun desquels jouit de la propriété d'être tangent au complexe Q^2 selon toutes les droites d'une congruence linéaire du réseau. Si par un point quelconque de c^2 l'on mène les deux tangentes à γ^2, la congruence linéaire correspondante qui appartient à Q^2 aura pour directrices les directrices de S^2 qui correspondent à ces tangentes. Et si par les deux points où une tangente quelconque t de γ^2 coupe c^2 l'on mène les deux autres tangentes t' et t'' à γ^2, les directrices r, r', r'' qui correspondent à t, t', t'' auront entr'elles cette relation que rr' et rr'' seront deux couples des directrices de congruences contenues dans Q^2. Il s'ensuit immédiatement que, comme nous avions déjà trouvé, il y a 4 droites r (r_1, r_2, r_3, r_4) telles que les droites r', r'', qui leur correspondent, viennent coïncider (respectivement en r'_1, r'_2, r'_3, r'_4): les tangentes correspondantes t de γ^2 seront les 4 tangentes communes t_1, t_2, t_3, t_4 aux coniques c^2 et γ^2, tandis que t' et t'' viendront coïncider respectivement dans les autres tangentes t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 de γ^2 qui passent par les points de contact de celles-là avec c^2.

Toutes les propriétés projectives des ∞^5 courbes du second ordre c^2 du plan π, soit entr'elles, soit relativement à la courbe γ^2, se traduisent immédiatement par cette représentation en des propriétés projectives des ∞^5 complexes quadratiques Q^2 ayant le même système de génératrices de S^2 pour droites doubles. Ainsi les propriétés des faisceaux et en général des séries quelconques de ces courbes donneront celles des faisceaux et des séries correspondantes de ces complexes. Comme relativement à une conique c^2 et à γ^2 il y a en général trois droites ayant le même pôle, on conclut que dans le réseau il y a en général trois complexes linéaires en involution, qui sont fondamentaux pour le complexe Q^2, c'est-à-dire tels que relativement à chacun d'eux celui-ci correspond à soi-même: on voit en outre de cette manière que relativement à chacun de ces trois complexes linéaires les 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4 (comme aussi les 4 autres r_1', r_2', r_3', r_4') se correspondent entr'elles deux-à-deux. Si dans le plan π l'on prend la conique γ^2 comme *absolu* d'une métrique, on voit bien que, dans un certain sens, la géométrie métrique des coniques dans le plan π et la géométrie projective des complexes quadratiques considérés sont identiques, c'est-à-dire:

La géométrie projective des complexes quadratiques, qui ont les genératrices d'un même système d'une surface du 2^e^ *degré pour droites doubles, est identique à la géométrie métrique (non-euclidienne en général) des coniques dans un plan.*

Considérons maintenant dans le plan π la série des courbes du second ordre c^2 qui ont communes les 4 tangentes t_1, t_2, t_3, t_4 avec la courbe γ^2: on peut l'appeler (en considérant γ^2 comme absolu) une *série homofocale* de coniques. Les complexes quadratiques Q^2 qui correspondent à ces coniques formeront aussi une série de ∞^1 complexes dont les propriétés se déduiront de celles de la série homofocale de coniques. Avant tout l'on voit que la propriété qui les définit est celle d'avoir communes les 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4 qui sont le lieu des points doubles et l'enveloppe des plans doubles de chacun d'eux. Les trois complexes fondamentaux du réseau sont les mêmes pour tous ces complexes quadratiques. Puis comme une droite quelconque de π est touchée par une seule conique de la série, tandis que par chaque point il en passe en général deux, dont les tangentes en ce point sont conjuguées par rapport à γ^2, nous pouvons conclure que chaque complexe linéaire du réseau est tangent le long d'une congruence linéaire à un seul complexe quadratique de la série, tandis que par chaque droite de l'espace (et en conséquence aussi par la congruence du réseau, qui passe par elle) passent en général deux complexes quadratiques de la série et qu'en outre les deux complexes linéaires du réseau qui touchent ceux-ci dans cette droite (et par conséquent dans cette congruence) sont en involution. Etc. etc. — Ces propriétés montrent que la série considérée de complexes quadratiques est un cas particulier de la série homofocale des complexes quadratiques généraux, qui ont pour surface singulière la même surface de KUMMER ; on peut donc l'appeler aussi une *série homofocale* et l'on voit qu'elle est représentée par une série homofocale de coniques [2].

On peut aussi trouver de cette manière les invariants absolus des complexes Q^2. Une série homofocale de ces complexes aura un seul invariant absolu : le rapport anharmonique des 4 directrices r_1, r_2, r_3, r_4 ; tandis que l'un quelconque de ces complexes aura aussi un autre invariant absolu, c'est-à-dire p. e. l'un des rapports anharmoniques que trois de ces directrices déterminent avec les directrices r'_1, r'_2, r'_3, r'_4. Il faut noter à ce propos que pour les différents complexes Q^2 de la même série homofocale ces quaternes de directrices varient de l'un à l'autre et forment une involution du 4e degré, à laquelle appartient aussi le quaterne fixe $r_1 r_2 r_3 r_4$, et qui se compose des quaternes ayant un même covariant sextique, représenté par les trois couples de directrices des congruences déterminées par les trois complexes fondamentaux du réseau deux-à-deux.

Nous noterons enfin que toutes les particularités que peut présenter le complexe Q^2, que nous avons considéré, peuvent être obtenues en considérant les particularités du couple de coniques c^2 et γ^2, dont c^2 ne peut pas se décomposer en deux droites sans que le complexe Q^2 se décompose en deux complexes linéaires. On obtient facilement les résultats suivants.

En supposant auparavant que la courbe de la 2e classe γ^2 (et par conséquent aussi la surface S^2) ne se décompose pas, l'on a ces cas-ci : Si la courbe du second ordre c^2 a la position la plus générale relativement à γ^2, alors Q^2 est le complexe le plus général de l'espèce considérée, c'est-à-dire il a la caractéristique $[(1\,1\,1)\,1\,1\,1]$. Si au contraire c^2 a un contact du premier, ou du second, ou du troisième ordre avec γ^2, le complexe Q^2 présente respectivement les

[2] C'est cette série de complexes qui, pour les classes de complexes quadratiques dont nous nous occupons ici, remplace l' « Involutionssystem » de M. KLEIN (*Liniengeometrie und metrische Geometrie,* Math. Ann., V) ; car la définition que ce savant donne pour ce système n'est plus applicable immédiatement pour ces complexes. Effectivement ils jouissent de la propriété que leurs « Hauptflächen » sont indéterminées (précisément comme les lignes de courbure d'une sphère).

cas [(1 1 1) 2 1], [(1 1 1) 3], [(1 1 1) (2 1)]. Si c^2 est doublement tangente à γ^2, Q^2 appartient à la classe [(1 1 1) (1 1) 1]. Enfin si c^2 coïncide avec γ^2, Q^2 est le complexe [(1 1 1) (1 1 1)] des droites tangentes à une surface S^2 du 2e degré.

Si la courbe γ^2 se décompose en deux points, la surface singulière S^2 se décompose en deux plans et deux points de leur intersection. Si c^2 a une position générale relativement à ce couple γ^2 de points, Q^2 est un complexe de la classe [(2 1 1) 1 1]. Si c^2 passe par l'un de ces points ou par tous les deux, Q^2 sera de la classe [(2 1 1) 2] ou [(2 1 1) (1 1)]. Si c^2 touche en un point quelconque la droite qui joint ces deux points, ou si elle la touche en l'un de ceux-ci, le complexe Q^2 sera respectivement de la classe [(3 1 1) 1] ou [(4 1 1)].

Enfin si les deux points dans lesquels se décompose γ^2 viennent coïncider, la surface S^2 se réduira à un plan quadruple (comme partie de la surface singulière) avec l'un de ses points compté aussi 4 fois. Si c^2 ne passe pas par le point γ^2, le complexe Q^2 est de la classe [(2 2 1) 1]; si au contraire c^2 passe par ce point, Q^2 est de la classe [(3 2 1)].

On voit donc que la représentation, dont nous nous sommes servis, peut être employée à donner immédiatement toutes les propriétés qui distinguent entr'elles les diverses classes de complexes que nous avons considérées; par exemple, elle donne non seulement les particularités de la surface singulière (qui ne suffiraient pas à distinguer ces classes entr'elles) mais aussi celles des congruences des droites singulières et celles des directrices auxquelles appartiennent les points et les plans doubles du complexe [3].

---

[3] On peut dans la représentation sur le plan π échanger entr'eux les mots *point* et *droite*, de sorte que les points et les droites de π correspondront respectivement aux complexes et aux congruences linéaires du réseau. Cette correspondance peut être établie en faisant correspondre à chaque complexe du réseau le point qui, relativement à lui, correspond à π; alors à chaque congruence du réseau correspondra la droite de π qui lui appartient. La courbe γ^2 deviendra l'intersection de π avec S^2, et les coniques c^2 correspondantes aux complexes quadratiques Q^2 seront les coniques mêmes de ces complexes. Pour chaque complexe Q^2 sa conique c^2 coupera γ^2 dans les 4 points d'intersection de π avec r_1, r_2, r_3, r_4. Et pour chaque classe particulière de ces complexes la position particulière de c^2 relativement à γ^2, c'est-à-dire des coniques et des cônes du complexe relativement à sa surface singulière S^2, se déduira immédiatement de ce que nous avons exposé.

Une représentation tout-à-fait analogue des complexes linéaires d'un système linéaire triplement infini dans les plans de l'espace ordinaire, et par conséquent des congruences et des surfaces réglées (Regelschaaren) d'intersection de ces complexes dans les droites et les points du même espace, peut servir de la même manière à l'étude et à la classification de tous les complexes du 2^e degré dont la surface singulière est une surface réglée (du 4^e degré) quelconque. Alors les complexes linéaires spéciaux du système, c'est-à-dire les droites de la congruence linéaire qui est en involution avec celui-ci, seront représentés par les plans d'une surface de la 2^e classe γ^2 (laquelle se réduira à une conique, ou à un couple de points, ou à deux points coïncidants, si cette congruence linéaire a les directrices coïncidantes, ou formant un faisceau, ou formant toutes les droites d'un plan ou d'un point). Un complexe quelconque du 2^e degré Q^2 dont la surface singulière soit réglée et appartienne à cette congruence linéaire sera représenté par une surface du 2^e ordre c^2 de l'espace ordinaire, et les particularités que présente le système des deux surfaces c^2 et γ^2 correspondront à celles du complexe Q^2. (Si c^2 est un cône, Q^2 aura pour surface singulière une surface du 2^e degré double, de sorte qu'on rentre dans la catégorie de complexes déjà étudiée). Les génératrices de la surface singulière de Q^2 seront représentées par les plans tangents communs à c^2 et γ^2. A chacune d'elles r en correspondront deux autres r', r'' de façon que les congruences linéaires, dont les directrices sont rr' et rr'', appartiendront au complexe: les plans t, t', t'', qui leur correspondent respectivement, seront tangents à c^2 et γ^2, et en outre t, t' et t, t'' se couperont mutuellement dans deux droites appartenant à c^2. Cette relation entre ces trois plans permettra de voir très-simplement les particularités que peuvent présenter les congruences linéaires contenues dans Q^2. La surface développable enveloppée par les plans tangents communs à c^2 et γ^2 correspondra au complexe des droites tangentes de la surface singulière de Q^2; et en particulier la courbe du 4^e ordre de contact de cette développable avec c^2 correspondra à la congruence des droites singulières de Q^2 [4]. À toute la *série*

---

[4] Aux particularités que présente cette courbe du 4^e ordre suivant la position mutuelle de c^2 et γ^2 correspondront très simplement celles que présente la congruence des droites singulières suivant la classe du complexe Q^2 considéré. Nous sortirions hors des limites d'une simple Note si nous développions ici cette méthode: qu'il nous suffise de dire que toutes les principales questions qui re-

homofocale des surfaces c^2 du second ordre inscrites dans cette développable correspondra la *série homofocale* des complexes du 2e degré Q^2 qui ont la même surface réglée pour surface singulière. Comme par chaque point passent en général trois de ces surfaces homofocales, lesquelles se coupent *orthogonalement*, de même par chaque droite de l'espace passent en général trois des complexes quadratiques de cette série et leurs complexes linéaires tangents en involution avec la congruence linéaire qui contient la surface singulière sont entr'eux deux-à-deux en involution. Aux invariants absolus de l'une série (avec γ^2 pour élément fixe) correspondront ceux de l'autre série ; etc. etc. On peut résumer toutes ces relations avec cette proposition, qu'il faut entendre convenablement : *La géométrie projective des complexes quadratiques dont les surfaces singulières sont des surfaces réglées appartenant à une congruence linéaire fixe est identique à la géométrie métrique (non-euclidienne en général) des surfaces du second ordre de l'espace à trois dimensions* (5).

Torin, le 22 Septembre 1883.

---

gardent les propriétés et la classification des complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface réglée peuvent être ainsi résolues avec la plus grande facilité. (Voir notre thèse, qui sera bientôt présentée à l'Académie des Sciences de Turin, pour la publication dans ses Mémoires [V. questo volume pp. 127-217]). Ces complexes ont été récemment étudiés par M. WEILER dans un Mémoire (*Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen,* Zeitschrift für Math. u. Ph., 27, pp. 257-288) où il traite analytiquement pour chaque classe de ces complexes la question de leur génération par des faisceaux projectifs de complexes linéaires (question que l'on peut immédiatement résoudre par notre méthode, sans aucun calcul). Dans ce Mémoire il remarque à propos du cas [(1 1 1) 1 1 1] (p. 262) que, si r et r' sont les directrices d'une de ses 4 congruences de droites singulières, les deux congruences de droites du complexe, qui ont une certaine d'entr'elles pour une directrice, coïncident ; cependant il ne parait pas qu'il se soit aperçu qu'en conséquence ces deux droites r et r' ne jouent pas un rôle dualistique pour le complexe.

(5) Les représentations dont nous nous sommes servis ont été introduites dans la géométrie de la droite par M. PASCH (*Zur Theorie der linearen Complexe,* Crelle's J., 75). Si l'on considère la géométrie de la droite comme M. KLEIN a montré à le faire (voir spécialement le Mémoire « *Liniengeometrie und metrische Geometrie* » déjà cité), c'est-à-dire comme la géométrie sur une surface du 2e degré $M_4^{(2)}$ dans l'espace linéaire à 5 dimensions R_5, on voit que ces représentations peuvent être considérées comme des projections faites dans cet espace par une $M_2^{(1)}$ ou $M_1^{(1)}$ sur une $M_2^{(1)}$ (c'est-

à-dire un plan) ou respectivement une $M_3^{(1)}$ (c'est-à-dire un espace ordinaire), et qu'on pourrait très bien les éviter sans faire des changements essentiels aux raisonnements, en employant les considérations directes de ces espaces à plusieurs dimensions. Ajoutons que les rapprochements auxquels elles nous ont conduit avec la géométrie métrique du plan et de l'espace ont une relation étroite avec les idées générales que M. Klein a développées particulièrement dans le Mémoire cité.