

CORRADO SEGRE

CORRADO SEGRE

Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche

Mem. R. Acc. Scienze Torino, Vol. **36** (1883), p. 87–157

in: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 127–217

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_127>

XLIII.

SULLA GEOMETRIA DELLA RETTA E DELLE SUE SERIE QUADRATICHE ⁽¹⁾

« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino »,
Serie II, Tomo XXXVI, 1883, pp. 87-157.

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie
auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5 .

(KLEIN — Ueber Liniengeometrie und me-
trische Geometrie — Math. Ann., V, S. 261).

§ 1.

Generalità sulla geometria della retta.

104. Dicesi *retta* l'elemento di una quadrica non specializzata a 4 dimensioni ⁽²⁾. Una tal quadrica R è sempre contenuta, come sappiamo, in uno spazio lineare a 5 dimensioni S , il cui elemento

⁽¹⁾ Questa Memoria costituiva la 3^a parte della nostra dissertazione di laurea, di cui le due prime parti riguardanti la geometria delle quadriche in uno spazio lineare ad n dimensioni formano una prima Memoria intitolata: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, la quale è pure stampata (prima di questa) nelle *Memorie* di quest'Accademia [queste Opere, p. 25]. Siccome in questa seconda Memoria si fa continuo uso dei risultati della prima, abbiamo creduto bene lasciarvi inalterato l'ordine dei vari numeri: ordine che fa seguito a quello dei numeri della prima. Per un riassunto poi del contenuto di questa 2^a Memoria si legga la prefazione della 1^a. (Marzo 1884).

⁽²⁾ Questa definizione è la più conveniente per uno studio della geometria della retta indipendente da quella del punto e del piano; essa permette, come vedremo, di giungere a questi nel modo più naturale da quel punto di vista. Essa ha anche il vantaggio che, con soli mutamenti di parole, la geometria che fondiamo su questa definizione darà la geometria di qualunque spazio quadratico a 4 dimensioni, in cui l'elemento sia diverso dalla retta ordinaria.

Ho poi preferito ritenere l'elemento dello spazio lineare a 5 dimensioni in cui sta la quadrica di rette come assolutamente incognito (rispetto alle rette), anzi che dire, come talvolta si fa, che quell'elemento è il complesso lineare di rette, il quale diventa *speciale* quando sta su quella quadrica. Non vi è differenza sostanziale tra i due concetti; ma il primo mi sembra più conveniente.

a noi non interessa se non è contenuto nella quadrica R . Per non avere ambiguità con ciò che diremo in seguito noi non chiameremo più *punto* l'elemento di S , nè *piano* ogni spazio lineare a 4 dimensioni contenuto in S , ma li indicheremo rispettivamente col nome generico di *elemento* (S'_0), e colla notazione S'_4 . Ed in generale la lettera S accompagnata da indici secondo il solito metodo rappresenterà uno spazio qualunque contenuto in S , mentre quegli spazi speciali che sono contenuti nella quadrica R , cioè che sono tutti composti di rette, s'indicheranno spesso colla lettera R accompagnata da indici.

105. La prima domanda importante che si presenta per lo studio delle rette come elementi della quadrica R è se vi siano in questa spazi lineari ed in qual numero. Ora dai risultati generali ottenuti nella Parte 1^a del presente lavoro, nei quali si ponga $n = 6$, si vede (V. n° 30) che in R vi sono ∞^5 spazi lineari semplicemente infiniti R'_1 , i quali noi diremo *fasci di rette*, sì che per ogni retta passano ∞^2 fasci; e inoltre vi sono ∞^3 spazi lineari doppiamente infiniti R'_2 tali che ogni fascio R'_1 è contenuto in due di essi, ed ogni elemento di R , cioè ogni retta, in ∞^1 di essi. Nè vi sono in R sistemi lineari di numero di dimensioni maggiore di due. Risulta inoltre da quella teoria generale che questi spazi lineari a 2 dimensioni formano due sistemi ben distinti: chiameremo *punti* (di rette) quelli dell'un sistema, e *piani* (di rette) quelli dell'altro sistema. La quadrica R , di cui si tratta, ha per numero di dimensioni (4) un multiplo di 4, e quindi (V. n° 40) due R'_2 in generale hanno un elemento comune soltanto se sono dello stesso sistema. Dunque:

Due punti hanno sempre comune una retta. Due piani hanno sempre comune una retta. Un punto ed un piano non hanno in generale comune alcuna retta.

Per ogni retta passa un numero semplicemente infinito di punti e di piani.

Converremo di dire che due rette *si tagliano* (od anche che *si appoggiano* l'una sull'altra) quando appartengono ad uno stesso fascio R'_1 . Allora dalle cose dette in generale ai n° 29, 30, segue:

Due rette qualunque non si tagliano in generale. Se due rette si tagliano, esse individuano un fascio nel quale sono contenute, e questo fascio a sua volta è contenuto in un punto di rette ed in un piano di rette perfettamente individuati, cosicchè ogni retta che tagli le prime

due è contenuta o in questo piano od in quel punto ⁽³⁾, vale a dire: *tre rette che si tagliano o stanno in un piano o stanno in un punto.*

Come si vede, benchè in generale un punto ed un piano non abbiano rette comuni, pure, per eccezione, possono averne comune un fascio. In tal caso diremo che il punto ed il piano sono *uniti*. Ciò posto si ha il seguente teorema:

Tre punti sono in generale uniti ad un piano e tre piani uniti ad un punto. In fatti consideriamo tre punti qualunque: avranno comuni in generale a due a due tre rette distinte, le quali si taglieranno mutuamente (quelle che stanno in uno stesso punto), determinando a due a due dei fasci di rette contenuti rispettivamente in quei punti: ora ciascuno di questi fasci è pur contenuto in un piano, il quale coinciderà con quel piano che è individuato dal contenere quelle tre rette, e sarà unito ai tre punti, come si voleva dimostrare. — Analogamente scambiando le parole *punto* e *piano*.

Questo ragionamento mostra però come possa accadere che non sia individuato il piano unito ai tre punti (od il punto unito a tre piani), e precisamente che ciò accade sempre quando questi tre punti hanno comune una retta, nel qual caso ogni piano passante per questa è unito ai tre punti, anzi a tutti gli altri punti che passano per la retta. Insomma gli ∞^1 punti, e gli ∞^1 piani, i quali passano per una data retta sono tra loro uniti, ed hanno comuni gli ∞^2 fasci di rette, che vedemmo passare per la retta data.

106. Le cose viste al n° precedente mostrano come la geometria della retta conduce in un modo naturalissimo alla considerazione del punto e del piano, alle relazioni che passano tra punti, piani e rette, ed alla dualità perfetta che passa tra punti e piani. Questa dualità si basa ora sul fatto che gli ∞^3 punti e gli ∞^3 piani costituiscono i due sistemi distinti di spazi lineari doppiamente infiniti di rette, che solo esistono. Ora, come nella quadrica ordinaria i 2 sistemi di generatrici hanno proprietà identiche, così nella R , spazio di rette, quei due sistemi di spazi lineari doppiamente infiniti si equivalgono perfettamente, sicchè ogni proposizione, che vale per l'uno, vale pure per l'altro. Donde precisamente la dualità tra le

(3) Mi permetto di dire, che una retta è *contenuta* in un punto, e che un punto *passa* per una retta, quando nel linguaggio ordinario si usano al contrario le parole *passare* e *contenere*; ma, così facendo, risalta meglio la dualità perfetta tra punto e piano, che nella nomenclatura della geometria ordinaria è affatto trascurata.

proposizioni che riguardano i punti e quelle che riguardano i piani.

107. Da quel modo di concepire i punti ed i piani segue anche immediatamente una proposizione importante per tutta la geometria pura della retta. Consideriamo una trasformazione proiettiva qualunque dello spazio S a 5 dimensioni: essa trasformerà pure ogni spazio lineare di questo in altro tale spazio lineare. Dunque, se essa è tale che la quadrica R a 4 dimensioni si trasformi in se stessa, gli spazi lineari a 2 dimensioni che essa contiene si trasformeranno pure in spazi lineari a 2 dimensioni contenuti in essa, e la trasformazione proiettiva o sarà tale che ognuno dei due sistemi di tali spazi contenuti in R si trasformi in se stesso, oppure tale che ciascuno di essi si trasformi nell'altro. Però in entrambi i casi due tali R'_2 di diverso sistema i quali siano uniti, cioè abbiano comune un R'_1 , conserveranno la stessa proprietà dopo la trasformazione. Dunque si ottengono in tal modo due specie di trasformazioni per lo spazio (ordinario) di punti e piani: entrambe sono univoche, ma l'una trasforma i punti in punti, i piani in piani, un punto ed un piano uniti in un punto ed un piano uniti; mentre l'altra trasforma i punti in piani, i piani in punti, un punto ed un piano uniti in un piano ed un punto uniti. Ora questi caratteri mostrano che nello spazio ordinario la prima di queste è una *collineazione* od *omografia*, l'altra una *reciprocità*. Dunque: *Ogni trasformazione proiettiva dello spazio S a 5 dimensioni tale che la quadrica R a 4 dimensioni si trasformi in se stessa è per lo spazio ordinario una collineazione ovvero una reciprocità. E viceversa.* — Questo teorema è dovuto al KLEIN ⁽⁴⁾.

108. Per gli spazi contenuti nella quadrica R a 4 dimensioni si usano le seguenti denominazioni: quelli a tre dimensioni R_3 si dicono *complessi* di rette, quelli a due dimensioni R_2 *sistemi* di rette, quelli ad una dimensione R_1 *rigate*. In virtù di un teorema del KLEIN enunciato nella nota al n° 39, ogni complesso algebrico di rette è determinato come intersezione di R con un altro spazio algebrico, pure a 4 dimensioni, di S : l'ordine di questo spazio algebrico

(4) Lo enunciò nella Memoria « *Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen* » del 4° vol. dei Math. Ann., p. 356, e lo dimostrò poi nella bellissima Memoria « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* » del 5° vol. dei Math. Ann., p. 262.

si suol chiamare *grado* del complesso (benchè la denominazione sia impropria, perocchè è chiaro che appunto il doppio di quel numero dovrebbe dirsi *grado* di quell'intersezione; tuttavia quel teorema di KLEIN dà un carattere di opportunità a quella denominazione). Di qui segue che ogni fascio di rette contiene tante rette di un complesso algebrico quante sono le unità contenute nel grado di questo.

Per un sistema algebrico di rette R_2 bisogna dare, come si è visto più in generale per le quadriche a numero pari di dimensioni (V. n° 41), due numeri diversi: il numero cioè degli elementi (rette) che esso ha comuni con ogni piano, il qual numero dicesi *classe* del sistema, ed il numero degli elementi che esso ha comuni con ogni punto cioè *l'ordine* del sistema. Un sistema di rette d'ordine μ e classe ν s'indica più brevemente con $(\mu \nu)$.

Due complessi di gradi m, m' hanno comune un sistema di rette di ordine e classe uguali ad mm' ; questo sistema dicesi *congruenza di grado* mm' .

Dicesi *grado* di una rigata R_1 il suo ordine come spazio algebrico ad 1 dimensione di S . Vedremo che ciò equivale a dire che il grado è il numero di quelle rette contenute nella rigata (cioè *generatrici* di questa), le quali tagliano una retta qualunque. Un punto ed un piano qualunque non contengono in generale alcuna retta di una data rigata. I punti ed i piani che contengono rette della rigata sono ∞^2 e diconsi punti e piani di questa; sicchè essa, mentre avendo riguardo alle sue rette costituisce appunto una rigata, avendo invece riguardo ai suoi punti ed ai suoi piani costituisce rispettivamente una superficie-luogo ed una superficie-inviluppo, nel senso ordinario di queste parole.

109. Se nel teorema generale dimostrato al n° 41 sul numero degli elementi comuni a due spazi algebrici a p dimensioni di una quadrica a numero pari $2p$ di dimensioni poniamo $p = 2$ abbiamo immediatamente il seguente teorema dovuto ad HALPHEN⁽⁵⁾ e importantissimo per la risoluzione di molte questioni anche all'infuori della geometria della retta:

(5) V. HALPHEN, « *Sur les droites qui satisfont à des conditions données* », Comptes rendus, 1871 e 1872 (il teorema è dimostrato a p. 41 del vol. 74). Lo stesso teorema fu dimostrato più tardi dallo ZEUTHEN mediante il principio di corrispondenza sul piano, da esso trovato (Comptes rendus, 1874, 1° sem., p. 1555). Ma si giudicherà, credo, che la dimostrazione presente di quel teorema è più semplice delle precedenti, ed anche più naturale dal punto di vista della pura geometria della retta.

Due sistemi di rette $(\mu \nu)$, $(\mu_1 \nu_1)$ hanno comuni $\mu\mu_1 + \nu\nu_1$ rette. Di qui segue immediatamente come corollario che: Un sistema di rette $(\mu \nu)$ ha comune con un complesso di grado m una rigata di grado $m(\mu + \nu)$. Ma è più naturale dimostrare questa proposizione osservando che un sistema di rette $(\mu \nu)$ è un $R_2^{\mu+\nu}$ e quindi è tagliato da un S_4^m (la cui intersezione con R determina un complesso di grado m) secondo un $R_1^{m(\mu+\nu)}$.

§ 2.

Complessi e congruenze lineari; rigate quadriche.

110. Nello spazio S a 5 dimensioni un S'_4 qualunque determina su R un R_3^2 , che dicesi *complesso lineare di rette*, un S'_3 qualunque contiene un R_2^2 che dicesi *congruenza lineare*, ed un S'_2 contiene un R_1^2 che diremo *rigata quadrica* (« Regelschaar »).

Dalla teoria generale (V. n° 30) segue che un complesso lineare R_3^2 contiene in generale ∞^3 fasci di rette, sì che ogni punto ed ogni piano dello spazio ne contengono un fascio, e che per ogni retta del complesso ne passano ∞^1 . — Segue pure da quella (n° 40) che una congruenza lineare generale, come quadrica a 2 dimensioni R_2^2 , contiene due sistemi diversi di ∞^1 fasci tali che due fasci dello stesso sistema non hanno rette comuni, mentre hanno una retta comune due fasci di diverso sistema: dunque i piani ed i punti in cui stanno i fasci dell'un sistema saranno uniti rispettivamente ai punti ed ai piani dei fasci dell'altro sistema, il che mostra che quei piani e quei punti passano per due certe rette, *direttrici* della congruenza, sì che i fasci dell'un sistema appartengono ai punti dell'una direttrice ed ai piani dell'altra, mentre l'altro sistema di fasci è costituito dai fasci, che appartengono ai punti di questa seconda direttrice ed ai piani della prima. Quindi la congruenza lineare è costituita dalle rette, che ne tagliano le direttrici. — Finalmente una rigata quadrica, considerata come una quadrica R_1^2 in uno spazio a 2 dimensioni (conica), non contiene evidentemente spazi lineari.

111. Un complesso lineare R_3^2 dicesi *speciale* quando l' S'_4 in cui esso è contenuto è tangente ad R (cioè quando ha un elemento doppio). In tal caso sappiamo dalla teoria generale che l'elemento R'_0 di contatto è congiunto agli altri elementi del R_3^2 mediante degli R'_1 (contenuti in R). Dunque un complesso lineare speciale è costituito dalle rette che ne tagliano una fissa (l' R'_0 di contatto); questa dicesi *asse* del complesso speciale.

Mentre un S'_4 non può essere che semplicemente tangente ad R , un S'_3 può avere con questa 2 specie di contatto, e un S'_2 3 specie di contatto (V. n° 34). Una congruenza lineare dicesi semplicemente *speciale* quando sta su un S'_3 semplicemente tangente ad R : in questo caso segue dalla teoria generale che la congruenza lineare consta di ∞^1 fasci di rette passanti per una retta fissa (l'elemento di contatto), in cui coincidono in questo caso le due direttrici, sì che ogni piano (ed ogni punto) passante per questa contiene un fascio determinato di rette della congruenza. Di qui segue immediatamente che considerando i piani ed i punti contenenti una retta fissa come formanti due forme di prima specie, nella congruenza speciale composta di ∞^1 fasci passanti per una retta fissa r questi fasci corrispondono proiettivamente sia alla serie degli ∞^1 punti in cui stanno, sia a quella degli ∞^1 piani in cui stanno, cosicchè anche queste 2 serie di punti e piani si corrisponderanno proiettivamente; il che costituisce una proprietà importante della congruenza lineare speciale, che può anche servire per definizione. — La congruenza lineare è doppiamente specializzata quando l' S'_3 che la contiene ha un contatto di 2^a specie con R ; in tal caso essa si scinde in un punto ed un piano uniti aventi comune il fascio di rette che è l' R'_1 di contatto di quel S'_3 .

Una rigata quadrica R_1^2 può specializzarsi come nel piano ordinario si può specializzare una curva di 2° ordine. La rigata semplicemente specializzata si scinde in due R'_1 distinti, cioè in 2 fasci aventi comune una retta (elemento di contatto di R col S'_2 che contiene la rigata). Quando l' S'_2 contenente la rigata ha un contatto di 2^a specie con R , allora la rigata quadrica si riduce ad un fascio doppio, che è quello di contatto. Quando l' S'_2 ha un contatto di 3^a specie con R , allora vi è contenuto completamente, cioè è un punto od un piano di rette ⁽⁶⁾.

(6) Se introduciamo coordinate per gli elementi dello spazio S a 5 dimensioni, e una equazione quadratica qualunque, di discriminante non nullo, per rappresentare R , avremo immediatamente, come caso particolare da quelle generali date ai numeri 35, 36, le equazioni, che esprimono le condizioni perchè un complesso, od una congruenza lineare, od una rigata quadrica si specializzino, sia che essi siano dati mediante rette in essi contenute, sia che siano dati come intersezioni di complessi lineari. Queste condizioni furono date dal KLEIN colla sua solita eleganza nella Memoria « *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen* » (Math. Ann., V, pp. 278 e seg.). Simultaneamente furono trovate, ma solo pel caso in cui il sistema di riferimento è un tetraedro, dal PASCH (« *Zur Theorie der linearen Complexe* », Crelle's Journal, 75).

112. Come la geometria della retta nello spazio si considera da noi come geometria di una quadrica R a 4 dimensioni in uno spazio S a 5, così la geometria delle rette di un complesso lineare si potrà considerare come quella di una quadrica R_3^2 a 3 dimensioni in uno spazio lineare a 4 dimensioni S_4 , la qual quadrica però sarà specializzata, cioè avrà un elemento doppio, quando il complesso lineare sarà speciale. E la geometria delle rette di una congruenza lineare sarà la geometria di una quadrica R_2^2 nello spazio lineare a tre dimensioni, cioè coinciderà perfettamente colla geometria su una quadrica nello spazio ordinario; se la congruenza è speciale, questa quadrica avrà un punto doppio (sarà cioè un cono quadrico ordinario), e se la congruenza è doppiamente specializzata, quella quadrica si scinderà in una coppia di piani. Finalmente la geometria delle rette di una rigata quadrica si può considerare come quella di una quadrica R_1^2 ad una dimensione nello spazio lineare a 2 dimensioni (p. e. una conica nel piano ordinario), la quale si scinderà quando la rigata quadrica si scinda in due fasci.

Soltanto il fascio di rette ed il punto e il piano di rette sono spazi di rette essenzialmente lineari (rispettivamente ad 1 e 2 dimensioni). Quindi la geometria nel fascio di rette e la geometria sul punto e sul piano di rette sono le teorie delle forme lineari di 1^a e 2^a specie.

113. Una serie lineare di S'_4 dello spazio S determina come intersezioni su R una serie, che diremo pure *lineare* di complessi lineari. In particolare un *fascio* di complessi lineari sarà formato da ∞^1 complessi aventi comune una congruenza lineare; una serie lineare doppia sarà composta dai complessi lineari aventi comune una rigata quadrica; una serie lineare tripla dai complessi lineari aventi comuni due rette. Quanto alla serie lineare quadrupla, essa sarebbe determinata dagli S'_4 che passano per un elemento fisso S_0 di S . Ma questi elementi di S quando non stanno su R dobbiamo farli sparire dai nostri enunciati; ciò si può ottenere, come ci accadrà spesso di fare in seguito, sostituendo alla considerazione degli elementi di S quella dei complessi lineari di rette, in cui gli S'_4 polari degli elementi stessi rispetto ad R tagliano questa quadrica. Così facendo ed introducendo anche la denominazione di *involutori* per due complessi lineari, i quali stiano in S'_4 coniugati rispetto ad R (cioè passanti l'uno pel polo dell'altro), è chiaro dalla teoria generale della polarità rispetto ad una quadrica che la definizione data delle serie lineari di complessi lineari conduce immediatamente a questa conclusione:

Una serie lineare m-upla di complessi lineari comprende tutti i complessi involutori a tutti i complessi di una serie lineare $(4 - m)$ -upla. — Due tali serie diconsi involutorie. In particolare adunque una serie lineare quadrupla comprende tutti i complessi lineari involutori ad uno fisso.

Se un complesso lineare è speciale, i complessi lineari che sono in involuzione con esso sono quelli che passano pel suo asse. Se due complessi speciali sono involutori, i loro assi si tagliano, e viceversa. Da queste proposizioni, che sono solo casi particolari di teoremi generali visti nella 1^a parte di questo lavoro, segue immediatamente:

Due serie lineari involutorie di complessi lineari godono della proprietà che le rette comuni ai complessi dell'una sono gli assi dei complessi speciali dell'altra serie, e viceversa.

In particolare: Tra i complessi lineari involutori ad un complesso fisso quelli speciali hanno per assi le rette di questo; quella serie quadrupla di complessi lineari non ha rette comuni, salvo quando il complesso a cui è involutoria sia speciale, nel qual caso tutti i complessi della serie passano per l'asse di questo. — Una serie tripla di complessi lineari è involutoria ad un fascio di complessi: essa comprende tutti i complessi lineari passanti per 2 rette fisse, sicchè queste saranno gli assi dei 2 soli complessi speciali del fascio; e la congruenza delle rette comuni ai complessi di questo si compone di rette appoggiate su quelle due fisse (che sono le 2 direttrici della congruenza), cioè degli assi dei complessi speciali appartenenti alla serie tripla. Questa congruenza lineare però può essere speciale: in tal caso coincideranno i due complessi speciali del fascio, ossia le 2 rette comuni ai complessi della serie tripla. Se poi la congruenza è doppiamente specializzata, cioè scissa in un punto ed un piano uniti, allora tutte le rette del fascio doppio di questa congruenza saranno assi di complessi speciali costituenti in tal caso tutto il fascio di complessi, mentre la serie tripla si comporrà dei complessi lineari che contengono quel fascio di rette. Finalmente ad ogni serie doppia di complessi lineari è involutoria un'altra serie doppia in guisa che gli assi dei complessi speciali dell'una serie costituiscono la rigata quadrica che comprende tutte le rette comuni ai complessi dell'altra serie, e la rigata quadrica delle rette comuni ai complessi della prima serie si compone degli assi dei complessi speciali della seconda serie. Quindi queste due rigate quadriche sono tali che ogni retta dell'una taglia ogni retta dell'altra; i punti ed i piani delle rette delle due rigate sono perciò gli stessi e formano quindi una stessa *superficie* di 2^o grado, nel

senso ordinario di questa parola. Tali due rigate si diranno rigate quadriche *coniugate* e noi vediamo che esse sono caratterizzate nella geometria ordinaria dal giacere su una stessa superficie di 2^0 grado. — Una delle due serie doppie di complessi lineari può essere *speciale*, cioè avere per rigata quadrica degli assi dei suoi complessi speciali una rigata quadrica specializzata, cioè degenerata in una coppia di fasci aventi una retta comune; in tal caso è chiaro che le rette comuni a quei complessi speciali e quindi anche a tutta la serie costituiscono quei 2 fasci che stanno rispettivamente negli stessi piani e negli stessi punti dei 2 fasci precedenti ma presi in modo inverso (poichè devono tagliare tutte le rette di quelli). Quindi questi nuovi fasci costituiscono gli assi dei complessi speciali della serie involutoria a quella, la quale dunque sarà pure speciale. Così vediamo come le due rigate quadriche coniugate si scindano simultaneamente in coppie di fasci ed in quale posizione mutua questi stiano. Può poi una delle due rigate quadriche essere doppiamente specializzata, cioè comporsi di due fasci coincidenti; in tal caso risulta tosto dalla teoria generale che anche l'altra sarà tale e che le due serie doppie involutorie avranno comune questo fascio di complessi lineari speciali, che è pure fascio di rette comuni a tutti i complessi delle due serie.

114. Abbiamo visto come in un fascio di complessi lineari ve ne siano in generale due speciali: ciò del resto risultava tosto dal fatto che nello spazio S in un fascio qualunque di S'_4 ve ne sono due tangenti ad R . Notiamo inoltre che due S'_4 di quel fascio sono coniugati rispetto ad R quando sono armonici coniugati rispetto a quei due S'_4 tangenti. Quindi possiamo anche definire due complessi lineari *involutori* come quelli che sono armonici coniugati rispetto ai due complessi speciali del loro fascio.

Se consideriamo le rette di un complesso lineare non speciale come formanti una quadrica R^2_3 in uno spazio lineare a 4 dimensioni, è chiaro che il complesso lineare contiene ∞^4 congruenze lineari, di cui due qualunque hanno comune una rigata quadrica, per la quale passano ∞^1 congruenze lineari del complesso, le quali diremo formare un *fascio*. Tra esse ve ne sono in generale due speciali (semplicemente specializzate); le direttrici delle congruenze del fascio costituiscono la rigata quadrica coniugata a quella considerata del complesso lineare, e per ciascuna delle due congruenze speciali esse coincidono. Diremo che due congruenze lineari del complesso lineare sono *involutorie*, quando sono coniugate armoniche rispetto alle due

congruenze speciali del loro fascio. È chiaro dalla considerazione della quadrica R nello spazio S a 5 dimensioni che per due congruenze lineari involutorie di un dato complesso lineare si possono sempre far passare (e in modo perfettamente determinato) due complessi lineari involutori tra loro ed al dato.

Similmente nella geometria delle rette di una congruenza lineare considerata come una quadrica R_2^2 in uno spazio lineare a 3 dimensioni si trova che la congruenza contiene ∞^3 rigate quadriche, le quali si tagliano a 2 a 2 in coppie di rette. Quelle rigate che passano per una stessa coppia di rette diremo formare un *fascio* (e considerate come luoghi di punti od involuppi di piani formano realmente nel senso ordinario delle parole un fascio ed una schiera di superficie quadriche); tra esse ve ne sono due speciali, cioè scisse in coppie di fasci. Quando due rigate quadriche di una congruenza lineare sono coniugate armoniche rispetto alle 2 rigate speciali del loro fascio, diremo che esse sono *involutorie*.

Finalmente, tra le rette di una rigata quadrica si è condotti a considerarvi le coppie di un'involuzione: in ogni involuzione vi sono due coppie speciali, cioè due rette doppie. Due coppie di rette della rigata quadrica si potrebbero chiamare *involutorie*, quando sono coniugate armoniche rispetto alle due coppie speciali della involuzione da esse determinata; del resto è noto che in tal caso gli elementi di quelle 2 coppie sono tra loro coniugati armonici, sicchè 2 coppie involutorie di rette di una rigata quadrica formano un gruppo armonico.

115. Dalle proposizioni generali ottenute nel § 2 della 1^a parte segue immediatamente:

Esistono nello spazio R di rette ∞^{15} gruppi di 6 complessi lineari tali che due complessi qualunque del gruppo sono involutori. Esistono in un complesso lineare di rette ∞^{10} gruppi di 5 congruenze lineari mutuamente involutorie. Vi sono in una congruenza lineare generale ∞^6 gruppi di 4 rigate quadriche tra loro involutorie. Vi sono in una rigata quadrica generale ∞^3 gruppi di 3 coppie di rette a due a due involutorie, cioè armoniche.

In un gruppo di 6 complessi lineari involutori uno qualunque di essi è tagliato dagli altri secondo 5 congruenze lineari involutorie; la congruenza determinata da due di essi è tagliata dagli altri 4 secondo 4 rigate quadriche involutorie; e finalmente la rigata quadrica determinata da tre di essi è tagliata dagli altri 3 secondo 3 coppie di rette formanti 3 gruppi armonici. Queste proprietà po-

trebbero servire come punto di partenza per lo studio della notevole figura, a cui dà luogo il gruppo di 6 complessi lineari involutori, studio che è dovuto al KLEIN ⁽⁷⁾.

116. Consideriamo una quadrica qualunque φ in uno spazio a più dimensioni; preso fuori di essa un punto qualunque P di questo ed il suo piano polare π rispetto a φ , essi determinano una trasformazione proiettiva notevole di quello spazio in se stesso, facendo cioè corrispondere tra loro due punti che stiano in un S'_1 passante per P e siano coniugati armonici rispetto a P e al punto d'intersezione del S'_1 stesso con π . È facile vedere che si corrisponderanno i punti di due piani i quali facciano fascio con π e siano coniugati armonici rispetto a π ed al piano del loro fascio passante per P . Dalla definizione del piano polare rispetto ad una quadrica risulta poi immediatamente che in quella trasformazione la quadrica φ si trasforma in se stessa. Uno spazio lineare qualunque (contenuto in quello considerato) avrà per corrispondente un altro spazio lineare ad altrettante dimensioni, il quale coinciderà col primo sia quando passi pel punto P , sia quando stia nel piano π . In particolare gli spazi lineari di φ si corrisponderanno tra loro e se il numero delle dimensioni di φ è numero pari $2p$ si corrisponderanno l'uno all'altro i due sistemi distinti di S'_p che sono contenuti in φ , sì che due S'_p corrispondenti si taglieranno in un S'_{p-1} giacente su π ⁽⁸⁾. — Ciò premesso abbiamo particolarizzando:

Un complesso lineare di rette c determina una corrispondenza nello spazio in cui sono coniugati a coppie: le rette dello spazio, in modo che le rette che tagliano una coppia di rette coniugate appartengono al complesso; i punti ed i piani dello spazio in modo che un punto ed un piano corrispondenti hanno comune un fascio di rette del complesso; i complessi lineari qualunque in modo che due complessi corrispondenti fanno fascio col complesso dato e sono coniugati armonici rispetto a questo ed a quel suo complesso involutorio che sta nel fascio stesso; e via dicendo. In particolare cor-

(7) KLEIN, *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, Math. Ann., II, p. 198.

(8) Si può considerare una corrispondenza in cui invece di un punto P ed un piano π si adoperano due spazi lineari qualunque fissi, polari l'uno dell'altro rispetto a φ . Sugli S'_1 che li tagliano si prendono come corrispondenti i punti coniugati armonici rispetto ai 2 punti in cui li tagliano. Si ha così una corrispondenza proiettiva involutoria, nella quale la quadrica φ corrisponde a se stessa.

rispondono a se stessi rispetto al complesso lineare le sue rette e i complessi lineari, che gli sono involutori.

In un complesso lineare di rette considerando una congruenza lineare qualunque, essa determina una corrispondenza tra le rette del complesso a due a due, essendo corrispondenti due rette del complesso tali che quelle che le tagliano costituiscono una rigata quadrica contenuta nella congruenza lineare. Si vede facilmente che questa definizione delle rette corrispondenti equivale a quest'altra: siano date le direttrici della congruenza considerata e per esse e la retta di cui si vuole la corrispondente rispetto a questa congruenza si conduca una rigata quadrica, nella quale si prenda quella generatrice che è coniugata armonica della retta data rispetto a quelle direttrici: la retta così ottenuta sarà la corrispondente di quella. In tal modo si fanno corrispondere tra loro i fasci di rette del complesso lineare e quindi anche i punti ed i piani dello spazio, poichè ogni punto ed ogni piano dello spazio contengono un tal fascio. Questa corrispondenza involutoria nello spazio ordinario non è altro che la involuzione chiamata dai Tedeschi « geschaart », la quale si può anche considerare indipendentemente da quel complesso lineare.

In una congruenza lineare considerando una rigata quadrica qualunque, essa determina una corrispondenza tra le rette di quella congruenza, in modo che ai suoi fasci dell'un sistema corrispondono quelli dell'altro, essendo corrispondenti due fasci aventi comune una retta di quella rigata. Allora ad una retta qualunque della congruenza ne corrisponde un'altra che si determina come retta comune ai due fasci che corrispondono rispetto alla data rigata a quei due che contengono la prima retta. Da questa costruzione segue che due rette corrispondenti così costrutte sono le diagonali di un quadrilatero sghembo, di cui 2 lati opposti sono le direttrici della congruenza, e gli altri 2 appartengono alla rigata quadrica, e quindi sono, nel senso ordinario della parola, polari reciproche rispetto a questa, considerata come superficie quadrica. Quindi la corrispondenza considerata si riduce alla polarità rispetto ad una quadrica ordinaria.

§ 3.

Cenno sullè rigate, specialmente cubiche e quartiche.

117. Le rigate non sono altro, come vedemmo, che spazi ad una dimensione sullo spazio quadratico R a 4 dimensioni. Tutte le loro principali proprietà si possono ottenere considerandole come tali.

Così un R_1^g su R ha degli S_2' osculatori che si ottengono congiungendone 3 elementi consecutivi; alcuni di questi S_2' in numero finito taglieranno R in un S_1^2 speciale, cioè scisso in due S_1' . Per eccezione poi l' R_1^g può esser tale che in un suo elemento vi sia un S_2' stazionario, cioè congiungente quell'elemento non solo a due, ma a tre elementi consecutivi. Dunque:

Ogni generatrice di una rigata qualunque ha una rigata quadrica osculatrice⁽⁹⁾, la quale congiunge quella generatrice alle 2 consecutive ed ha quindi la rigata quadrica coniugata composta delle tangenti principali (usando i termini della geometria dello spazio ordinario di punti) della superficie aventi in quella generatrice i punti di contatto. Vi sono poi in generale alcune generatrici, per ciascuna delle quali la rigata quadrica osculatrice si scinde in due fasci, di cui uno passante per le generatrici stesse. Una tale generatrice sarà una generatrice *singolare*, cioè sarà caratterizzata dal tagliare la generatrice consecutiva, donde segue immediatamente che i suoi punti avranno uno stesso piano tangente. Per eccezione poi può la rigata avere una generatrice tale che la rigata quadrica osculatoria sia *stazionaria*, cioè contenga anche le 3 generatrici consecutive: le rette della rigata coniugata sono allora tangenti quadripunte della superficie. Queste generatrici, i cui punti sono punti di contatto di tangenti quadripunte, furono dal VOSS, che prima le considerò⁽¹⁰⁾, chiamate « hyperbolische Erzeugende », cioè *generatrici iperboliche*.

Similmente di un R_1^g su R possiamo considerare in ogni elemento l' S_3' osculatore, il quale lo congiunge ai 3 elementi consecutivi, e l' S_4' osculatore, il quale lo congiunge ai 4 elementi consecutivi; sia quello sia questo possono divenire stazionari pel contenere ancora un altro elemento consecutivo (l' S_3' soltanto per degli R_1^g speciali), e possono divenire tangenti alla quadrica R . Dunque:

Ogni generatrice di una rigata ha una congruenza lineare osculatrice, la quale la contiene insieme colle tre generatrici consecutive, e un complesso lineare osculatore, che la congiunge alle 4 generatrici consecutive. È chiaro che le due direttrici di quella congruenza sono tangenti quadripunte della superficie, cosicchè vi sono su ogni generatrice in generale 2 punti di contatto di tangenti quadripunte,

(9) V. PLÜCKER, *Théorie générale des surfaces réglées*, Ann. Math., (2) 1, 1867, p. 163.

(10) V. VOSS, *Zur Theorie der windschiefen Flächen*, Math. Ann., VIII, p. 94.

e quindi la curva delle tangenti quadripunte è tagliata da ogni generatrice in 2 punti. Vi sono alcune generatrici particolari tangenti a quella curva; quelle cioè per cui la congruenza lineare osculatrice è speciale. Vi sono poi anche rigate speciali aventi qualche generatrice in cui la congruenza lineare osculatrice è stazionaria; allora le direttrici di questa congruenza hanno contatto 5-punto colla superficie. — In ogni rigata vi sono in generale generatrici per le quali il complesso lineare osculatore diventa speciale: allora l'asse di questo è tangente 5-punto della superficie. Vi sono poi anche generatrici in cui il complesso lineare osculatore è stazionario, cioè congiunge 6 generatrici consecutive.

118. È pure facile dimostrare l'esistenza e le proprietà della curva doppia della rigata. Consideriamo l' R_1^g su R , ed in un suo elemento qualunque si prenda l' S_1^g tangente ad R : taglierà l' R_1^g in altri $g - 2$ elementi. Dunque:

Ogni generatrice di una rigata di grado g si appoggia su altre $g - 2$, cosicchè la curva doppia della superficie taglia ogni generatrice in $g - 2$ punti.

Ed altre proposizioni ancora si otterrebbero col nostro metodo colla stessa facilità, ma le lasciamo da parte per non dilungarci troppo.

119. Dai teoremi dimostrati al n° 7 risulta che un modo naturale di classificare le rigate di dato grado g è di distinguerle anzitutto a seconda che non stanno in un complesso lineare, o stanno in un complesso lineare, o stanno in una congruenza lineare. (Si potrebbe aggiungere il caso in cui stanno in un piano od in un punto di rette, ma allora si hanno involuppi piani di classe g e coni d'ordine g , e di queste rigate speciali è più conveniente occuparsi a parte, come spazi algebrici ad una dimensione contenuti in spazi lineari a 2 dimensioni). In particolare lo studio delle rigate di una congruenza lineare è lo studio degli S_1 su un S_2^2 , vale a dire equivale perfettamente alla geometria delle curve su una quadrica ordinaria; dove questa quadrica si specializzerà in un cono quando la congruenza lineare, che si considera, diventi speciale per venire ad essere infinitamente vicine le sue direttrici. Questa equivalenza perfetta tra la geometria delle rigate di una congruenza lineare e la geometria delle curve su una quadrica ordinaria è assai importante, come vedremo tosto.

120. Dalle cose dette alla fine del n° 7 segue che una rigata cubica sta sempre in una congruenza lineare, generale o speciale⁽¹¹⁾, sicchè la geometria delle rigate cubiche equivale alla geometria delle cubiche su una quadrica, la quale si riduce ad un cono quando quella congruenza lineare è speciale. Ora è noto che una cubica sghemba nello spazio lineare a 3 dimensioni non può presentare altra particolarità che lo scindersi; inoltre considerando la cubica su una quadrica è noto che essa è tagliata da ogni generatrice di un sistema di questa in un punto solo e da ogni generatrice dell'altro sistema in 2 punti e che in quest'ultimo sistema vi sono 2 generatrici tangenti alla cubica. Considerando invece la cubica su un cono quadrico, essa passa pel vertice di questo, taglia ogni generatrice in un altro punto e tocca nel vertice una sola generatrice. Dunque:

Vi sono due specie di rigate cubiche⁽¹²⁾: la 1ª specie appartiene ad una congruenza lineare generale, cioè ha due direttrici di cui una doppia come luogo e semplice come inviluppo, l'altra semplice come luogo e doppia come inviluppo, vale a dire pei punti della 1ª direttrice nei piani della 2ª passano due generatrici della rigata, mentre pei punti della 2ª direttrice nei piani della 1ª passa una sola generatrice della rigata; vi sono due punti sulla 1ª direttrice coi due piani che li congiungono alla 2ª, per ciascuno dei quali accade che le due generatrici della rigata cubica coincidono (punti e piani cuspidali delle due direttrici). — La 2ª specie di rigate cubiche comprende quelle appartenenti ad una congruenza lineare speciale, la cui direttrice è non solo direttrice, ma anche generatrice della rigata, sì che in ogni punto ed in ogni piano di essa sta solo un'altra generatrice, la quale viene a coincidere colla direttrice per un certo punto ed un certo piano (cuspidali).

Notando anche che una cubica insieme con una sua corda costituisce l'intersezione completa di infinite quadriche, avremo la seguente proposizione, che ci gioverà più tardi:

Una rigata cubica insieme con un fascio di rette qualunque avente il centro sulla direttrice che è doppia come luogo di punti ed il piano passante per la direttrice doppia come inviluppo costituisce l'interse-

⁽¹¹⁾ Questa semplicissima dimostrazione diretta di questo teorema sulle rigate cubiche si trova nella Memoria del CLIFFORD, «*On the classification of Loci*», che già avemmo occasione di citare (Phil. Trans., 169, p. 664).

⁽¹²⁾ V. CAYLEY, «*On skew surfaces, otherwise scrolls*», Phil. Trans., 154, 1864, pp. 568-571.

zione completa della congruenza lineare a cui essa appartiene con infiniti complessi quadratici.

121. Venendo finalmente alle rigate di 4° grado risulta pure immediatamente dal fatto che ogni S_1^4 sta in un S_4' od in un S_3' od in un S_2' (n° 7) che ogni tal rigata sta in un solo complesso lineare oppure in una congruenza lineare (non considerando la rigata che si riduce ad un cono o ad un inviluppo piano). Le rigate quartiche che stanno in un solo complesso lineare si vede facilmente che hanno per curva doppia una cubica, la quale può scindersi in vari modi, come si scorge nei lavori di CAYLEY e CREMONA. Quanto poi alle rigate quartiche che stanno in una congruenza lineare, il loro studio coincide con quello delle curve di 4° ordine segnate su una quadrica ordinaria. Ora è noto che queste curve si distinguono in 2 specie: quelle di 1ª specie sono intersezioni di un fascio di quadriche e sono quindi tagliate in 2 punti da ogni generatrice di ciascun sistema della quadrica fissa; mentre quelle di 2ª specie non stanno su altre quadriche e sono tagliate dalle generatrici di un sistema in 3 punti, da quelle dell'altro in un punto solo. Dunque:

Vi sono due specie di rigate di 4° grado appartenenti ad una congruenza lineare. Ogni rigata della 1ª specie è intersezione di quella congruenza con infiniti complessi quadratici e quindi ha entrambe le direttrici della congruenza lineare per rette doppie sia come luoghi di punti, sia come inviluppi di piani. Una rigata della 2ª specie invece non appartiene ad alcun complesso quadratico (il quale non contenga tutta la congruenza lineare) ed ha in ogni fascio di rette della congruenza di un sistema 3 generatrici, in ogni fascio dell'altro sistema una sola generatrice, cosicchè una direttrice è tripla come luogo e semplice come inviluppo, mentre l'altra è semplice come luogo e tripla come inviluppo. — La congruenza lineare a cui appartengono queste rigate di 4° grado può anche specializzarsi venendo le due direttrici a coincidere.

Noi in seguito avremo solo da considerare tra le rigate di 4° grado quelle appartenenti ad una congruenza lineare ed intersezioni di questa con complessi quadratici, cioè quelle di 1ª specie; quindi le indicheremo per brevità col nome di rigate *biquadratiche*. Ad esse sono applicabili tutte le proprietà delle ordinarie quartiche d'intersezione di quadriche, di cui alcune furono appunto trovate in questo lavoro.

§ 4.

Complesso e congruenza quadratici e rigata biquadratica.**Loro generazioni, e spazi notevoli in essi contenuti.**

122. Dalle definizioni date del complesso quadratico, della congruenza quadratica e della rigata biquadratica risulta che essi non sono altro che quartiche (intersezioni di quadriche) rispettivamente a 3, a 2 e ad 1, dimensioni. Quindi basterà che noi nella teoria delle quartiche svolta nella 2^a Parte di questo lavoro poniamo successivamente $n = 6, 5, 4$, per avere la teoria di quelli. Però bisognerà notare che tra le quadriche passanti per quelle quartiche che vogliamo considerare ve n'è sempre una notevole: quella che ha per elementi le rette. Pel complesso quadratico essa è lo spazio R_4 a 4 dimensioni di rette; per la congruenza quadratica essa è il complesso lineare R_3 di rette in cui questa congruenza è sempre contenuta; per la rigata biquadratica essa è la congruenza lineare di rette R_2 che la contiene. In ciascuno dei tre casi questa quadrica, che nel fascio delle quadriche passanti per la quartica considerata ha speciale importanza, va sempre considerata più particolarmente delle altre: le trasformazioni proiettive degli spazi lineari che noi ora consideriamo, trattandosi di geometria della retta, devono sempre esser tali da trasformare quella tal quadrica in se stessa. Quindi una prima osservazione da fare è se quella quadrica si specializza (come luogo, poichè noi l'abbiamo definita od ottenuta solo come superficie-luogo), e in qual modo. Ora, quanto al complesso quadratico l' R_4 in cui è contenuto non si specializza, poichè definimmo appunto la retta come l'elemento di una quadrica a 4 dimensioni non specializzata. Per la congruenza quadratica invece vi saranno da distinguere due classi diverse, secondo che il complesso lineare R_3 cui essa appartiene è generale oppure è speciale, cioè composto delle rette che ne tagliano una fissa. E per la rigata biquadratica vi saranno da distinguere 3 classi distinte secondo che la congruenza lineare cui essa appartiene è generale, o semplicemente specializzata, cioè colle due direttrici infinitamente vicine, o doppiamente specializzata, cioè decomposta in un punto ed un piano in posizione unita.

Risulta pure dalle date definizioni che una congruenza quadratica si può sempre ottenere come intersezione del complesso lineare in cui è contenuta con un conveniente complesso quadratico, e che una rigata biquadratica si può ottenere come intersezione

della congruenza lineare che la contiene con un complesso quadratico, ovvero come intersezione di una congruenza quadratica e di un complesso lineare convenienti.

123. Come per una quartica a quante si vogliano dimensioni, così per ciascuna delle tre, che noi ora particolarmente consideriamo, vi sarà una caratteristica, la quale ci darà la *specie* del complesso quadratico, della congruenza quadratica o della rigata biquadratica. La somma degli indici contenuti in quella caratteristica sarà rispettivamente uguale a 6, 5, 4. Ogni gruppo caratteristico con h indici rappresenta in generale, come vedemmo (V. § 3 della 2^a Parte) una quadrica h volte specializzata passante per la quartica che si considera, e quindi un S'_{h-1} , doppio per quella quadrica, e tale che da un suo punto qualunque gli S'_1 che vanno ad un punto mobile della quartica la tagliano ancora in un altro punto. Ogni punto di quel S'_{h-1} posto sulla quartica è doppio per questa ed ha lo stesso piano tangente a tutte le quadriche del fascio. Per le quartiche da noi considerate abbiamo così le *rette doppie* di un complesso quadratico⁽¹³⁾, di una congruenza quadratica e di una rigata biquadratica. Ricordando le cose dette al n° 116 e la teoria generale svolta nel § 3 della 2^a Parte, noi abbiamo successivamente:

Un complesso quadratico della specie più generale [1 1 1 1 1 1] ha 6 soli complessi lineari fondamentali, cioè complessi lineari tali che il complesso quadratico corrisponde a se stesso rispetto a ciascuno di essi⁽¹⁴⁾; questi 6 complessi lineari sono a due a due in involuzione e formano quindi un gruppo di quelli considerati al n° 115. Un complesso quadratico di specie qualunque ha altrettante serie lineari di complessi fondamentali quanti sono i gruppi d'indici della sua caratteristica; ogni serie lineare di complessi fondamentali è tante volte

(13) È facile vedere che questa definizione delle rette doppie di un complesso quadratico coincide con quella primitiva di PLÜCKER, cosa del resto che risulterà pure in seguito.

(14) La classificazione dei complessi quadratici fu data dal WEILER nel 1873 nella Memoria « *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* » (Math. Ann., VII, pp. 145-207), la quale, benchè assai pregevole, ha però alcuni difetti, che già notai nella prefazione. — La denominazione di *complessi fondamentali* è usata dal WEILER (loc. cit., p. 148) nel senso di complessi di riferimento delle equazioni; ma siccome tra questi complessi (quali vengono dalle equazioni canoniche del WEIERSTRASS) ve ne sono alcuni privi affatto d'importanza geometrica pel complesso quadratico, preferisco chiamare *fondamentali* solo i complessi lineari che godono della proprietà importante suesposta.

infinita quante sono le unità, meno una, contenute nel numero d'indici del gruppo caratteristico corrispondente. Ancora due complessi fondamentali saranno involutori, purchè però appartengano a serie lineari diverse. Tutti i complessi fondamentali speciali hanno per assi delle rette doppie del complesso quadratico e determinano in tal modo tutte le rette doppie di questo. Quindi, mentre nel caso più generale il complesso non ha rette doppie, in un caso qualunque ogni gruppo caratteristico di h indici dà origine ad un S^2_{h-2} di rette doppie del complesso, escluso il caso in cui quegli h indici fossero tutti > 1 , nel qual caso tutta la serie lineare $h - 1$ volte infinita di complessi fondamentali corrispondenti si compone di complessi speciali, i cui assi formanti un S^1_{h-1} sono rette doppie del complesso quadratico. Così un gruppo caratteristico composto di due indici corrisponde ad un fascio di complessi lineari fondamentali, tra cui i due speciali hanno per assi due rette doppie del complesso quadratico, le quali coincidono se il primo di quegli indici è maggiore di 1; ma, se entrambi quegli indici sono maggiori di 1, allora quel fascio si comporrà tutto di complessi lineari speciali, cioè si avrà in tal caso pel complesso quadratico un fascio di rette doppie. Due rette doppie appartenenti a due serie diverse si tagliano sempre e il fascio di rette da esse determinato fa parte del complesso quadratico. Tre rette doppie appartenenti a serie diverse si tagliano mutuamente e determinano un piano od un punto, le cui rette stanno tutte nel complesso quadratico. Ad un gruppo caratteristico composto di un solo indice corrisponde una retta doppia, cioè un complesso fondamentale speciale, solo quando quell'indice sia > 1 . — Vedremo più tardi quali proprietà distinguano tra loro queste rette doppie.

124. Una congruenza quadratica appartenente ad un complesso lineare non speciale R_3 ha nel caso più generale $[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ 5 sole congruenze lineari fondamentali, cioè congruenze lineari contenute in quel complesso lineare tali che la congruenza quadratica corrisponde a se stessa rispetto a ciascuna di esse (nel senso del n° 116), e quindi anche rispetto all'unico complesso lineare involutorio ad R_3 che si può far passare per ciascuna di quelle congruenze lineari; sicchè una congruenza quadratica ha per ogni congruenza fondamentale un complesso lineare fondamentale involutorio a quello in cui essa giace, tale cioè che essa corrisponde a se stessa rispetto ad esso. — Passando ai casi particolari, ad ogni gruppo di h indici della caratteristica di una congruenza quadratica corrisponde una serie lineare $h - 1$ volte infinita di congruenze fondamentali di questa, e quindi anche di suoi com-

plessi fondamentali. Gli assi delle congruenze fondamentali speciali (o dei complessi fondamentali speciali, il che fa lo stesso) di una congruenza quadratica sono rette doppie di questa. Quindi il gruppo di h indici caratteristici dà origine ad un S_{h-2}^2 di rette doppie, salvo il caso, in cui quegli indici siano tutti > 1 , poichè allora si ha un S_{h-1}^1 di rette doppie, cioè tutta la serie lineare $h - 1$ volte infinita di congruenze fondamentali si comporrà di congruenze speciali. Due congruenze fondamentali (o complessi fondamentali) appartenenti a serie lineari diverse sono sempre involutorie; in particolare due rette doppie della congruenza quadratica provenienti da serie diverse si tagliano sempre. Ad un gruppo caratteristico composto di un indice solo > 1 corrisponde una retta doppia (isolata).

Cose simili si trovano nel caso in cui il complesso lineare, al quale appartiene la congruenza quadratica, sia speciale. In tal caso nella caratteristica della congruenza vi sarà un indice caratteristico isolato, il quale corrisponderà appunto alla quadrica a 3 dimensioni speciale R_3 delle rette di quel complesso lineare: quell'indice caratteristico verrà distinto dagli altri con una lineetta orizzontale posta al disopra.

125. *Una rigata biquadratica della specie più generale [1 1 1 1] ha 4 rigate quadriche della congruenza lineare (supposta non speciale) cui essa appartiene fondamentali, cioè tali che rispetto a ciascuna di quelle 4 quadriche la rigata biquadratica è polare di se stessa; ciascuna di quelle 4 quadriche poi è polare di se stessa rispetto a ciascun'altra. Vi è un determinato gruppo di 4 complessi lineari involutori tra loro ed ai complessi lineari passanti per quella congruenza lineare (cioè passanti essi stessi per le direttrici di questa) e che tagliano questa congruenza appunto secondo le 4 rigate quadriche fondamentali: questi complessi lineari sono pure tali che rispetto a ciascuno di essi la rigata biquadratica corrisponde a se stessa. — La rigata biquadratica può poi avere uno o due fasci di quadriche fondamentali, ma in tal caso essa stessa si scinde in due rigate quadriche. Se poi una rigata quadrica fondamentale è speciale, cioè scissa in due fasci aventi comune una retta, questa sarà una generatrice doppia per la rigata biquadratica. — Del resto la classificazione delle rigate biquadratiche coincide con quella già fatta (V. n° 80) delle quartiche intersezioni di quadriche a 2 dimensioni e quindi si deduce immediatamente da questa con solo cambiamento di parole. E questo appunto faremo più tardi.*

La congruenza lineare cui appartiene la rigata biquadratica può essere speciale, avendo le due direttrici infinitamente vicine, od anche doppiamente specializzata scindendosi in un piano ed un punto uniti; nel 1° caso nella caratteristica della rigata biquadratica vi sarà un indice caratteristico isolato corrispondente alla congruenza lineare speciale, nel 2° caso il gruppo di due indici caratteristici. Noteremo sempre con una lineetta orizzontale superiore nel 1° caso quell'indice, nel 2° quella coppia d'indici, che si riferiscono alla congruenza lineare.

126. Passiamo ora alla ricerca degli spazi più semplici di rette contenuti nel complesso e nella congruenza quadratici ed alla generazione proiettiva di essi e della rigata biquadratica. Basterà perciò che particolarizziamo i risultati del § 2 della 2ª Parte⁽¹⁵⁾.

Ogni complesso quadratico ha ∞^1 generazioni (V. n° 56) corrispondentemente al fascio di S_4^2 che nello spazio lineare S a 5 dimensioni passano per esso. Ora ogni S_4^2 contiene in generale ∞^3 S_2' formanti 2 sistemi distinti, sì che due che siano dello stesso sistema hanno un elemento comune e quindi stanno in un S_4' , mentre ciò non accade per due di diverso sistema, i quali possono però avere per eccezione un S_1' comune e quindi stare in un S_3' . Per un

(15) Nella generazione con sistemi reciproci di piani di una quadrica a più dimensioni vedemmo (n° 44) che l'ordine d'infinità di quei sistemi di piani si può scegliere ad arbitrio da un certo minimo in su. Noi nelle applicazioni ci limitiamo a considerare questo minimo ordine d'infinità, come quello che dà il modo più importante in generale di generare la quadrica. Se si tenesse anche conto degli altri modi si avrebbe ad esempio che ogni complesso quadratico si può generare mediante *due spazi reciproci di rette*, cioè due spazi in cui ad ogni retta dell'uno corrisponde un complesso lineare di rette e viceversa; sarebbe cioè il complesso quadratico il luogo di quelle rette che stanno nei complessi lineari corrispondenti. Un caso particolare semplicissimo ben noto di questo modo di generazione è quello del complesso *tetraedrale* (la cui caratteristica vedremo essere [(11)(11)(11)]) come luogo di quelle rette di uno spazio che tagliano le rette corrispondenti di uno spazio *omografico*; un altro caso notevole, che credo non sia ancora stato considerato, è quello del complesso delle rette di uno spazio che tagliano le rette corrispondenti di uno spazio *correlativo*. Questo complesso quadratico è più generale di quello tetraedrale, avendo per caratteristica [(11)(11)11]; la sua superficie singolare è perciò, come vedremo, scissa in due quadriche tagliantisi in 4 rette, e queste quadriche non sono altro rispettivamente che il luogo dei punti e l'involuppo dei piani, i quali sono in posizione unita cogli elementi corrispondenti nella correlatività. Lo studio di questa in relazione con quel complesso quadratico è assai interessante; ma qui debbo limitarmi a quest'indicazione.

elemento qualunque del S_4^2 passano $\infty^1 S_2'$ di ciascun sistema. Un S_4^2 non contiene degli S_3' , a meno che sia due volte specializzato, cioè abbia un S_1' doppio, nel qual caso gli S_3' che contiene passeranno per questo. Finalmente ricordiamo un risultato ottenuto alla fine del n° 45 sul modo di generare un S_4^2 . Tagliando poi tutto con R , quadrica a 4 dimensioni delle rette, noi abbiamo:

Un complesso quadratico ha ∞^1 generazioni. Per ciascuna generazione esso contiene due diversi sistemi di ∞^3 rigate quadriche tali che due rigate dello stesso sistema sono contenute in un complesso lineare e possono aver comune (per eccezione) una sola retta, mentre due rigate di diverso sistema non stanno in generale in uno stesso complesso lineare, ma per eccezione possono stare in una congruenza lineare avendo di comune in tal caso due rette. Due rigate quadriche di generazioni diverse non hanno in generale nulla di comune. Per ogni retta del complesso passano ∞^1 rigate quadriche di ciascun sistema di una data generazione. — Notevole tra le ∞^1 generazioni è quella che corrisponde ad R : essa si ha considerando le rette comuni al complesso ed ai piani e punti di rette dello spazio, sicchè i due sistemi di rigate quadriche appartenenti a questa generazione sono costituiti dalle ∞^3 coniche e dagli ∞^3 coni del complesso quadratico. Notevoli sono pure quelle generazioni che corrispondono agli S_4^2 specializzati: per ogni generazione corrispondente ad un S_4^2 semplicemente specializzato i due sistemi di rigate quadriche coincidono e ognuna delle ∞^3 quadriche rigate che così si hanno è involutoria al complesso fondamentale del dato complesso quadratico, il quale corrisponde a quel S_4^2 , vale a dire ogni rigata quadrica di quella generazione corrisponde a se stessa rispetto a quel complesso fondamentale ed ha quindi la rigata quadrica coniugata contenuta in questo. Queste generazioni speciali sono tante quanti sono i complessi fondamentali isolati del dato complesso quadratico, cioè quanti sono gl'indici caratteristici isolati nella caratteristica di questo. Ma se in questa caratteristica entra un gruppo caratteristico composto di due o più indici, allora la generazione a cui quello corrisponde sarà due o più volte specializzata e conterrà quindi non solo rigate quadriche, ma congruenze lineari contenute nel complesso quadratico (mentre in generale il complesso non contiene delle congruenze lineari). In tal caso queste congruenze lineari formano due diversi sistemi passanti sempre per le rette doppie del complesso corrispondenti a quel gruppo caratteristico e tali che due congruenze dello stesso sistema non hanno altre rette comuni, mentre due congruenze di diverso sistema hanno comune una rigata quadrica.

Si può sempre generare il complesso quadratico con due stelle reciproche di complessi lineari passanti per 2 rigate quadriche prese ad arbitrio nel complesso quadratico, in modo però che una di esse appartenga all'uno, l'altra all'altro dei due diversi sistemi di una stessa generazione; ad ogni complesso lineare e ad ogni congruenza lineare dell'una stella corrisponderanno nell'altra rispettivamente una congruenza ed un complesso lineari, e le intersezioni dei complessi e delle congruenze corrispondenti saranno rigate quadriche che costituiranno i due sistemi appartenenti a quella generazione e genereranno completamente il dato complesso quadratico. Non si può in generale generare il complesso quadratico mediante le intersezioni di due fasci proiettivi di complessi lineari; ciò è solo possibile quando vi è nella caratteristica un gruppo di due o più indici, cioè quando vi è una generazione due o più volte specializzata del complesso quadratico. In tal caso nei due diversi sistemi di congruenze lineari che vedemmo costituire quella generazione si potranno prendere ad arbitrio due congruenze dello stesso sistema come sostegni di due fasci proiettivi di complessi lineari atti a generare il complesso quadratico; le congruenze d'intersezione dei complessi lineari corrispondenti costituiranno l'altro sistema. Viceversa due fasci proiettivi di complessi lineari generano un complesso quadratico, di cui la caratteristica contiene almeno un gruppo di due o più indici. Quindi noi siamo in grado di dire dal semplice esame della caratteristica di un complesso quadratico se esso sia generabile con fasci proiettivi di complessi lineari, o se si può soltanto generarlo con stelle reciproche; ed inoltre in quanti modi si possa generarlo coll'uno o coll'altro mezzo⁽¹⁶⁾.

(16) Alcune delle proposizioni così trovate, cioè quelle sulle rigate quadriche contenute in un complesso quadratico qualunque, formanti ∞^4 generazioni, ciascuna con 2 diversi sistemi, e sulla generabilità di ogni tal complesso mediante due stelle reciproche di complessi e congruenze lineari, furono trovati recentemente per tutta altra via dallo SCHUR nella sua notevole « *Inauguraldissertation* » intitolata « *Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe 1. und 2. Grades* » (Berlin, 1879) (V. specialmente a pp. 33-36). È questo il primo lavoro in cui si siano studiati sinteticamente i complessi quadratici generali, poichè prima di esso lo studio sintetico si era limitato ad alcuni complessi notevoli, come quello tetraedrale ed i complessi quadratici che si possono generare con fasci proiettivi di complessi lineari. — Quanto alle ∞^4 rigate quadriche contenute in un complesso quadratico qualunque esse furono prima trovate mediante la rappresentazione del complesso sullo spazio lineare a 3 dimensioni dal CAPORALI nella Memoria « *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado* », Mem. Acc. Lincei, (3) 2, 1877-78, p. 13.

127. Passando ora alla congruenza quadratica, quartica in uno spazio a 4 dimensioni, noi sappiamo che un S_3^2 qualunque contiene solo in generale degli S_1' e non degli S_2' e quindi è generabile solo con stelle reciproche e non con fasci proiettivi; salvo il caso in cui quel S_3^2 sia specializzato per uno od infiniti elementi doppi, nel qual caso esso contiene degli S_2' passanti per gli elementi doppi ed è generabile con fasci proiettivi di S_3' passanti per questi. Inoltre se supponiamo l' S_3^2 semplicemente specializzato sappiamo che gli S_2' contenuti in esso formano due sistemi, sì che due S_2' si tagliano, oltre che nell'elemento doppio, in un S_1' solo quando siano di diverso sistema, e quindi allora soltanto essi son contenuti in un S_3' . Per ogni elemento del S_3^2 speciale passa un determinato S_2' per ciascun sistema. Osserviamo anche che due S_2' appartenenti a due diversi S_3^2 speciali hanno sempre un elemento comune, il quale apparterrà alla quartica d'intersezione di quei due S_3^2 . Ciò premesso, possiamo enunciare le seguenti proposizioni intorno alle congruenze quadratiche.

Una congruenza quadratica si può generare in infiniti modi mediante stelle reciproche di congruenze lineari appartenenti al complesso lineare che la contiene. Essa ha poi per generazioni notevoli quelle che corrispondono ai vari gruppi di indici della sua caratteristica, e quindi 5 nel caso più generale. Per ciascuna generazione siffatta la congruenza contiene 2 sistemi distinti di ∞^1 rigate quadriche, sì che per ogni retta della congruenza ne passa una di ciascun sistema. Ciascuna di queste rigate quadriche corrisponde a se stessa rispetto alla congruenza lineare fondamentale (od al fascio di congruenze fondamentali) della congruenza quadratica, che corrisponde a quella generazione. Due rigate della stessa generazione non hanno rette comuni se sono dello stesso sistema (od hanno solo comune ogni retta doppia della congruenza quadratica, la quale corrisponda a quella generazione), ma hanno due rette comuni, cioè stanno in una congruenza lineare se sono di diverso sistema. Due rigate quadriche di generazioni diverse hanno comune una sola retta della congruenza quadratica.

Per ciascuna delle generazioni considerate di una congruenza quadratica si può costruire questa come luogo delle rigate d'intersezione delle congruenze lineari corrispondenti di due fasci proiettivi di congruenze lineari del dato complesso lineare (contenente la congruenza quadratica), i cui sostegni sono due rigate quadriche arbitrarie dello stesso sistema di quella generazione della congruenza quadratica: le

rigate d'intersezione così ottenute formano appunto l'altro sistema di quella generazione ⁽¹⁷⁾.

128. Finalmente per la rigata biquadratica notiamo che ogni quadrica nello spazio lineare a 3 dimensioni si genera con 2 fasci proiettivi di S'_2 in infiniti (∞^2) modi formanti due sistemi diversi (se la quadrica non è specializzata) corrispondenti ai due sistemi di generatrici che stanno su quella quadrica. Quindi anche ogni quartica su una quadrica fissa φ si può generare come intersezione di due fasci proiettivi di S_1^2 di φ (intendendo per *fascio* di S_1^2 l'insieme di tutti quelli che passano per 2 elementi fissi di φ) in ∞^3 modi; la quartica contiene le 2 coppie di elementi formanti le basi di quei due fasci. Si possono prendere ad arbitrio solo 3 dei 4 elementi detti, poichè per l' S'_1 congiungente una coppia di questi passerà solo una determinata quadrica del fascio, la quale avrà solo una generatrice passante pel terzo elemento e dello stesso sistema di quel S'_1 e quella generatrice taglierà φ ancora in un altro determinato elemento, che è il quarto elemento cercato. Queste proprietà valendo per uno spazio lineare qualunque a 3 dimensioni danno oltre a teoremi noti per lo spazio ordinario i seguenti per la rigata biquadratica in una congruenza lineare di rette:

Ogni rigata biquadratica si può generare in ∞^3 modi come luogo delle coppie mobili di rette d'intersezione delle rigate quadriche corrispondenti di due fasci appartenenti ad una stessa congruenza. (Un tal fascio, considerate le rigate quadriche come superficie luoghi di punti si compone di quadriche passanti per 4 rette fisse; i due fasci poi che generano la rigata biquadratica hanno comuni 2 rette di queste quaterne, cioè le due direttrici della congruenza lineare, sicchè due quadriche dei due fasci hanno ancora due altre rette comuni). I sostegni di quei due fasci sono due coppie di generatrici della rigata biquadratica; tre di queste generatrici si possono prendere ad arbitrio, ma allora la quarta è perfettamente determinata.

⁽¹⁷⁾ Anche i teoremi sulle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche contenute nel caso più generale in una congruenza quadratica, e la generazione di questa con fasci proiettivi di congruenze lineari si trovano nella Memoria dello SCHUR (pp. 17, 18). Ma quanto all'esistenza dei 10 sistemi di rigate quadriche, essa era già nota prima di questa Memoria. Essa fu accennata, credo per la prima volta, dal LIE nella Memoria già citata « *Ueber Complexe, etc.* », Math. Ann., V, p. 247 nella 2^a nota, e fu poi dimostrata e approfondita dal CREMONA nello scritto « *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie* » (Mem. Acc. Lincei, (2) 3, 1875).

§ 5.

**Polarità rispetto ai complessi quadratici.
Proprietà diverse di questi.**

129. La teoria generale svolta nel § 1 della 2ª Parte sulla polarità rispetto ad una quartica o ad un fascio di quadriche in uno spazio di un numero qualunque di dimensioni ci dà immediatamente i seguenti risultati.

Ogni retta r dello spazio ha un fascio di complessi lineari *polar*i rispetto ad un dato complesso quadratico Q : essi corrispondono alle ∞^1 generazioni di questo (essendo essi gli S_3^2 d'intersezione con R degli S_4^1 polari di r rispetto alle quadriche S_4^2 di un fascio di base Q , che comprende R) e la corrispondenza è proiettiva, sicchè tutti i fasci di complessi lineari polari di rette dello spazio son fatti corrispondere proiettivamente tra loro dalle generazioni a cui corrispondono ⁽¹⁸⁾. Del fascio di complessi lineari polari di r fa parte il complesso speciale avente r per asse (la generazione di Q a cui esso corrisponde è quella proveniente da R , cioè formata di coni e coniche di Q) ed un altro complesso lineare speciale, il cui asse r' dicesi *retta polare* di r rispetto a Q , e che corrisponde ad una generazione particolare di Q , la quale però varia con r . La congruenza base del fascio di complessi polari di r , cioè la congruenza lineare di direttrici r, r' , dicesi *congruenza polare* di r . Quando la retta r appartiene al complesso quadratico Q , allora i suoi complessi polari diconsi *tangenti*, e la congruenza lineare polare *congruenza tangente* in r a Q : questa congruenza è speciale, poichè la polare r' di r viene in tal caso a coincidere con r .

(18) Si potrebbero considerare non solo i complessi polari di una retta, cioè di un complesso lineare speciale, rispetto ad un complesso quadratico, ma anche quelli di un complesso lineare qualunque non speciale. Allora il fascio di complessi polari di un complesso lineare qualunque comprenderebbe pure questo, e conterrebbe due complessi lineari speciali, le cui direttrici sarebbero coniugate rispetto a questo. La teoria ordinaria della polarità rispetto ad un complesso quadratico riescirebbe in tal modo più completa. Del resto questa estensione non presenta difficoltà, e quindi la ometto per brevità. — Per la stessa ragione ho ommesso in questa 3ª Parte del mio lavoro di fare applicazione delle teorie generali svolte nelle prime due parti allo spazio dei complessi lineari, cioè alla teoria delle serie quadratiche di complessi lineari, dei fasci di tali serie, ecc., applicazione così evidente da parer superflua.

Se si considerano delle rette dello spazio soltanto i complessi polari corrispondenti ad una determinata generazione del complesso quadratico, esse dànno luogo a proprietà, che sono casi particolari della polarità rispetto ad una quadrica qualunque. Così se una retta sta nel complesso polare di un'altra retta, il suo complesso polare passerà per questa; e altre proposizioni analoghe che si trovano immediatamente e che non stiamo neppure a sviluppare, tanto più che si trovano già, almeno in parte, nell'opera del PLÜCKER⁽¹⁹⁾. Notiamo anche come le ∞^3 rigate quadriche, formanti 2 sistemi distinti, contenute in Q , ed a cui dà origine una generazione del complesso quadratico, dànno il modo di costruire geometricamente di una retta data il complesso polare rispetto ad una generazione; questo modo è dovuto allo SCHUR⁽²⁰⁾.

130. Se si considera una determinata generazione di Q , affinché il complesso polare di una retta r rispetto a quella generazione sia speciale e quindi abbia per asse la retta polare r' di r ci vuole una condizione, cosicchè le rette r per cui si verifica tale proprietà e le loro polari r' formeranno due complessi che vogliamo studiare. Perciò notiamo che la relazione tra gli elementi r, r' della quadrica a 4 dimensioni R dello spazio lineare a 5 dimensioni S è questa che rispetto ad una quadrica data C pure a 4 dimensioni (corrispondente alla generazione considerata di Q) r ha per S'_4 polare l' S'_4 tangente in r' ad R . A questo fine basta evidentemente che r stia oltre che in R anche sulla quadrica R' polare di R rispetto a C , cioè nella quartica RR' che diremo K , ed allora r' sarà elemento di contatto di R con un S'_4 tangente ad R ed R' . Tutti questi elementi di contatto formano su R una quartica L omofocale alla quartica K (V. numeri 96, 99). Dunque:

Le rette r dello spazio a cui corrispondono per complessi polari in una determinata generazione del complesso quadratico Q dei complessi lineari speciali di assi r' , come pure questi assi stessi, costituiscono a loro volta due complessi quadratici K, L , i quali sono omofocali (cioè godono l'uno rispetto all'altro di proprietà che presto vedremo).

Se poi varia quella generazione, cioè se C muta nel fascio CR di base Q , allora muta la polare R' di R rispetto a C e quindi

(19) V. PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, p. 306.

(20) V. SCHUR, loc. cit., pp. 36 e seg.

mutano quei due complessi quadratici K , L . Ma non mutano gli elementi comuni a K e Q , giacchè questi elementi godono della proprietà di essere elementi singolari (come vedemmo al n° 94) per la quartica Q (come posta su R). Noi diremo *rette singolari* di un complesso quadratico ciò che diventano per questo gli elementi che definimmo come *singolari* per una quartica qualunque. Ciò posto avremo :

Variando la generazione considerata del complesso quadratico Q varia pure il complesso K considerato, ma descrivendo un fascio, cioè passando sempre per una congruenza di 4° grado, che costituisce l'insieme delle rette singolari di Q .

Dalla definizione data al n° 94 degli elementi singolari di una quartica qualunque risulta che una retta singolare di Q è caratterizzata dall'avere una congruenza lineare tangente non semplicemente speciale, ma doppiamente specializzata, cioè scissa in un piano ed un punto uniti, cioè dall'avere tutti i complessi polari speciali cogli assi formanti il fascio di rette che è comune a quel piano ed a quel punto. Questo fascio dicesi di *rette corrispondenti* a quella retta singolare⁽²¹⁾, e quel piano e quel punto si dicono *singolari* rispetto al complesso quadratico Q . — Ciò posto, risulta di nuovo evidente che gli ∞^1 complessi quadratici K , che corrispondono alle ∞^1 generazioni di Q , devono formare un fascio avente per base la congruenza delle rette singolari di Q , perocchè una retta r comune a due di quei complessi quadratici ha rispetto a due diverse generazioni di Q per complessi polari dei complessi lineari speciali, e quindi ha complessi polari speciali rispetto a tutte le generazioni, sicchè appartiene a tutti quegli ∞^1 complessi quadratici ed è retta singolare di Q .

131. La considerazione dei due complessi omofocali K ed L per ciascuna generazione del complesso quadratico Q è molto importante⁽²²⁾. Essa intanto ci ha già dato il significato geometrico di quel fascio di complessi quadratici che si vedono comparire quando si cercano le rette singolari di Q . Ma ci condurrà ancora ad altri risultati. Se consideriamo una generazione determinata di Q , p. e. quella che corrisponde alla quadrica C , allora risulta dalla teoria della polarità rispetto ad una quadrica sola C che ad un S'_1 od S'_2

⁽²¹⁾ V. KLEIN, *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, n° 25.

⁽²²⁾ Essa è dovuta allo SCHUR., loc. cit., p. 40.

contenuti in R corrispondono come polari rispetto a C un sistema lineare semplicemente o doppiamente infinito di S'_4 tangenti ad R' (quadrica polare di R rispetto a C): i loro elementi di contatto con questa formano pure un S'_1 od un S'_2 contenuto in R' , i quali tagliano R in 2 elementi ovvero in un S_1^2 facenti parte di $R'R$, cioè di K . E ai due diversi sistemi di S'_2 contenuti in R corrispondono per tal modo due sistemi di S_1^2 contenuti in K . Notiamo inoltre che agli elementi di un S'_2 di R' corrispondono come S'_4 polari rispetto a C gli S'_4 tangenti a R negli elementi di un S'_2 contenuto in questo, e se i primi furono presi su RR' , cioè su un S_1^2 di K , questi ultimi staranno in un S_1^2 di L . Insomma, dal fatto che L è la quartica di contatto di R colla sviluppabile degli S'_4 tangenti comuni di R e R' , segue che essa si può determinare come intersezione di R colla quadrica polare di R' rispetto ad R , mentre K è appunto l'intersezione di R' con R . Ciò posto, usando i termini della geometria della retta, abbiamo le seguenti proposizioni:

In una data generazione di Q i complessi lineari polari delle rette di un fascio f formano pure un fascio proiettivo a quello ed avente per direttrici due rette r'_1, r'_2 del complesso L , polari delle due rette r_1, r_2 di quel fascio f , le quali appartengono al complesso K . Ma vi sono anche in f due rette p'_1, p'_2 di L , le quali sono polari di due certe rette p_1, p_2 di K , che si appoggiano ad r'_1, r'_2 .

Nella stessa generazione di Q i complessi polari delle rette di un punto o di un piano formano una stella di complessi lineari aventi comune una rigata quadrica, che diremo collo SCHUR rigata polare del punto o del piano rispetto a quella generazione di Q . Le rette di questa rigata appartengono al complesso K ed hanno per rette polari quelle rette del complesso L , che stanno in quel punto od in quel piano (formandovi un cono quadrico od una conica). Le rette della rigata coniugata a quella appartengono al complesso L e sono le polari delle rette di K che stanno in quel punto od in quel piano (formandovi pure un cono quadrico od una conica).

Variando il punto od il piano nello spazio, le rigate polari dei punti e le rigate polari dei piani dello spazio formeranno i due sistemi diversi di ∞^3 rigate di una generazione del complesso quadratico K , mentre le rigate coniugate a quelle formeranno i due sistemi di rigate di una generazione del complesso quadratico L , che già notammo esser omofocale a quello.

132. Cambiando poi la generazione considerata di Q mutano pure i complessi K ed L e le rigate polari dei punti e dei piani

dello spazio. Quanto a queste rigate notiamo che dal risultato generale del n° 53 segue che il luogo degli S'_2 polari di un S'_2 qualunque di R rispetto alle ∞^1 quadriche a 4 dimensioni del fascio RC è un S_3^3 che passa per quel S'_2 e quindi taglia ancora R in un $S_2^{(3,2)}$. Dunque:

Le rigate quadriche polari di un piano (o di un punto) rispetto alle diverse generazioni di un complesso quadratico, ossia le rette le cui polari rispetto a questo complesso stanno in quel piano (od in quel punto) formano un sistema di rette di 3° ordine e 2ª classe (o 3ª classe e 2° ordine). Le rigate coniugate a quelle, cioè le rette polari delle rette di quel piano (o punto) formano pure un sistema di rette di 3° ordine e 2ª classe (o 3ª classe e 2° ordine) (23).

Quanto alla 2ª parte di quest'enunciato essa è conseguenza evidente della 1ª parte, e del resto si potrebbe dimostrare direttamente collo stesso metodo semplicissimo usato per questa. E collo stesso metodo ancora si dimostrano le seguenti proposizioni:

Le rette polari di un dato fascio di rette rispetto ad un complesso quadratico formano una rigata di 3° grado, e così pure le rette che hanno per polari le rette del fascio dato (24). Aggiungiamo poi che la prima rigata di 3° grado delle polari del fascio dato di rette è costituita dalle direttrici (non poste nel fascio stesso) delle ∞^1 congruenze lineari polari delle rette di questo fascio rispetto al complesso, congruenze che costituiscono pure un complesso quadratico contenente anche tutte le rette del piano e quelle del punto in cui sta quel fascio (complesso avente, per quanto vedremo più tardi, la caratteristica [(1 1)22], e la superficie singolare composta di quella superficie rigata, di quel piano e di quel punto). Ogni retta di quel complesso quadratico gode della proprietà che la sua congruenza polare rispetto al dato contiene una retta di quel fascio, cioè che essa e la sua retta polare tagliano una stessa retta di questo. Ecc., ecc.

133. Proponiamoci questa questione: Data una retta r , è individuata la retta polare r' rispetto ad un dato complesso quadratico Q ; viceversa, se è data r' quante sono le rette r di cui essa è polare? Nello spazio S a 5 dimensioni abbiamo dunque l' S'_4 tan-

(23) Queste proposizioni, insieme con altre notevoli, son dovute al BERTINI (« Sui complessi di 2° grado », Giornale di matem., 17, 1879, n° 4 e 6).

(24) V. BERTINI, loc. cit., n° 3 e 5, dove gli enunciati differiscono solo apparentemente da questi.

gente nell'elemento r' ad R e vogliamo cercare un altro elemento r di R tale che abbia quel S'_4 per polare rispetto ad una quadrica del fascio avente la quartica Q per base. Ora i poli di quel S'_4 rispetto a questo fascio di quadriche formano (V. n° 55, dove si pone $n=6$) un S_1^5 , che taglierà R , oltre che in r' , in altri 9 elementi. Dunque:

Ogni retta dello spazio è in generale polare di altre 9 rette rispetto ad un dato complesso quadratico.

134. Notiamo ancora, riguardo alle rette polari, che una retta del complesso Q ha se stessa per polare rispetto a questo; cerchiamo se vi è una retta r non appartenente al complesso, ma ancora tale che la sua polare r' abbia la stessa retta r per polare. Nello spazio S sulla quadrica R a 4 dimensioni si tratterà di trovare due elementi r, r' , tali che gli S'_4 tangenti in r, r' ad R siano polari rispettivamente di r' ed r rispetto a due quadriche del fascio passante per Q , e quindi che per l' S'_3 di loro intersezione passino gli S'_4 polari sia di r , sia di r' rispetto a tutte le quadriche del fascio, ed in particolare gli S_4 polari di r e di r' rispetto ad ognuna delle quadriche specializzate del fascio stesso. Ora o questa quadrica specializzata è tale che gli S'_4 polari di r e di r' rispetto ad essa sono distinti, ed in tal caso il suo elemento doppio (o la sua serie di elementi doppi) dovrà stare su entrambi quegli S'_4 polari e quindi anche sul S'_3 in cui essi si tagliano; oppure essa è tale che quei due S'_4 polari rispetto ad essa coincidono, ma perciò dovrà l' S'_1 che congiunge r ed r' contenere un elemento doppio della quadrica stessa. D'altronde nel caso generale in cui Q ha la caratteristica $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$, cioè in cui vi sono nel fascio 6 quadriche distinte semplicemente specializzate, quel S'_1 non può contenere che gli elementi doppi di due di queste, e deve contenerne due, poichè l' S'_3 polare deve passare pei rimanenti ed è individuato dal passare per 4 tali elementi; è poi chiaro che queste condizioni sono sufficienti, cioè che ogni S'_1 , il quale congiunga 2 dei 6 elementi doppi delle 6 quadriche specializzate taglia R in due elementi r, r' soddisfacenti alla questione. Dunque:

Le $\binom{6}{2} = 15$ congruenze lineari di 6 complessi fondamentali di

un complesso quadratico generale presi a due a due sono le sole congruenze non speciali che siano polari rispetto a quello di entrambe le direttrici; vale a dire le loro 15 coppie di direttrici sono le sole coppie

di rette in ciascuna delle quali ognuna delle due rette sia polare dell'altra rispetto al complesso quadratico ⁽²⁵⁾.

La dimostrazione data mostra anche come vada modificato il teorema quando il complesso quadratico non sia più generale. Così pel complesso quadratico $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$ le rette che sono reciprocamente polari rispetto ad esso sono oltre le $\binom{4}{2} = 6$ coppie di direttrici delle congruenze dei 4 complessi lineari fondamentali isolati presi a due a due, tutte le rette di 4 rigate quadriche, le rigate comuni a tre di quei 4 complessi. E così pel complesso quadratico $[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$ vi sono le 3 coppie di direttrici delle congruenze dei 3 complessi fondamentali isolati e poi tutte le rette delle congruenze stesse. Ecc., ecc.

135. Ritornando alle varie generazioni del complesso quadratico Q ed ai corrispondenti complessi quadratici K ed L , passiamo a considerare le generazioni speciali che corrispondono a quadriche a 4 dimensioni specializzate C . Quando C sia semplicemente specializzata, e quindi coincidano per essa i due sistemi di S'_2 , notiamo che K è il luogo degli elementi di R , i cui S'_4 polari rispetto a C toccano R , mentre L è il luogo degli elementi di contatto; quindi la considerazione del S'_4 polare dell'elemento doppio di C rispetto ad R mostra che L si riduce all'intersezione, contata due volte, di quel S'_4 con R , mentre K si ha costruendo su quel S'_4 la quadrica a 3 dimensioni polare di L rispetto all'intersezione del S'_4 con C e proiettandola poi dall'elemento doppio di C , con che si ottiene pure una quadrica semplicemente specializzata avente questo elemento come doppio e tagliante R secondo K . Dunque: Una generazione specializzata di Q (V. n° 126) gode della proprietà che il complesso quadratico K delle rette, che hanno per complessi polari rispetto ad essa dei complessi lineari speciali è tale che gli assi di questi, cioè le polari delle rette di K rispetto a Q sono le rette del complesso lineare L fondamentale di Q e corrispondente a quella generazione. Questo complesso è pure fondamentale per K (come del resto tutti i complessi fondamentali di Q); un punto e un piano che si corrispondano rispetto ad esso hanno la stessa rigata polare rispetto alla

(25) Questo teorema è dovuto al KLEIN (loc. cit., n° 23), e si trova dimostrato geometricamente nella Memoria del BERTINI al n° 12, con una dimostrazione notevole, anche perchè conduce ad altre proposizioni, ma che però non presenta il vantaggio, che ha la nostra, di far uso esclusivo della geometria della retta.

generazione considerata di Q , rigata che, muovendosi quel punto o quel piano viene a formare il complesso K , anzi la generazione specializzata di K , che corrisponde al complesso fondamentale L . Ogni retta di L è polare rispetto a Q di due rette di K , rette che si corrispondono rispetto ad L ; cosicchè il complesso quadratico K è rappresentato sul complesso lineare L con una corrispondenza (2, 1). E siccome risulta evidente che K è un complesso quadratico generale, così si vede che va risposto affermativamente alla domanda che lo SCHUR fa e lascia sospesa a questo proposito ⁽²⁶⁾.

§ 6.

Rette singolari di un complesso quadratico. Complessi omofocali. Superficie singolare. Invarianti assoluti.

136. Abbiamo già definito nel § precedente che cosa s'intenda per una retta *singolare* e per fascio delle sue rette *corrispondenti*. Ciò posto dalla data definizione (V. n° 130) e dalle cose esposte in generale ai n° 92, 94 e seg. sui punti singolari di una quartica qualunque risultano immediatamente tutte le proposizioni seguenti:

Una retta singolare r del complesso quadratico Q ha per complessi polari rispetto a questo un fascio di complessi speciali, i cui assi formano un fascio colla retta stessa, il fascio delle rette corrispondenti a quella retta singolare. Questo fascio è contenuto in un piano ed in un punto che diconsi *singolari* rispetto al complesso e godono della proprietà che la conica ed il cono di rette del complesso, che giacciono rispettivamente in essi, si scindono in due coppie di fasci, venendo ad avere r come retta doppia (V. n° 96). Viceversa ogni punto od ogni piano, per cui le rette del complesso che vi giacciono formano due fasci di rette, è singolare rispetto al complesso, cioè la retta comune a quei due fasci è retta singolare del complesso ed ha quel punto o quel piano per punto o piano singolare corrispondente. Ogni retta singolare r è dunque contenuta in 3 piani π, α, β ed in 3 punti P, A, B in modo che il fascio delle sue rette corrispondenti è il fascio comune a P e π , e che nel piano π le rette del complesso formano due fasci contenuti nei punti A e B , e nel punto P le rette del complesso formano due fasci contenuti nei piani α e β . Da quanto dicemmo segue che P e π sono punto e piano singolari corrispondenti ad r e che anche

(26) V. SCHUR, loc. cit., p. 46 e nota ultima.

i punti A , B ed i piani α , β sono singolari, ma corrispondenti a rette singolari del complesso diverse da r in generale.

Le rette singolari di un complesso quadratico qualunque formano in generale una congruenza di 4° grado, e noi non solo ne conosciamo le equazioni più generali (V. n° 94), ma abbiamo anche visto nel § precedente (n° 130) quale sia il significato geometrico del fascio di complessi quadratici passanti per quella congruenza.

137. Diremo *retta singolare di 2° ordine* di un complesso quadratico (V. n° 95) una retta singolare tale che il fascio delle sue rette corrispondenti si componga di rette appartenenti al complesso stesso, e *retta singolare di 3° ordine* una retta singolare le cui rette corrispondenti siano pure singolari (di 1° ordine). *Un complesso quadratico ha nel caso più generale per rette singolari di 2° ordine le generatrici di una rigata di grado 16; ed ha pure in generale 32 rette singolari di 3° ordine appartenenti naturalmente a quella rigata.* Questi numeri risultano dal fatto che le equazioni, le quali determinano queste rette singolari di 2° e 3° ordine, equazioni da noi date sotto la forma più generale (V. n° 95), sono quadratiche ed in numero rispettivamente di 4 e di 5⁽²⁷⁾.

138. Noi abbiamo già visto che il complesso quadratico contiene ∞^4 rigate quadriche, come caso particolare del numero degli S_1^2 contenuti in una quartica qualunque. Similmente come caso particolare dei risultati del n° 60 abbiamo che il complesso quadratico contiene $\infty^2 S_1'$, cioè fasci di rette. I punti ed i piani in cui questi fasci son contenuti sono appunto i punti ed i piani singolari già considerati. Questi punti e questi piani essendo in numero doppiamente infinito formano dunque ciò che nella geometria ordinaria si chiama rispettivamente superficie-luogo e superficie-inviluppo, cosicchè al complesso quadratico corrisponde una superficie dei punti singolari ed una superficie dei piani singolari. Vedremo presto la relazione intima in cui stanno.

139. Nello spazio S lineare a 5 dimensioni una schiera di quadriche che comprenda R taglia questa secondo un sistema di quar-

(27) Il KLEIN (loc. cit., n° 25) considerò pure sotto altro nome queste due specie di rette singolari d'ordine superiore e ne diede pure le equazioni, ma solo pel caso da lui considerato in quel lavoro, in cui cioè il complesso quadratico ha 6 complessi fondamentali isolati, i quali si assumono per riferimento; allora le equazioni prendono la forma semplicissima, che noi pure abbiamo dato da un punto di vista più generale alla fine del n° 95.

tiche, che dicemmo omofocali (V. n° 96). Diremo dunque *complessi quadratici omofocali* i complessi di rette da esse costituiti; e dai risultati generali ivi trovati avremo immediatamente i teoremi seguenti:

Una serie di complessi quadratici omofocali si compone di complessi tali che una retta singolare dell'uno ha per rette corrispondenti rette singolari degli altri, cosicchè vi è un complesso di rette di grado 12 (un $S_{n-3}^{8(n-3)}$ per $n=6$, cioè un S_3^{24} — V. n° 92) composto di ∞^2 fasci che sono di rette corrispondenti a rette singolari per ogni complesso quadratico della serie, sicchè quel complesso di rette comprende tutte le congruenze di rette singolari dei complessi quadratici della serie. In ogni suo fascio ogni retta è singolare per uno di questi complessi e così le rette di tutti i fasci vengono a corrispondere proiettivamente tra loro ed ai complessi quadratici di cui sono rette singolari. I punti ed i piani di quei fasci sono punti e piani singolari per tutta la serie omofocale, sicchè questa si compone di complessi aventi comuni le superficie dei punti e dei piani singolari⁽²⁸⁾.

Nella schiera delle quadriche, che colle intersezioni con R determinano un sistema di quartiche omofocali ve ne sono in generale, come vedemmo, di quelle specializzate (1, 2, ovvero 3 volte) come inviluppi ed i loro nuclei tagliano R in quartiche (a 2, 1, ovvero 0 dimensioni), che indistintamente chiamammo (n° 101) *focali* per quel sistema di quartiche. Una quadrica semplicemente specializzata determina su R una quartica, che si riduce ad un R_3^2 doppio, contenente l' R_2^4 focale; ma una quadrica specializzata più d'una volta passa, come luogo, per ogni elemento dello spazio S , e quindi la quartica corrispondente svanisce, e solo rimane a rappresentarla una focale. Esprimendoci dunque colla geometria della retta abbiamo:

Tutti i complessi quadratici (propriamente detti) di una serie omofocale hanno la stessa caratteristica, ed hanno pure comuni tutti gl'invarianti assoluti meno uno, cioè gl'invarianti assoluti del gruppo composto dei complessi quadratici specializzati della serie. Questi complessi quadratici specializzati corrispondono ai gruppi caratteristici di quella caratteristica e sono tante volte specializzati quanti sono gli

(28) Non viceversa tutti i complessi quadratici aventi comuni i punti ed i piani singolari formano sempre una serie omofocale. Ciò è solo vero nel caso generale ed in molti casi particolari; non però in tutti, come si vedrà nel seguito. Soltanto quelle che io chiamo *focali* della serie definiscono questa in modo completo, ma esse non sono sempre definite dalla superficie dei punti e piani singolari. Questa osservazione importante, pare non fosse stata fatta finora.

indici di quei gruppi. Un complesso quadratico semplicemente specializzato è costituito, come luogo di rette, dal complesso lineare fondamentale, contato due volte, che corrisponde a quel gruppo caratteristico. In questo complesso lineare vi è allora una congruenza focale per la serie omofocale di complessi quadratici; le rette di quella congruenza fungono da rette singolari per quel complesso quadratico speciale, sì che in ogni fascio di rette singolari vi è sempre una retta di quella congruenza quadratica. Invece un complesso quadratico specializzato più d'una volta della serie omofocale comprende, come luogo, tutte le rette dello spazio, ed è solo più rappresentato da una focale (rigata biquadratica, oppure quaterna di generatrici di una rigata quadrica), le cui rette fungono ancora come rette singolari per quel complesso quadratico, sì che vi è sempre una di esse in ciascun fascio di rette singolari della serie omofocale. Più precisamente ad un gruppo caratteristico contenente 2 o 3 indici (non occorre considerare il caso di 4 o più indici, poichè allora, e solo allora, ogni complesso quadratico della serie si scinde in due complessi lineari) corrisponde, come sappiamo, un sistema lineare semplicemente o doppiamente infinito di complessi lineari, che sono fondamentali per tutta la serie di complessi quadratici omofocali; le loro rette comuni formano rispettivamente una congruenza lineare od una rigata quadrica (generalì o speciali), nella quale vi è rispettivamente una rigata biquadratica focale od una quaterna di rette focale, tali che ognuno degli ∞^2 fasci di rette singolari della serie omofocale contiene una retta di quella rigata biquadratica o di quella quaterna di rette.

Ogni congruenza quadratica, rigata biquadratica o quaterna di rette (di una rigata quadrica), che così corrisponde come focale ad un gruppo caratteristico composto di 1, 2 o 3 indici, si compone dunque di rette tali che ognuno degli ∞^2 fasci di rette singolari ne contiene una. Ma dalle cose viste ai n° 85 e 101 sui punti doppi delle varie specie di una sviluppabile di 4^a classe segue che viceversa ogni retta di una congruenza quadratica focale sta in generale su due di quei fasci, ogni retta di una rigata biquadratica focale su ∞^1 fasci, formanti una congruenza lineare speciale avente quella retta per direttrice, e finalmente ogni retta di una quaterna focale sta su ∞^2 fasci di rette singolari formanti un complesso lineare speciale avente quella retta per asse. In questi ultimi due casi se nei fasci si prendono precisamente quelle rette che sono singolari per un determinato complesso della serie, le rette singolari di questo appoggiate su una retta di una rigata biquadratica focale formeranno una rigata quadrica e le rette

singolari appoggiate su una retta di una quaterna focale formeranno una congruenza lineare.

Una schiera di quadriche, che comprende una data quadrica R , è perfettamente determinata quando oltre a questa sia data un'altra quadrica, comunque questa sia specializzata come inviluppo. Dunque :

Esiste sempre una ed una sola serie di complessi quadratici omofocali avente una data congruenza quadratica focale, od una data rigata biquadratica focale od ancora una data quaterna focale (di rette d'una rigata quadrica), qualunque sia questa focale data.

Questi risultati hanno un'importanza capitale pel problema, di cui ci occuperemo poi, della classificazione dei complessi quadratici. Aggiungiamo che da una proposizione del n° 102 segue che :

Per una retta qualunque dello spazio passano in generale 4 complessi quadratici di una serie omofocale, ma quando tra essi ve ne siano di quelli specializzati più di una volta, ai quali perciò corrisponda un gruppo caratteristico contenente più di un indice, cioè (e e' e'' ...), allora un tale complesso fisso conta e' + e'' + ... volte tra i complessi quadratici passanti per la retta stessa, sicchè il numero dei complessi mobili passanti per una retta qualunque dello spazio è diminuito di altrettanto ⁽²⁹⁾.

140. Da un complesso quadratico qualunque si possono ottenere tutti i complessi quadratici omofocali in un modo assai semplice. Ricordiamo in fatti che nello spazio lineare S a 5 dimensioni due quadriche polari reciproche rispetto ad R determinano su R due quartiche omofocali, cosicchè, se si tien fissa l'una di queste quartiche, variando però la quadrica passante per essa che la determina, la quadrica polare di quella rispetto ad R descriverà una schiera di quadriche, che tagliano R secondo la serie di quartiche omofocali a quella fissa. Notando inoltre che due quadriche polari rispetto ad R hanno pure i due sistemi di S'_2 dell'una polari dei due sistemi di S'_2 dell'altra, abbiamo il seguente teorema (di cui un caso s'era già incontrato al n° 130) :

⁽²⁹⁾ Pei complessi quadratici omofocali vale una proprietà analoga a quella di un sistema di quadriche omofocali dello spazio ordinario di tagliarsi ortogonalmente. I complessi omofocali formano cioè quello che il KLEIN chiama « *Involutionsystem* ». Questo risulterebbe subito dal teorema generale da noi dato al n° 83, ma non vi ci fermiamo, poichè quella proprietà fu già svolta completamente dal KLEIN stesso (*Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann., V, pp. 260, 271).

Dato un complesso quadratico qualunque, se si prendono dei due sistemi distinti di ∞^3 rigate quadriche di una sua generazione le rigate quadriche coniugate (poste cioè sulle stesse superficie ordinarie di 2° grado), queste formeranno i due sistemi di ∞^3 rigate quadriche di una stessa generazione di un altro complesso quadratico omofocale a quello; cosicchè variando la generazione considerata di quello si ottiene tutta la serie dei suoi complessi quadratici omofocali. In particolare le generazioni speciali del dato complesso danno luogo ai complessi fondamentali doppi⁽³⁰⁾.

141. Si vede in questo modo come ad ogni generazione di un complesso quadratico Q corrisponda in un certo senso un altro complesso quadratico della serie omofocale in modo che anche questo ha una generazione (coniugata in un certo senso a quella considerata di Q), a cui corrisponde il complesso quadratico Q . Così le varie generazioni di Q corrispondono proiettivamente ai complessi quadratici omofocali di Q ; in particolare alla generazione di Q composta di coni e coniche corrisponde lo stesso complesso Q (V. n° 99). Prendendo di una retta r il fascio di complessi polari rispetto a Q , sappiamo che essi corrispondono proiettivamente alle varie generazioni di Q : dunque corrisponderanno pure proiettivamente alla serie dei complessi omofocali di Q ed in particolare il complesso polare speciale che ha r per asse corrisponderà a Q . Quindi gli ∞^5 fasci di complessi lineari polari delle ∞^4 rette dello spazio rispetto agli ∞^1 complessi quadratici di una serie omofocale hanno i loro elementi che si corrispondono proiettivamente tra loro ed a questi complessi quadratici. In particolare quei complessi polari che corrispondono alle generazioni speciali di questi non sono altro che i complessi di quei fasci involutori al complesso fondamentale od al sistema lineare di complessi fondamentali, che corrisponde a quelle generazioni speciali: essi formano in quei fasci dei gruppi tutti proiettivi tra loro, e gl'invarianti assoluti di uno qualunque di questi gruppi sono (V. n° 102 e 107) gl'invarianti assoluti della serie omofocale di complessi quadratici considerata complessivamente, mentre gl'invarianti assoluti di uno particolare di quei complessi quadratici sono gl'invarianti assoluti del gruppo stesso a cui si aggiunga quel complesso lineare polare che corrisponde a quel complesso quadratico particolare. Tra i vari fasci di complessi polari

(30) V. SCHUR, loc. cit., p. 48.

considerati vi sono gli ∞^2 fasci polari di rette singolari dei dati complessi quadratici. Come caso particolare noi possiamo dunque enunciare il seguente teorema, che pure è generalissimo, e la cui importanza è evidente:

Gli invarianti assoluti di un complesso quadratico di data caratteristica si ottengono come segue: Prendasi di una retta arbitraria r dello spazio il fascio dei complessi polari rispetto al complesso quadratico: questo fascio conterrà un complesso involutorio a tutta la serie di complessi lineari fondamentali che corrisponde ad un gruppo caratteristico qualunque contenuto nella caratteristica data, e si hanno così nel fascio altrettanti complessi lineari $c_1, c_2, \dots, c_g$ quanti sono i gruppi caratteristici stessi. Orbene il gruppo di $g + 1$ elementi composto del complesso lineare speciale di asse r e di $c_1, c_2, \dots, c_g$ in quel fascio rimane proiettivo a se stesso movendo r nello spazio, ed ha per invarianti assoluti, precisamente gli invarianti assoluti del complesso quadratico, sicchè questi sono espressi da $g - 2$ rapporti anarmonici indipendenti di quei $g + 1$ elementi. Se poi si vogliono gli invarianti assoluti della serie omofocale di complessi quadratici, basterà togliere l'elemento r da quel gruppo, sicchè si avranno solo più i g elementi $c_1, c_2, \dots, c_g$, i cui $g - 3$ invarianti assoluti saranno quelli cercati. Quindi se delle rette r dello spazio si prendono i fasci di complessi polari rispetto a qualunque dei complessi quadratici della serie omofocale data, sempre i gruppi composti dei g complessi lineari del fascio $c_1, c_2, \dots, c_g$ ottenuti nel modo detto saranno tra loro proiettivi.

In particolare i fasci di rette singolari dei complessi omofocali, i quali già sapevamo corrispondere colle loro rette proiettivamente a questi, contengono g rette appartenenti a congruenze quadratiche, o rigate biquadratiche, o quaterne di rette focali per la serie omofocale: i gruppi di queste g rette corrispondono proiettivamente ai gruppi di g elementi testè considerati, e possono servire come quelli a dare gli invarianti assoluti della serie omofocale; se poi vi si aggiungono le rette singolari di un determinato complesso di questa serie si avranno gruppi di $g + 1$ rette, i cui invarianti assoluti saranno quelli di questo complesso.

Il numero degli invarianti assoluti della serie omofocale di complessi quadratici avente una data caratteristica è dunque uguale al numero dei gruppi caratteristici che compaiono in questa diminuito di 3, e quello degli invarianti assoluti di un complesso quadratico della serie è superiore a questo di un'unità. Così il complesso quadratico più generale, cioè di caratteristica $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$, ha 4 invarianti assoluti (e la sua serie omofocale ne ha 3); tutti quelli, che hanno

altra caratteristica, ne hanno un numero inferiore, che sapremo subito riconoscere dalla caratteristica stessa ⁽³¹⁾.

Occorre ancora che notiamo, a proposito degli *invarianti assoluti*, che questi sono qui usati appunto nel loro senso ordinario; vale a dire se due enti geometrici della stessa specie (nel nostro caso « stessa caratteristica ») hanno gli stessi invarianti assoluti, si possono trasformare l'uno nell'altro con una trasformazione proiettiva dello spazio di *punti* (o piani). Che questo sia il senso che si deve attribuire a quell'espressione nei nostri teoremi risulta dalla proposizione dimostrata al n° 107, in virtù della quale ogni trasformazione proiettiva dello spazio lineare a 5 dimensioni, che trasforma la quadrica R delle rette in se stessa, equivale ad una trasformazione proiettiva (collineare o reciproca) dello spazio lineare a 3 dimensioni di punti o di piani.

142. Veniamo ora a considerare più minutamente la superficie dei punti e dei piani singolari, sempre, ben inteso, dal punto di vista della pura geometria della retta. Consideriamo una retta qualunque r dello spazio: per essa passerà almeno un complesso quadratico di una data serie omofocale e sia Q . Noi vogliamo cercare quanti punti e quanti piani singolari della serie omofocale, e quindi anche di Q , passano per r e trovare anche una relazione importante che li lega. Nello spazio S a 5 dimensioni, sulla quadrica R , è dunque data una quartica Q , su cui un elemento r . L' S_3' tangente in r a Q taglia R e tutte le altre quadriche del fascio avente Q per base in un fascio di S_2^2 aventi in r un elemento doppio (coni quadrici in uno spazio ordinario S_3' , aventi comune il vertice r e formanti fascio): l'intersezione di questi S_2^2 si compone dunque in generale di 4 S_1' passanti per r e costituenti l'intersezione di Q col S_3' che la tocca in r . Dunque, nel linguaggio ordinario potremo dire:

La congruenza lineare speciale tangente in una data retta r ad un complesso quadratico ha comuni in generale con questo 4 fasci di rette, i quali appartengono alla congruenza e quindi passano per r .

⁽³¹⁾ Il WEILER, nella sua Memoria già citata (pp. 203-204), ha pure un cenno degli invarianti assoluti di un complesso quadratico; ma, senza darne il significato geometrico, parla della loro enumerazione come di cosa, se non difficile, almeno penosa a farsi; ed assegna il numero di questi invarianti assoluti soltanto per la sua 1^a forma canonica (dando numeri che concordano coi nostri). Noi vediamo invece come la caratteristica del complesso permetta di dire immediatamente il numero degli invarianti assoluti corrispondenti e di più ne conosciamo il significato geometrico.

I 4 punti ed i 4 piani che contengono questi 4 fasci sono dunque 4 punti singolari e 4 piani singolari di Q (e quindi di tutta la serie omofocale) passanti per r , ed è pur chiaro dal ragionamento fatto che per r non può passare altro punto od altro piano singolare. Quindi, ricordando anche la proprietà della congruenza lineare speciale di direttrice r di far corrispondere proiettivamente tra loro i punti ed i piani passanti per r (V. n° 111), avremo:

Ogni retta dello spazio contiene in generale 4 punti e 4 piani singolari di una serie omofocale di complessi quadratici. Il gruppo di quei 4 punti è proiettivo al gruppo di quei 4 piani.

Questo importante teorema è dovuto al KLEIN ⁽³²⁾.

Ricordando la definizione di retta singolare e supponendo che r sia tale pel complesso Q , vediamo facilmente dal ragionamento fatto in quella dimostrazione che in tal caso, senza che cessino di esservi 4 fasci di rette passanti per r e appartenenti a Q , due di essi sono venuti a stare nello stesso piano (il piano singolare corrispondente ad r) e gli altri due nello stesso punto (il punto singolare corrispondente ad r); perocchè l' S'_3 tangente in r a Q toccherà R lungo un S'_1 (quello degli elementi corrispondenti ad r) e quindi la taglierà in due S'_2 di diverso sistema aventi comune quel S'_1 , e questi sono precisamente quel piano e quel punto aventi comune il fascio delle rette corrispondenti di r . Di qui segue che per una retta singolare due dei 4 punti singolari e due dei 4 piani singolari che passano per essa son venuti a coincidere nel punto singolare e nel piano singolare corrispondenti alla retta singolare stessa. Ciò vale per tutte le rette del complesso, di grado 12 in generale, che vedemmo esser costituito dalle ∞^1 congruenze di 4° grado delle rette singolari dei complessi quadratici della serie omofocale. Tutte queste rette sono dunque tangenti alla superficie dei punti singolari ed a quella dei piani singolari, ed è anche chiaro che esse

(32) Lo enunciò nella Memoria citata (n° 14) e ne diede più tardi una dimostrazione elegante, ma notevolmente più complicata della nostra, nella breve Memoria « *Ueber die Plücker'sche Complexfläche* » (Math. Ann., VII, p. 208). — E qui voglio notare, senza entrare in particolari, che la dimostrazione, che sopra ne abbiamo dato, si applica, quasi senza mutamenti, al caso di un complesso di grado qualunque, cioè serve a dimostrare il seguente teorema: ogni retta r di un complesso algebrico qualunque è rispettivamente retta d'inflexo e tangente cuspidale pei coni e curve del complesso che corrispondono a 4 suoi punti e a 4 suoi piani ed il rapporto anarmonico di quei punti è uguale a quello di quei piani; teorema che è dovuto al VOSS (« *Ueber Complexe und Congruenzen* », Math. Ann., IX, p. 63).

comprendono tutte le tangenti dell'una o dell'altra di queste superficie. Dunque queste, avendo comuni le tangenti, formano nella geometria ordinaria una stessa superficie come luogo di punti e rispettivamente come involuppo di piani. Esprimendoci col linguaggio ordinario noi così troviamo che:

I punti singolari ed i piani singolari di una serie omofocale di complessi quadratici formano una stessa superficie di 4° ordine e 4ª classe (e rango 12), le cui tangenti formano i fasci di rette singolari di quei complessi, e che gode della proprietà che i suoi quattro punti ed i suoi quattro piani passanti per una retta qualunque dello spazio hanno gli stessi rapporti anarmonici. Questa è nel caso più generale la così detta superficie di KUMMER.

143. Il teorema di KLEIN si può anche dimostrare in quest'altro modo, che ci dà la intima ragione del teorema stesso. La retta r qualunque dello spazio contenga il punto singolare A della serie omofocale di complessi, e a questo punto corrisponda il piano singolare α . Il fascio $A\alpha$ si comporrà di rette, ciascuna delle quali è singolare per uno di quei complessi quadratici, e vi è corrispondenza proiettiva tra la serie di questi e quel fascio di rette. Vi sono, in generale, come sappiamo, 4 complessi della serie passanti per r , e questi hanno in quel fascio certe 4 rette come rette singolari. I quattro fasci che congiungono queste rette ad r appartengono rispettivamente a quei 4 complessi e quindi i 4 piani su cui stanno saranno 4 piani singolari della serie omofocale passanti per r . Viceversa ogni piano singolare passante per r taglia il piano α in una retta, che è singolare per un complesso della serie, il quale dovrà quindi necessariamente contenere r . Dunque conchiudiamo anzitutto che per ogni retta r passano 4 piani singolari della serie omofocale; e poi che questi 4 piani tagliano α secondo 4 rette (aventi con quei 4 piani lo stesso rapporto anarmonico) singolari pei quattro complessi quadratici della serie, che passano per r , ed hanno quindi, come queste, il loro rapporto anarmonico uguale a quello di questi 4 complessi della serie. Similmente su r vi sono quattro punti singolari ed il loro rapporto anarmonico è uguale a questo stesso. Dunque i quattro punti singolari ed i 4 piani singolari hanno lo stesso rapporto anarmonico: *Ogni retta è contenuta in generale in 4 punti e 4 piani singolari, sì che i rapporti anarmonici di quelli e di questi sono uguali al rapporto anarmonico*

dei quattro complessi della serie omofocale passanti per la retta stessa ⁽³³⁾.

144. La superficie che vedemmo essere nello stesso tempo luogo dei punti singolari ed involuppo dei piani singolari della serie omofocale di complessi quadratici dicesi *superficie singolare* di questi complessi. Essa in un certo senso individua la serie omofocale ⁽³⁴⁾ e ne è individuata, cosicchè gl'invarianti assoluti della serie stessa sono pure in generale i suoi e viceversa. Le rette singolari di ogni complesso della serie le sono tangenti; in particolare le rette di ogni congruenza quadratica focale le sono tangenti doppie, poichè appartengono a due fasci di rette singolari, cioè di tangenti della superficie. Nel caso più generale vi sono 6 tali congruenze quadratiche focali, composte di 6 sistemi distinti di tangenti doppie della superficie di KUMMER; e risulta pure dalla teoria generale che viceversa ogni tangente doppia della superficie apparterrà ad una di quelle congruenze.

Se tra i gruppi caratteristici della caratteristica della serie omofocale ve n'è uno il quale contenga due indici, allora vedemmo che compare come focale una rigata biquadratica tale che ogni fascio di rette singolari, cioè di tangenti della superficie singolare, contiene una retta di quella rigata (V. n° 139). Ne segue immediatamente che in tal caso questa rigata stessa costituisce coi suoi punti e suoi piani la superficie singolare.

⁽³³⁾ Questo completamento del teorema di KLEIN si trova in sostanza enunciato a p. 66 della Memoria del VOSS «*Ueber Complexe und Congruenzen*» già citata: soltanto l'enunciato del VOSS è più analitico. Noterò a questo proposito che, benchè in quest'ultima parte del mio lavoro non sia fatto alcun uso di equazioni, pure tutte quelle equazioni che importasse conoscere, intorno ai complessi quadratici p. es., si ottengono immediatamente come casi particolari di quelle date nelle prime parti. Così l'equazione più generale di una serie omofocale di complessi quadratici, che in tal modo si ha sotto una forma, che vale qualunque siano il sistema di riferimento e la specie di quei complessi quadratici.

⁽³⁴⁾ Questo non soffre eccezione alcuna se s'intende per *superficie singolare* il luogo dei centri (e l'involuppo dei piani) dei fasci di rette singolari della serie omofocale, ma ne soffre se s'intende, come appunto si usa, il luogo di quei punti che sono *singolari* pel solo fatto dello scindersi il relativo cono del complesso in una coppia di fasci (V. la nota al n° 139). Si vedrà infatti che in tutti i casi in cui nella caratteristica dei complessi quadratici compare un gruppo caratteristico composto di 3 indici, allora la superficie singolare, intesa nel senso ordinario, si riduce ad una superficie ordinaria di 2° grado, mentre nel primo senso si riduce alla corrispondente quaterna focale di rette, e solo in questo senso essa individua la serie omofocale.

Finalmente, se tra i gruppi caratteristici ve n'è uno che contiene tre indici, allora vedemmo pure che compare come focale una quaterna di rette di una rigata quadrica (le quali possono anche coincidere in vari casi, e, come vedremo, divengono infinite, cioè comprendono tutte le generatrici di quella rigata quadrica nel solo caso $[(1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1)]$), i cui punti ed i cui piani saranno dunque i punti ed i piani singolari, sicchè la superficie singolare si potrebbe intendere ridotta a questa quaterna di rette, ma, per ragioni che vedremo, si usa ritenere invece per superficie singolare la superficie quadrica su cui sta quella quaterna. Però è chiaro che bisognerà dare questa quaterna di rette per individuare la serie omofocale di complessi quadratici e non basterà dare soltanto quella rigata quadrica che la contiene.

145. Ora siamo anche in grado di riconoscere meglio la natura delle rette singolari di 2° e 3° ordine, quali le definimmo al n° 137. Con un ragionamento basato sullo stesso metodo che quello usato al n° 142 per dimostrare il teorema di KLEIN si trova assai facilmente che:

La rigata (di grado 16 in generale) delle rette singolari di 2° ordine di un complesso quadratico è composta di tangenti principali della superficie singolare (cioè le rette singolari di 2° ordine sono tali che per ciascuna di esse due dei 4 fasci di rette del complesso passanti per essa son venuti a coincidere), e che:

Le (32 in generale) rette singolari di 3° ordine hanno la proprietà che per ciascuna di esse 3 dei 4 fasci di rette del complesso passanti per essa son venuti a coincidere in un fascio, di cui o il punto o il piano contiene due fasci coincidenti in quello di rette del complesso. Ora usasi chiamare *punto doppio* o *piano doppio* di un complesso quadratico un punto od un piano, pel quale appunto le rette del complesso formino un fascio doppio. Dunque: *vi sono in generale 16 punti doppi e 16 piani doppi per un complesso quadratico.*

Si dimostra poi che ogni piano o punto doppio per un complesso quadratico è pur tale per la superficie singolare e per gli altri complessi della serie omofocale: solo varia insieme con questi il vertice del fascio sul piano doppio od il piano del fascio pel punto doppio, descrivendo il primo la conica di contatto del piano doppio colla superficie singolare, il secondo il cono osculatore nel punto doppio alla superficie stessa. Nello stesso tempo la retta singolare di 3° ordine si muove rimanendo sempre tangente a quella conica o giacente in quel cono. Queste proprietà si trovano già dimostrate in

modo sintetico semplice nell'opera del PLÜCKER (V. n° 312, 321), perciò ci limitiamo ad enunciarle. Osserviamo ancora che ognuna delle coniche di contatto (16 in generale) della superficie singolare coi suoi piani doppi ed ognuno dei coni osculatori nei punti doppi di quella superficie vengono così a corrispondere nel modo detto, elemento per elemento, proiettivamente alla serie omofocale dei complessi quadratici; cosicchè si potrà talora, per avere gl'invarianti assoluti di tutta la serie o di un complesso determinato, considerare p. e. la punteggiata che corrisponde alla serie dei complessi su una di quelle coniche di contatto. Così nel caso $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ in cui vi sono 6 complessi fondamentali isolati, e quindi 16 punti e 16 piani doppi per la superficie singolare, allora gl'invarianti assoluti di questa saranno dati dal gruppo dei 6 punti doppi che stanno sulla conica di contatto di un piano doppio.

146. Dalle proposizioni del n° 97 risulta che nel caso generale: L'insieme di tutte le rette che sono singolari di 1° ordine per complessi quadratici della serie omofocale sono quelle per cui coincidono due dei 4 complessi di questa che vi passano e sono, come sappiamo, le tangenti della superficie singolare; esse formano un $(S_3^{24}$, cioè un) complesso di rette di grado 12. Le rette singolari di 2° ordine di complessi della serie sono rette per cui coincidono 3 dei 4 complessi che vi passano e sono le tangenti principali (tripunte) della superficie singolare, le quali formeranno perciò (un S_2^{48} , cioè) una congruenza di grado 24. (Questo grado, come pure quello del complesso delle tangenti sono confermati dalle formule relative alla teoria ordinaria delle superficie). Finalmente le rette singolari di 3° ordine sono tutte le rette per cui coincidono tutti 4 i complessi della serie passanti per esse, e sono le tangenti alle coniche di contatto dei piani doppi colla superficie, e le generatrici dei coni osculatori nei suoi punti doppi; tutte queste rette devono in generale formare per la formula del n° 97 un S_1^{64} , cioè una rigata di grado 64, il che appunto accade, poichè si hanno 16 coni quadrici e 16 involuppi piani di 2ª classe.

§ 7.

Congruenza quadratica: polarità, rette singolari e superficie focale.
Congruenze quadratiche omofocali; loro curva singolare.

147. Nel § 4 noi ci siamo già occupati della congruenza quadratica, specialmente per quanto riguarda le 5 coppie di sistemi di

∞^1 rigate quadriche contenute in generale in una tal congruenza e la generazione di questa mediante fasci di congruenze lineari. Ora ci rimane a fare per le congruenze quadratiche (e per le rigate bi-quadratiche) le cose analoghe a quelle svolte negli ultimi due paragrafi sui complessi quadratici. Per questo basterà nei risultati generali delle prime due parti del presente lavoro considerare uno spazio lineare a 4 dimensioni (od a tre dimensioni) invece che a 5, e supporvi che in una quadrica fissa R_3 (od R_2) l'elemento si chiami *retta*, sicchè tali quadriche rappresenteranno rispettivamente un complesso lineare od una congruenza lineare di rette.

Rispetto ad una congruenza quadratica Γ contenuta in un complesso lineare c ogni retta r di questo avrà un fascio di congruenze lineari polari contenute in questo: ogni congruenza polare corrisponderà ad una generazione di Γ ⁽³⁵⁾. La rigata quadrica di c , nella quale si taglieranno le congruenze lineari di quel fascio si dirà *rigata polare* di r rispetto a Γ . Tra quelle congruenze lineari due saranno speciali: l'una avente per direttrice r , l'altra avente una certa direttrice r' che si dirà *retta polare* di r rispetto a Γ . Queste due rette r, r' sono quelle due uniche rette di c che in generale stanno sulla rigata quadrica coniugata alla rigata polare di r . Prendendo in ciascuno degli ∞^1 fasci di rette di c i quali passano per r la retta coniugata armonica di r rispetto a quelle due rette del fascio che appartengono alla congruenza quadratica Γ , le ∞^1 rette, che così si ottengono, costituiscono appunto la rigata polare di r .

Considerando la polarità rispetto ad una determinata delle generazioni di Γ si hanno immediatamente dalla teoria generale della polarità rispetto ad una quadrica dei teoremi analoghi ad altri noti sui complessi quadratici. Così, se due rette di c sono tali che la congruenza lineare polare della prima rispetto a quella generazione di Γ passi per la seconda retta, anche la congruenza lineare polare di questa passa per la prima. Se poi consideriamo un piano od un punto qualunque dello spazio, o meglio il fascio di rette del complesso lineare c che ogni tal punto o piano contiene, le congruenze polari di quelle rette formeranno un fascio, tagliandosi in una rigata

⁽³⁵⁾ Lo SCHUR (Memoria citata, p. 19) nello studio delle proprietà polari di una congruenza quadratica non considera che le 5 generazioni che corrispondono alle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche contenute nel caso più generale nella congruenza. Ma la teoria riesce più completa se si considera la polarità rispetto a tutte le ∞^1 generazioni di questa. Così vi è anche il vantaggio che essa vale, comunque la congruenza si specializzi.

quadrica, che si dirà la rigata *polare*, rispetto a quella generazione di Γ , del fascio considerato di c , oppure del punto o del piano, che contengono quel fascio. Le due rette della rigata quadrica coniugata a quella, le quali appartengono pure a c , saranno rispettivamente le direttrici di due congruenze lineari speciali del fascio, e saranno le rette polari di due certe rette di quel fascio di rette.

Di qui segue che per ogni generazione di Γ si potranno considerare due altre congruenze quadratiche K , L , che godranno di proprietà analoghe a quelle che nel § 5 riconoscemmo avere i due complessi quadratici, che indicammo pure con K , L . La congruenza quadratica K si comporrà delle rette di c , le cui congruenze lineari polari rispetto a quella generazione di Γ sono speciali, e gli assi di queste, cioè le rette polari di quelle rispetto a Γ , formeranno l'altra congruenza quadratica L . Variando la generazione considerata di Γ varieranno quelle due congruenze quadratiche (restando sempre *omofocali* tra loro, in un senso che vedremo presto) e la K descriverà un fascio che comprende Γ , cioè passerà costantemente per una rigata di grado 8 contenuta in questa. Ogni retta r di questa rigata gode della proprietà che tutte le sue congruenze polari sono speciali con assi che formano un fascio di rette di c , fascio passante per r . Tale retta si dirà *singolare* per la congruenza quadratica.

148. Vedemmo che una retta qualunque r di c ha rispetto a Γ una rigata quadrica polare. Poniamo ora che r appartenga a Γ . Allora segue dalla costruzione vista per la rigata polare, — od anche dal fatto che quella rigata, essendo l'intersezione S_1^2 di c , cioè R_3^2 , col S_2' polare di r , si scinde in due S_1' quando r venga a star su Γ , e quindi quel S_2' divenga tangente in r ad R_3^2 , — che la rigata polare di r si scinderà in due fasci di rette di c , ciascuno dei quali avrà la proprietà che le due rette di Γ che esso deve contenere coincidono in r . I punti ed i piani dello spazio che contengono tali fasci di c sogliono chiamarsi, seguendo KUMMER, *fuochi* e *piani focali* di Γ . Dunque ogni retta di una congruenza quadratica appartiene a due fuochi ed a due piani focali di questa ⁽³⁶⁾.

⁽³⁶⁾ Questa proprietà, come dimostrò il KUMMER (« *Allgemeine Theorie der Strahlensysteme* » § 4, Crelle's Journal, 57, 1859), è generale e vale per sistemi di rette qualunque, anche trascendenti. Ora la nostra dimostrazione si estende senza difficoltà al caso più generale. In fatti, un sistema di rette non è altro che uno spazio a 2 dimensioni qualunque S_2 giacente sulla quadrica a 4 dimensioni delle rette R_4 . Ora in ogni elemento r dello spazio a 2 dimensioni S_2 , nelle cui vici-

Consideriamo ancor più in particolare una *retta singolare* della congruenza quadratica. La definizione datane or ora, o quella equivalente data in generale per gli elementi singolari di una quartica a quante si vogliano dimensioni mostrano che per una tal retta r la rigata quadrica polare si specializza doppiamente, cioè i due fasci in cui essa si scindeva nel caso precedente vengono a coincidere in un fascio solo, che diremo di *rette corrispondenti* alla retta singolare r , per cui pure passa quel fascio. Dunque ogni retta singolare di una congruenza quadratica è caratterizzata dal fatto che per essa i due fuochi ed i due piani focali vengono a coincidere. Queste rette singolari formano in generale, come vedemmo, una rigata di grado 8.

Finalmente potremo chiamare *rette singolari di 2° ordine* (V. n° 95) della congruenza quadratica Γ quelle rette singolari, ciascuna delle quali ha per fascio di rette corrispondenti un fascio di rette della congruenza. Le equazioni generali del n° 95 possono servire a determinare la rigata delle rette singolari (di 1° ordine) e le rette singolari di 2° ordine di ogni congruenza quadratica di cui sia data l'equazione insieme con quella che caratterizza le rette, mediante 5 sole coordinate omogenee qualunque, capaci però, se soddisfano a quest'ultima equazione, di rappresentare ogni retta del complesso lineare contenente la congruenza che si considera. Esse mostrano che le rette singolari formano in generale, come già notammo, una rigata di grado 8; ma anche che le rette singolari di 2° ordine sono in generale 16 e quindi che altrettanti sono i fasci di rette contenuti nella congruenza quadratica.

149. Nel § precedente (V. n° 139) noi vedemmo come una serie omofocale di complessi quadratici abbia nel caso più generale ed in moltissimi dei casi particolari delle congruenze quadratiche focali (nel caso più generale in numero di 6), e vedemmo anche come viceversa *ogni congruenza quadratica, senza alcuna eccezione, è focale per una serie omofocale di complessi quadratici*. Questo teorema ha molta importanza, poichè mostra come lo studio e la classificazione delle superficie focali delle congruenze quadratiche son compresi in

nanze questo sia continuo, esiste un S'_2 lineare *tangente*, cioè che ne contiene gli elementi infinitamente vicini, e questo S'_2 essendo pure tangente per conseguenza ad R_4 la taglierà in due S'_1 che pure saran^{do} tangenti a quel S_2 e passeranno per r . Ciò significa che ogni retta di un sistema di rette sta in due fasci, ciascuno dei quali contiene oltre a quella un'altra retta del sistema infinitamente vicina (e che la taglia).

quelli delle superficie singolari dei complessi quadratici (nè, ch'io sappia, era ancor stato dimostrato da alcuno). Ricordando inoltre quanto abbiamo visto, cioè che una congruenza focale di una serie omofocale di complessi quadratici si compone di tangenti doppie della superficie singolare comune a questi, risulta che:

Ogni congruenza quadratica determina come luogo dei suoi fuochi ed inviluppo dei suoi piani focali una stessa superficie, la quale è superficie singolare per una serie di complessi quadratici omofocali (aventi quella congruenza per una focale) ed è quindi in generale una superficie di 4° ordine e 4ª classe. Il complesso lineare cui appartiene quella congruenza è uno dei complessi fondamentali isolati di quella serie omofocale.

Per le rette singolari della congruenza quadratica coincidono i due punti e i due piani di contatto colla superficie, sicchè tali rette sono tangenti quadripunte della superficie ed il punto ed il piano di contatto di ogni tal retta si corrispondono rispetto al complesso lineare considerato. Questa serie di tangenti quadripunte costituenti le rette singolari della congruenza quadratica forma in generale una rigata di grado 8.

Finalmente le rette singolari di 2° ordine della congruenza quadratica sono tangenti quadripunte della superficie, le quali stanno in un piano doppio di questa e la toccano in un punto doppio: questo punto e quel piano sono quelli che contengono il fascio di rette della congruenza corrispondenti a quella retta singolare, cioè un fascio di tangenti doppie della superficie, dal che risulta appunto che essi sono un punto ed un piano doppio di questa. Poichè quelle rette singolari di 2° ordine sono in generale 16 si vede così di nuovo che la superficie considerata ha in generale 16 punti e 16 piani doppi. Il complesso lineare fondamentale che contiene la congruenza quadratica serve a far corrispondere tra loro questi punti e questi piani in modo da dare i 16 fasci di rette della congruenza.

Le tangenti quadripunte della superficie che sono rette singolari per la congruenza quadratica hanno per punti e per piani di contatto colla superficie stessa i punti ed i piani osculatori di una curva che diremo *curva singolare* della congruenza quadratica, e che gode della proprietà di avere per tangenti delle tangenti principali (non quadripunte) della superficie focale, ed inoltre di appartenere al complesso lineare c , cioè che ogni retta passante per un punto della curva stessa e giacente nel piano osculatore in quel punto appartiene a c . La congruenza, contenuta in c , composta di tutte queste rette è costituita dai fasci delle rette corrispondenti alle rette singolari di F .

La curva singolare relativa alla congruenza quadratica contiene i 16 punti doppi della superficie focale ed ha per piani osculatori in essi i 16 piani doppi, perocchè vedemmo che tra i fasci di rette corrispondenti a rette singolari della congruenza vi sono appunto i 16 fasci di rette che questa contiene.

150. Dalle cose dette in generale nel § 6 della 2ª Parte intorno alle quartiche omofocali su una quadrica a più dimensioni ricaviamo come proprietà analoghe a quelle viste nel § precedente intorno alla serie di complessi quadratici omofocali :

Una serie omofocale di congruenze quadratiche di uno stesso complesso lineare comprende ∞^1 congruenze quadratiche aventi comune la curva singolare, sicchè ogni fascio di rette che in un piano osculatore di questa vanno pel punto di contatto ha ogni sua retta per retta singolare di una determinata di quelle congruenze quadratiche e le altre per rette corrispondenti, di modo che ciascuno di quegli ∞^1 fasci corrisponde proiettivamente alla serie omofocale di congruenze quadratiche. Se in ciascun fascio si prende la retta singolare di una determinata congruenza della serie si ottengono così ∞^1 rette, tangenti quadripunte della superficie focale di quella congruenza, e formanti una rigata di grado 8. Variando la congruenza quadratica nella serie varierà pure questa rigata di grado 8, sempre però passando per la curva singolare. Quanto poi alle superficie focali delle congruenze quadratiche della serie, è chiaro che esse si toccheranno lungo questa curva, avendovi per piani tangenti i piani osculatori di questa. I punti doppi di tutte queste superficie focali stanno sulla curva singolare e vi formano nel caso più generale una involuzione di grado 16, sì che fissando un punto della curva stessa è determinata una superficie focale che lo ha per punto doppio, e quindi sono determinati gli altri punti doppi di questa ; e analogamente pei piani doppi.

Per ogni retta del complesso lineare passano in generale 3 congruenze quadratiche di una serie omofocale. Ma se la retta è singolare per una di esse, cioè se taglia la curva singolare (e per conseguenza sta in un piano osculatore), allora due delle congruenze quadratiche che vi passano coincidono in quella che ha la retta per singolare, e l'altra congruenza quadratica passante per la retta data è quella che ha il punto d'intersezione di questa colla curva per punto doppio della superficie focale. — Le rette singolari di 2º ordine delle congruenze della serie omofocale sono le tangenti della curva singolare ; per ognuna di queste tangenti coincidono le 3 congruenze della serie passanti per

essa, e precisamente coincidono colla congruenza avente quella retta per retta singolare di 2° ordine (V. n° 97).

151. Dai risultati generali del n° 93 segue poi, insieme con altre proposizioni che per brevità omettiamo: La congruenza speciale composta degli ∞^1 fasci di rette singolari della serie omofocale di congruenze quadratiche, vale a dire la congruenza formata dalle ∞^1 rigate di grado 8 di tangenti quadripunte delle superficie focali di quelle, è un $S_2^{2,8}$, cioè una congruenza di grado 8 contenuta nel complesso lineare considerato. E la rigata delle rette singolari di 2° ordine, cioè la rigata sviluppabile della curva singolare è un S_1^{24} , cioè una rigata di grado 24. Ne segue immediatamente che:

La curva singolare di una serie omofocale di congruenze quadratiche è in generale d'ordine e classe 8 e di rango 24 (grado della sua sviluppabile).

La prima parte di questa proposizione si poteva anche avere, benchè non coll'uso della pura geometria della retta, notando che in generale la superficie focale di una qualunque delle congruenze quadratiche è d'ordine 4 ed è toccata secondo la curva singolare, che conterà 4 volte come intersezione, dalla rigata di grado 8 delle rette singolari di quella congruenza (tangenti quadripunte di quella superficie), sicchè quella curva dovrà essere di ordine 8; e similmente per la classe.

Tutte le superficie focali delle congruenze quadratiche della serie formano così nello stesso tempo un fascio ed una schiera, avendo per intersezione comune quella curva singolare d'ordine 8 (che, essendo curva di contatto semplice, va contata due volte) e per sviluppabile circoscritta comune quella osculatrice a questa curva.

152. *Le congruenze quadratiche di una serie omofocale hanno la stessa caratteristica, e le stesse congruenze lineari fondamentali (V. n° 124). Ogni congruenza fondamentale isolata contata due volte va considerata come una delle congruenze quadratiche della serie e sue rette singolari vanno considerate le rette di una rigata biquadratica contenuta nella congruenza lineare fondamentale e la quale si può chiamare rigata focale delle congruenze quadratiche della serie. Ogni generatrice di una tale rigata biquadratica appartiene non ad un solo, ma a due fasci di rette singolari della serie, vale a dire è una corda della curva singolare e sta nello stesso tempo nei due piani osculatori dei punti in cui la taglia. Nel caso più generale queste rigate biquadratiche focali delle congruenze quadratiche sono 5, corrispondentemente alle 5*

congruenze fondamentali. Quindi se nel caso generale si conduce il piano osculatore in un punto arbitrario alla curva singolare delle congruenze, esso taglierà ancora questa curva in 5 punti posti col primo su una conica e costituenti con esso 6 punti doppi di una superficie focale della serie, e le congiungenti di quelli al primo punto saranno le 5 generatrici passanti per questo punto delle 5 rigate focali. Queste 5 rigate sono costituite da tangenti doppie comuni a tutte le superficie di KUMMER della serie: punti e piani di contatto di quelle tangenti doppie appartengono alla curva singolare, cioè alla curva di contatto comune a quelle superficie.

153. *Se la caratteristica comune delle congruenze quadratiche di una serie omofocale contiene un gruppo composto di due indici, vale a dire se esiste nel complesso lineare a cui appartengono quelle congruenze tutto un fascio di congruenze lineari fondamentali per queste, le quali si taglieranno in una rigata quadrica, allora vi è in generale su questa una quaterna di rette focale per tutte quelle congruenze; vale a dire ogni fascio di rette singolari di quella serie omofocale di congruenze quadratiche contiene una di quelle quattro rette, cosicchè la congruenza di grado 8 formata nel caso generale da quei fasci si scinde in questo caso in 4 congruenze lineari speciali, contate due volte, aventi quelle 4 rette per assi. Inoltre (V. n° 85, 101) per ciascuna congruenza quadratica della serie quelle sue rette singolari che s'appoggiano su una qualunque di quelle 4 rette formano una rigata quadrica. Ora in questo caso, come vedremo più tardi, la superficie focale di ciascuna delle congruenze quadratiche è una rigata biquadratica, le cui due rette doppie (che sono pure rette doppie di quelle congruenze) non variano cambiando la congruenza nella serie omofocale. Varia però con ciò la rigata biquadratica stessa, ma rimangono fisse quelle 4 sue generatrici (distinte o coincidenti) che costituiscono appunto la quaterna focale comune alle congruenze della serie e godono della proprietà di essere curve delle tangenti quadripunte per tutte quelle superficie biquadratiche, cioè sono, per ciascuna di queste, generatrici « iperboliche » (V. n° 117), sicchè per ciascun punto di ognuna di esse passa una tangente quadripunta della superficie, in modo che tutte queste tangenti quadripunte formano una rigata quadrica (di rette singolari della corrispondente congruenza quadratica).*

Tutte le ∞^1 rigate biquadratiche che sono superficie focali per la serie di congruenze quadratiche omofocali si tagliano adunque nelle 2 rette doppie, le quali quindi contano nell'intersezione come insieme di grado 8, e si toccano lungo 4 loro generatrici iperboliche

giacenti in una stessa rigata quadrica. In ciascuna di queste generatrici iperboliche le rigate quadriche delle tangenti quadripunte delle ∞^1 superficie biquadratiche formano una congruenza lineare speciale avente quella generatrice iperbolica per asse.

Dalla proposizione generale del n° 79 segue poi:

Se la caratteristica di una congruenza quadratica contiene un gruppo di 3 indici caratteristici, essa si scinde in due congruenze lineari e se contiene un gruppo di 4 indici essa si riduce ad una congruenza lineare doppia.

Abbiamo così visto come una congruenza quadratica e quindi tutta la sua serie omofocale possano avere delle rigate biquadratiche od anche delle quaterne di rette come *focali*. Viceversa, se nel complesso lineare c si danno ad arbitrio una rigata biquadratica ovvero una quaterna di rette (di una rigata quadrica) e le si assumono come focali, sarà determinata nel complesso lineare una serie di congruenze quadratiche omofocali corrispondenti. Da ciò si deduce facilmente che una rigata biquadratica generale ha 16 generatrici iperboliche, formanti 4 quaterne, sì che ogni quaterna sta su una quadrica; risultati che ritroveremo più tardi.

Si dimostra facilmente col nostro solito metodo dal teorema generale del n° 83 la seguente proposizione importante sulle congruenze quadratiche omofocali: Le 3 congruenze della serie passanti in generale per una retta qualunque del complesso lineare hanno in questa retta per fuochi (o piani focali) 3 coppie di punti, delle quali due qualunque formano un gruppo armonico, sicchè il fascio (o schiera) delle superficie di KUMMER focali per quelle congruenze quadratiche ha così una proprietà assai elegante. Questo teorema, considerato come appartenente alla geometria a 4 dimensioni, dà luogo nella geometria delle sfere al teorema sull'ortogonalità delle cicli di un sistema omofocale.

154. Finalmente da una proposizione generale del n° 89 segue:

Una serie di complessi quadratici omofocali è tagliata da uno qualunque dei suoi complessi fondamentali isolati secondo una serie di congruenze quadratiche omofocali, della quale fa parte quella congruenza focale della serie di complessi quadratici che corrisponde a quel complesso fondamentale. Ne segue che tutte le superficie di KUMMER che sono superficie focali delle dette congruenze quadratiche toccano la superficie di KUMMER singolare per la serie omofocale di complessi

quadratici secondo una curva di grado 8 delle loro tangenti quadripunte ⁽³⁷⁾.

155. Abbiamo già considerato (V. n° 127) alcune proprietà delle 5 coppie di sistemi di rigate quadriche che ha una congruenza quadratica generale; vogliamo ora ritornarvi su. In uno spazio lineare a 4 dimensioni S_4' sia la quadrica R_3 , su cui la quartica Γ . Ogni S_3' di quello spazio taglierà questa in una quartica ad 1 dimensione posta sulla quadrica a 2 dimensioni d'intersezione con R_3 . Quattro elementi di Γ determinano in generale quel S_3' e quindi quella quartica; ma due S_3' si tagliano in un S_2' che taglia Γ in quattro elementi, i quali saranno dunque comuni alle quartiche d'intersezione di Γ con quei due S_3' e quindi col loro fascio. Se poi si considera un S_3' tangente ad uno degli S_3^2 specializzati che passano per Γ , la sua intersezione S_2^2 con quel S_3^2 si scinde in due S_2' aventi comune l' S_1' di contatto (ovvero quando quel S_3^2 fosse doppiamente specializzato, quell'intersezione si compone di un S_2' doppio), i quali tagliano R_3 in due diversi S_1^2 nei quali viene a scindersi in questo caso la suddetta quartica ad una dimensione. Dunque:

Ogni congruenza quadratica Γ contenuta in un complesso lineare c contiene ∞^4 rigate biquadratiche, intersezioni di Γ stessa colle congruenze lineari contenute in c, sì che 4 rette ad arbitrio di Γ individuano in generale una tal rigata, a meno che stiano in una rigata quadrica di c, chè in tal caso per quelle 4 rette passeranno infinite rigate biquadratiche di Γ . Viceversa, due rigate biquadratiche qualunque di Γ si tagliano appunto secondo 4 rette che godono di questa proprietà ⁽³⁸⁾.

La congruenza lineare che determina una rigata biquadratica di Γ può esser tale che questa si scinda in due rigate quadriche aventi comuni due rette. Di tali congruenze lineari ve ne sono ∞^2 per cia-

⁽³⁷⁾ Il LIE aveva già enunciato questo teorema nella Memoria « *Ueber Complexe und partielle Differentialgleichungen* » (Math. Ann., V, p. 255 nella 1^a nota) deducendolo con una rappresentazione di cui abbiamo già parlato, dalle proprietà del sistema ortogonale di cicli di DARBOUX-MOUTARD. Del resto una trattazione delle congruenze quadratiche omofocali e delle rigate biquadratiche omofocali non era ancora stata fatta finora, ch'io sappia. Il KLEIN aveva già trovato, insieme col LIE, la curva di grado 8, che noi abbiamo chiamato « *curva singolare* » di una congruenza quadratica (V. KLEIN, « *Differentialgleichungen in der Liniengeometrie* », Math. Ann., V, p. 296), ma non la considerò rispetto a quella che io chiamo *serie omofocale* di congruenze quadratiche.

⁽³⁸⁾ V. CAPORALI, *Sui complessi e sulle congruenze di 2° grado*, p. 4.

scuna congruenza fondamentale isolata, ma è chiaro che per una qualunque delle rigate quadriche di Γ a cui esse danno luogo ne passano ∞^1 , sicchè il numero di queste rigate quadriche contenute in Γ si riduce ad ∞^1 . Ed esse corrispondono a quelle congruenze fondamentali isolate e sono legate tra loro nel modo detto.

Se consideriamo un S_3^2 semplicemente specializzato del fascio passante per Γ , ogni S_2' in esso contenuto, di ciascuno dei due sistemi, taglia R_2 secondo un S_1^2 che è appunto una rigata quadrica della congruenza Γ . Ora può accadere ancora che quel S_1^2 si scinda: ciò accadrà quando quel S_2' sia tangente ad R_3 . Se consideriamo l' S_3' polare dell'elemento doppio di quel S_3^2 specializzato rispetto ad R_3 , è chiaro che esso sarà tagliato da un tale S_2' secondo un S_1' giacente nella intersezione col S_3^2 specializzato e tangente alla intersezione col R_3 . Ora in uno spazio lineare a 3 dimensioni S_3' noi vedremo che in ciascuno dei 2 sistemi di S_1' contenuti in un S_2^2 ve ne sono in generale 4 tangenti ad un'altra quadrica R_2 , potendo il loro numero diminuire collo specializzarsi della quartica d'intersezione del S_2^2 col R_2 . Dunque concludiamo:

In ciascuno dei due sistemi di rigate quadriche di una stessa generazione di Γ vi sono 4 rigate quadriche specializzate, cioè scisse in due fasci, sicchè Γ ha nel caso più generale 16 fasci di rette raggruppati in modo che ad ognuna delle 5 congruenze fondamentali corrispondono due ottuple di tali fasci, sì che una ottupla si compone di 4 coppie di fasci formanti rigate quadriche degeneri di Γ dell'uno dei 2 sistemi che corrispondono a quella congruenza fondamentale⁽³⁹⁾.

Tutte le rigate biquadratiche di Γ contengono una retta di ciascuno dei 16 fasci di Γ . Le rigate quadriche di uno dei due sistemi corrispondenti ad una stessa generazione di Γ contengono una retta di ciascuno degli 8 fasci costituenti l'ottupla corrispondente all'altro sistema. Dunque un sistema di rigate quadriche di Γ si compone di quadriche che passano per 8 punti fissi e toccano 8 piani fissi (passanti a coppie per questi). Questo sistema di quadriche è d'ordine e classe 2 poichè per ogni retta della congruenza passa solo una determinata di queste quadriche e per ogni punto o piano dello spazio passano in generale due sole rette della congruenza. Considerando il caso in cui queste divengano infinitamente vicine abbiamo: L'inviluppo di ogni sistema di quadriche di Γ è appunto la superficie focale di Γ .

(39) V. CAPORALI, loc. cit., p. 5.

§ 8.

**Rigata biquadratica e sua serie omofocale;
generatrici singolari e generatrici iperboliche.**

156. Già notammo che una rigata biquadratica rispetto alla congruenza lineare (generale o speciale) che la contiene equivale ad una quartica di 1^a specie nello spazio lineare a 3 dimensioni ordinario rispetto ad una quadrica (generale o conica) che la contenga. Ai due sistemi di fasci di quella congruenza (sistemi che coincidono quando la congruenza diventa speciale) corrispondono i due sistemi di generatrici di quella quadrica (i quali coincidono pel cono). Quindi le proprietà note di quelle quartiche nello spazio ordinario e quelle che noi abbiamo trovato nel § 4 della 2^a Parte, e poi al n° 103 si trasportano immediatamente alle rigate biquadratiche, dandoci per queste delle proprietà analoghe a quelle viste pei complessi e le congruenze quadratici.

Abbiasi una rigata biquadratica in una congruenza lineare (generale o speciale). In ogni fascio di rette di questa vi saranno due generatrici della rigata, le quali verranno a coincidere in generale per 4 fasci di ciascun sistema. Vi sono dunque in generale su ognuna delle due direttrici (distinte o coincidenti) della congruenza 4 punti cuspidali congiunti all'altra direttrice con 4 piani cuspidali, tali che le due generatrici che in un piano cuspidale passano pel punto cuspidale corrispondente coincidono in una generatrice singolare della rigata; il fascio delle rette che in quel piano passano per quel punto si dirà fascio singolare per la rigata biquadratica.

Un sistema di rigate biquadratiche omofocali (V. n° 103) è un sistema semplicemente infinito di rigate biquadratiche poste nella stessa congruenza lineare ed aventi comuni (oltre alle direttrici) i fasci singolari, cioè le 2 quaterne di punti e di piani cuspidali. In ognuno dei fasci singolari (8 in generale) ogni retta è generatrice singolare per una determinata rigata della serie omofocale, e viceversa ogni rigata di questa ha una generatrice singolare in quel fascio; vi è corrispondenza proiettiva tra quei fasci di generatrici singolari e la serie delle rigate. In particolare vi sono in generale 4 rigate nella serie, le quali si riducono a rigate quadriche contate doppiamente e non sono altro che le 4 rigate quadriche fondamentali (V. n° 125) comuni a tutte le rigate biquadratiche della serie. Ciascuna di queste rigate quadriche ha una quaterna di rette in cui sono venute a coincidere le 2 quaterne di generatrici singolari di una rigata biquadratica qualunque

della serie e che si potrebbe dire per analogia quaterna focale della serie di rigate biquadratiche. Ogni retta di una tal quaterna sta nello stesso tempo in 2 fasci singolari della serie e quindi nel caso più generale congiunge due punti cuspidali (e sta nei due piani cuspidali corrispondenti) delle due direttrici, sicchè la quaterna di rette corrispondente a ciascuna rigata quadrica fondamentale congiunge i 4 punti cuspidali dell'una direttrice ai 4 dell'altra presi in un certo ordine. Questo ordine muta cambiando la rigata quadrica fondamentale, sicchè vi sono 4 quaterne distinte di rette giacenti su rigate quadriche e congiungenti i punti cuspidali delle due direttrici.

Ne segue immediatamente che il rapporto anarmonico dei 4 punti cuspidali di ciascuna direttrice e quello dei 4 piani cuspidali di ciascuna direttrice hanno tutti lo stesso valore, il che del resto risulta pure dal fatto che una serie omofocale di rigate biquadratiche è polare reciproca di se stessa rispetto alle 4 quadriche fondamentali (V. n° 125). Questo rapporto anarmonico è l'unico invariante assoluto (V. alla fine del n° 103) della serie stessa. Ogni rigata particolare della serie ha poi ancora un altro invariante assoluto, che è il rapporto anarmonico determinato dalla sua generatrice singolare in uno qualunque dei fasci singolari con 3 delle quattro rette di questo fascio, le quali stanno in fasci singolari dell'altra quaterna.

Per una retta qualunque appoggiata alle due direttrici (o, più in generale, appartenente alla congruenza lineare) passano in generale due rigate biquadratiche della serie omofocale. Esse coincidono quando quella retta si prende in un fascio singolare, e coincidono in una rigata avente questa retta per generatrice singolare.

157. Non insistiamo a far notare l'importanza di queste proposizioni per la teoria delle rigate biquadratiche e come esse si modifichino facilmente quando le rigate diventino speciali o pel coincidere le 2 direttrici, o pel comparire di generatrici doppie, ecc., modificazioni che risultano dalle stesse dimostrazioni che abbiamo date. Solo più una ricerca vogliamo fare: quella delle generatrici iperboliche. Noi vedemmo al n° 117 che cosa esse siano in generale, e più tardi (n° 153) trovammo che ve ne sono 16 nella rigata biquadratica più generale e che formano 4 quaterne poste su 4 rigate quadriche. Ritroveremo facilmente questo risultato con un metodo più diretto di quello usato allora.

Si tratta in sostanza di cercare in uno spazio lineare a 3 dimensioni tra i piani osculatori ad una quartica, intersezione di un fascio di quadriche, quelli che sono stazionari (per la definizione

del n° 117 di « generatrici iperboliche »). Un tal piano dovrà tagliare il fascio di quadriche secondo un fascio di coniche aventi contatto quadripunto: in questo fascio vi è solo una conica degenerata, che è una retta doppia, ed essa non può essere che l'intersezione di quel piano con un cono del fascio di quadriche, al qual cono esso sia tangente lungo quella retta. Questa retta d'altra parte dovrà pure esser tangente a tutte le quadriche del fascio. Dunque considerando uno qualunque dei coni (4 in generale) del fascio, esso forma fascio coi coni circoscritti dal suo vertice al fascio di quadriche e i piani (4 in generale) che lo toccano lungo le generatrici comuni sono appunto i piani stazionari della quartica: i loro punti di contatto stanno sul piano polare del vertice di quei coni rispetto al fascio di quadriche e non sono altro che i punti in cui la quartica considerata taglia questo piano. Dunque:

Una rigata biquadratica ha per generatrici iperboliche quelle generatrici che essa ha comuni colle sue rigate quadriche fondamentali. Nel caso più generale, queste essendo in numero di 4, quelle generatrici sono 16. Si trova assai facilmente seguendo lo stesso metodo in qual modo il loro insieme si specializzi collo specializzarsi della rigata biquadratica ⁽⁴⁰⁾.

Questi risultati si accordano con quelli prima trovati.

158. Per ultimo notiamo, come conseguenza della proposizione generale del n° 89:

Ogni serie omofocale di complessi quadratici è tagliata dalla congruenza d'intersezione di due complessi fondamentali secondo una serie omofocale di rigate biquadratiche.

Ogni serie omofocale di congruenze quadratiche è tagliata da una sua congruenza lineare fondamentale secondo una serie omofocale di rigate biquadratiche.

§ 9.

Classificazione dei complessi quadratici, delle congruenze quadratiche e delle rigate biquadratiche.

159. Nel presente § noi ci proponiamo di mostrare come i principii svolti in quelli precedenti, insieme colla teoria generale della

⁽⁴⁰⁾ Che le generatrici iperboliche di una rigata biquadratica siano in generale 16 fu già trovato dal Voss in una Memoria citata (*Zur Theorie der windschiefen Flächen*, Math. Ann., VIII, pp. 134, 135), ma il loro modo notevolissimo di distribuzione non sembra ancora stato osservato.

classificazione delle quartiche data nel § 3 della 2^a Parte, diano il modo di classificare i complessi quadratici, le congruenze quadratiche e le rigate biquadratiche colla pura geometria della retta ed assegnando nello stesso tempo parecchie proprietà che servano a distinguere le varie specie di quegli enti. Faremo astrazione dai complessi quadratici, che si scindono in complessi lineari; essi sono per la teoria generale, come già notammo, tutti quelli nella cui caratteristica entra un gruppo contenente più di 3 indici. Inoltre, invece di stare ad applicare successivamente per ciascuno dei 3 diversi enti geometrici (quartiche a 3, 2, 1 dimensioni aventi la retta per elemento) il metodo generale svolto nel § citato, preferiamo per brevità collegare tra loro le classificazioni di questi enti in modo che quella di uno di essi serva a quella degli altri.

Per capire come ciò sia possibile ricordiamo che noi abbiamo visto come una serie omofocale di complessi quadratici abbia una stessa caratteristica, e come quando è data una congruenza quadratica, od una rigata biquadratica od una quaterna di rette di una rigata quadrica, come costituenti una focale di quella serie di complessi quadratici, questa è sempre perfettamente determinata. D'altra parte ogni complesso quadratico (o la sua serie omofocale), per quanto possa essere speciale, possiede sempre una congruenza quadratica focale od una rigata biquadratica focale, od almeno una quaterna di rette focale. Ne segue adunque che si avranno tutte le specie possibili di complessi quadratici prendendo per focali tutte le specie possibili di congruenze quadratiche, di rigate biquadratiche e di quaterne di rette. Viceversa se si considerano tutte le specie possibili di complessi quadratici, è chiaro che queste dovranno dare come focali tutte le specie possibili di congruenze quadratiche, di rigate biquadratiche e di quaterne di rette. Per conseguenza la classificazione dei complessi quadratici comprende quella delle congruenze quadratiche, rigate biquadratiche e quaterne di rette di rigata quadrica, e viceversa la classificazione di queste ci dà quella ⁽⁴¹⁾.

Similmente la classificazione delle congruenze quadratiche, essendo sempre la serie omofocale di una di queste, e quindi anche la sua caratteristica, determinata da una sua rigata o quaterna focale, si riduce alla classificazione delle rigate biquadratiche e delle

(41) Qui per *classificazione* intendiamo solo la distinzione in *specie*, che è data dalle diverse caratteristiche. Quanto alla ulteriore divisione, che si può fare entro queste specie, essa è data dagl'invarianti assoluti. Ma su questo ritorneremo tra poco.

quaterne di rette su una quadrica. — In definitiva la classificazione di tutti tre gli enti geometrici, che consideriamo potrebbe ridursi a quella di queste quaterne di rette.

160. Questo concetto assume maggior precisione nel seguente importante teorema, al quale veramente non avremmo bisogno di ricorrere, dopo quanto abbiamo detto, ma di cui tuttavia ci serviremo nel seguito a dedurre la caratteristica di ogni complesso quadratico da quella di una sua focale o viceversa dalla caratteristica di esso quella delle sue focali. Il teorema nella sua maggior generalità per quadriche e quartiche qualunque in uno spazio lineare ad $n - 1$ dimensioni si può enunciare così:

Abbiassi in uno spazio lineare ad $n - 1$ dimensioni su una quadrica fissa φ una quartica, od una serie omofocale di quartiche, la cui caratteristica sia:

$$\left[(e_1, e'_1, \dots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, \dots, e_2^{(h_2-1)}), \dots, (e_r, e'_r, \dots, e_r^{(h_r-1)}) \right].$$

La focale di quelle quartiche che corrisponde al primo gruppo di quella caratteristica è una quartica ad $n - 3 - h_1$ dimensioni posta su φ , anzi sull'intersezione di φ col S'_{n-1-h_1} fondamentale che corrisponde a quello, ed avente per caratteristica

$$\overline{\left[(e_1 - 1, e'_1 - 1, \dots, e_1^{(h_1-1)} - 1), (e_2, e'_2, \dots, e_2^{(h_2-1)}), \dots, (e_r, e'_r, \dots, e_r^{(h_r-1)}) \right]},$$

dove il segno posto al disopra del primo gruppo caratteristico sta per indicare che esso corrisponde appunto a quella quadrica ad $n - 2 - h_1$ dimensioni d'intersezione del S'_{n-1-h_1} con φ , e dove gli altri gruppi caratteristici corrispondono a spazi fondamentali di quella focale posti sugli spazi fondamentali corrispondenti della serie omofocale corrispondente. (Anche le radici del determinante a cui appartiene questa nuova caratteristica sono le stesse che quelle del determinante della serie omofocale).

Questo teorema ha evidentemente una grandissima importanza per la classificazione delle quartiche; dalla caratteristica di una quartica qualunque su una quadrica esso ci dà la caratteristica delle sue quartiche focali, e viceversa dalla caratteristica di una focale ci dà quella di tutte le quartiche di cui questa è focale. Si vedrà chiaramente quanto questo sia importante nella applicazione che ne faremo ⁽⁴²⁾.

(42) Non ci è riuscito di trovare una dimostrazione di quel teorema, la quale

161. Prima però di passare alla classificazione dei complessi quadratici è necessario che riconosciamo in quale relazione stia una *retta doppia* qualunque di un complesso quadratico sia rispetto a questo, sia rispetto alla sua superficie singolare. Abbiamo definito (V. n° 123) una *retta doppia* r di un complesso quadratico Q come un elemento doppio, nel senso più generale, di questo considerato come una quartica sulla quadrica R nello spazio lineare a 5 dimensioni, ed un tal elemento doppio r sappiamo esser caratterizzato dal fatto che l' S'_4 tangente in r ad R è pur tangente in r a tutte le altre quadriche passanti per Q , tra le quali ve ne sarà una f specializzata una o più volte ed avente un elemento doppio in r . Diciamo π quel S'_4 tangente: taglierà R ed f in due S^2_3 aventi in r comune un elemento doppio. Un S^2_3 qualunque contenuto in π e non passante per r taglierà R e f in due S^2_2 , che diremo R_1 ed f_1 , e sono due quadriche a 2 dimensioni in uno spazio lineare a 3 dimensioni. Hanno dunque per intersezione una quartica S^4_1 , i cui elementi congiunti a r danno gli $S'_1(\infty^1)$ che costituiscono l'intersezione S^4_2 di π con Q . Ora l'intersezione di R con π contiene $\infty^1 S'_2$ di ciascuno dei due sistemi di S'_2 contenuti in R : questi S'_2 sono quelli che congiungono r ai due sistemi di $\infty^1 S'_1$ contenuti in R_1 . Ora ciascun S'_1 di questi due sistemi taglia f_1 in 2 elementi, cosicchè potremo dire che in ognuno di quegli S'_2 di R passanti per r l'intersezione con Q si scinde in due S'_1 passanti per r . Inoltre per ciascuno dei 2 sistemi di S'_1 di R_1 sappiamo esservene 4 tangenti ad f_1 ed alla quartica $f_1 R_1$ (e queste 2 quaterne di S'_1 di R_1 hanno lo stesso rapporto anarmonico) e quindi vi saranno, per ciascuno dei 2 sistemi di S'_2 di R passanti per r , 4 in generale pei quali i due S'_1 costituenti l'intersezione con Q vengono a coincidere. Dunque:

Ogni retta doppia di un complesso quadratico ha la proprietà che in ogni piano passante per essa le rette del complesso formano due fasci di cui essa fa parte e similmente per ogni suo punto. Vi sono in generale 4 piani e 4 punti, per ciascuno dei quali quei due fasci coincidono, sicchè la retta doppia contiene in generale 4 piani doppi e 4 punti doppi del complesso e quindi anche (V. n° 145) della superficie singolare. Ne segue immediatamente che ogni retta doppia del complesso è pure retta doppia della sua superficie singolare, sia come luogo di punti sia come involuppo di piani; e vediamo inoltre

faccia uso di equazioni affatto generali. Invece usando forme particolari di equazioni, per esempio quelle canoniche date dal WEIERSTRASS, la dimostrazione riesce facile.

che essa contiene in generale 4 punti doppi (cuspidali) e 4 piani doppi aventi lo stesso rapporto anarmonico.

162. Quando quella retta doppia proviene dal gruppo caratteristico 2, oppure (1 1), della caratteristica del complesso quadratico, sono queste le sue proprietà principali, ma quando essa proviene da radici multiple d'ordine superiore a 2 del discriminante, come 3, (2 1), 4, ecc., allora avrà particolarizzazioni che ora riconosceremo. A tal fine bisogna ricordare le cose dette in generale ai n° 76, 77 per la distinzione delle varie specie di elementi doppi che può avere una quartica qualunque. Da esse risulta che, colle notazioni dianzi usate, ai gruppi caratteristici 3, 4, 5, 6 corrisponde rispettivamente l'avere la quartica d'intersezione di f_1 e R_1 il gruppo caratteristico 1, 2, 3, 4 corrispondentemente ad f_1 che ha in questi casi un elemento doppio nell'elemento d'intersezione del S'_3 di π che contiene f_1 ed R_1 col S'_1 in cui π è toccato in questi casi dalla quadrica specializzata f . Ora le particolarità che noi sappiamo incontrarsi nell'intersezione di 2 quadriche nello spazio lineare a 3 dimensioni quando essa presenta gl'indici caratteristici isolati 1, 2, 3, 4 ci dicono subito che: per la retta doppia corrispondente al caratteristico 3, od anche (2 1), vi sono ancora 4 punti doppi e 4 piani doppi distinti; per quella corrispondente al caratteristico 4 due dei punti doppi e due dei piani doppi son venuti a coincidere in un punto ed un piano aventi comune un fascio di rette del complesso, mentre son rimasti due punti e due piani doppi isolati; per la retta doppia corrispondente al caratteristico 5 tre dei punti doppi e tre dei piani doppi coincidono e rimangono solo più un altro punto ed un altro piano doppi; finalmente il caso del gruppo caratteristico 6 si presenta come notevole in quanto che allora la intersezione di R_1 ed f_1 avendo la caratteristica [4] si scinde in una cubica ed una generatrice dell'uno o dell'altro sistema di R_1 (V. n° 80). Dunque il complesso quadratico [6] contiene o un piano od un punto di rette, nel qual piano o punto sta la retta doppia, la quale contiene ancora un punto ed un piano doppi: se p. e. è un piano di rette che è contenuto nel complesso, allora ogni suo punto contenendo un fascio di queste rette sarà singolare, e quindi la superficie singolare si scinderà in questo piano ed una superficie di 3° ordine e 4ª classe avente la retta doppia del complesso per sua retta semplice come luogo, ma doppia come inviluppo; e per questa retta oltre al piano considerato passa un altro piano doppio ed inoltre un punto doppio notevole in quanto che il fascio (doppio) di rette del complesso pas-

santi per esso sta nel piano che vedemmo far parte della superficie singolare. Correlativamente il complesso quadratico [6] può avere la superficie singolare scissa in un punto, inviluppo di piani, ed una superficie di 4° ordine e 3ª classe. Queste cose si vedono considerando la quartica degenerata $R_1 f_1$ e ricordando che dalle generatrici di R_1 tangenti ad essa noi ottenevamo nel n° precedente i punti e piani doppi di r . — Le proprietà così trovate del complesso quadratico [6] sono pure quelle date dal WEILER al n° 48 del suo lavoro.

163. Ma a rendere più completa la distinzione tra le varie specie di rette doppie (distinzione che non abbiamo ancora visto, p. e. tra i casi 2 e 3) gioverà che mostriamo come le superficie singolari corrispondenti non sono altro che *superficie del complesso* (Complexfläche) di PLÜCKER, cioè superficie focali delle congruenze quadratiche composte dalle rette di un complesso quadratico, le quali tagliano una retta fissa. Ciò si potrebbe dedurre immediatamente come corollario del teorema generale che abbiamo esposto al n° 160, ma si può pure ottenere direttamente come segue. Ricordiamo che la superficie singolare del complesso quadratico che consideriamo è superficie focale di una congruenza quadratica, che si ottiene come intersezione di R col S_3^2 polare rispetto ad R della quadrica f , che supponiamo semplicemente specializzata coll'elemento doppio r . Come π è l' S_4^1 polare di r rispetto ad R , così quel S_3^2 starà su π e, nel caso del gruppo caratteristico 2 non presenterà altro di notevole. Ma pel caratteristico 3 diventa f tangente lungo un S_1' a π , e quindi il suo S_3^2 polare viene a passare per r , avendovi per tangente un S_3' che è polare di quel S_1' . Pel caratteristico 4 quel S_1' viene a stare su R e quindi quel S_3' tangente in r al S_3^2 toccherà R lungo quel S_1' . E così continuando e ricordando le cose dette, e notando che l' S_3^2 considerato è intersezione di π con infinite quadriche S_4^2 , avremo:

Il gruppo caratteristico composto di un indice isolato e ≥ 2 rappresenta una retta doppia tale che la superficie singolare che si considera è la superficie, relativa a quella retta, di un conveniente complesso quadratico, il quale non passa per la retta stessa se $e = 2$, passa per la retta se $e = 3$, ha la retta per retta singolare quando $e = 4$, l'ha per retta singolare di 2° ordine per $e = 5$, e per retta singolare di 3° ordine per $e = 6$.

Ricordando il significato che noi diamo alle espressioni di «rette singolari di 2° e di 3° ordine» (V. n° 137) è facile convincersi come questi risultati vadano d'accordo con quelli dianzi avuti. Essi sono

assai importanti, poichè riducono lo studio delle superficie singolari corrispondenti a quei vari casi allo studio di superficie del complesso ⁽⁴³⁾.

164. Premesse queste cose e ricordando quelle viste in generale nei §§ 4, 5 e 6 sui complessi lineari fondamentali di un complesso quadratico, i quali quando diventano speciali danno coi loro assi delle rette doppie; sulla generazione proiettiva dei complessi quadratici, sulle rette singolari e la superficie singolare, sulla serie omofocale di complessi quadratici e il numero dei complessi di una tal serie, che passano per una retta arbitraria dello spazio, noi siamo condotti naturalmente ad una divisione dei complessi quadratici in classi, e poi di queste in sottoclassi, le quali ci danno tutte le *specie* possibili, cioè la classificazione completa dei complessi quadratici.

CLASSE A.

Tutti i complessi nella cui caratteristica non vi sono gruppi contenenti più di un indice caratteristico.

Questa classe di complessi quadratici è caratterizzata geometricamente dalle seguenti proprietà. Il numero dei complessi lineari fondamentali è finito. Ogni tal complesso quadratico non contiene alcuna congruenza lineare, ma soltanto delle rigate quadriche e quindi è generabile come tutti i complessi quadratici mediante stelle reciproche di complessi lineari, ma non (come tutti i rimanenti complessi quadratici) mediante fasci proiettivi. La serie omofocale di ogni complesso quadratico di questa classe (e solo di questa) è del grado 4, vale a dire per ogni retta dello spazio passano 4 (variabili) dei suoi complessi.

Possiamo suddividere questa classe in 4 sottoclassi, secondo che il numero degli indici caratteristici diversi dall'unità e quindi delle rette doppie è 0, 1, 2, 3, cioè:

I. [111111]. *Nessuna retta doppia.*

⁽⁴³⁾ Il WEILER nel suo lavoro (n° 7, 16, 30) stabilisce che i casi [21111], [3111] e [411] danno per superficie singolari le superficie del complesso relative rispettivamente ad una retta qualunque, ad una retta del complesso e ad una retta singolare, cercando le equazioni in coordinate di punti di quelle superficie e studiando mediante esse la forma di queste. È chiaro che tal metodo non è molto soddisfacente.

- II. $[21111]$, $[3111]$, $[411]$, $[51]$, $[6]$. *Una retta doppia.*
 III. $[2211]$, $[321]$, $[33]$, $[42]$. *Due rette doppie.*
 IV. $[222]$. *Tre rette doppie.*

La caratteristica $[111111]$ corrisponde al complesso più generale ed a quei suoi casi particolari in cui il complesso non cessa di avere 6 complessi fondamentali isolati (non speciali, per conseguenza) e quindi non ha rette doppie. Le principali proprietà di questi complessi furono scoperte specialmente da PLÜCKER e KLEIN.

Gli altri complessi quadratici di questa classe hanno, come vedemmo, delle rette doppie, e per superficie singolari delle *superficie di complesso* relative a quelle rette e vedemmo anche (n^0 163) in quale relazione queste rette debbono stare rispetto ai complessi generali di cui quelle sono superficie. Pei casi di una sola retta doppia (sottoclasse II) si avranno dunque, per quanto dicemmo, le seguenti superficie singolari (dove quelle superficie di complesso devono essere le più generali delle specie che indichiamo):

$[21111]$. Superficie di complesso relativa ad una retta qualunque dello spazio		
$[3111]$	»	relativa ad una retta del complesso
$[411]$	»	relativa ad una retta singolare di 1 ^o ordine del complesso
$[51]$	»	relativa ad una retta singolare di 2 ^o ordine del complesso
$[6]$	»	relativa ad una retta singolare di 3 ^o ordine del complesso.

Ora le superficie del complesso relative alle varie posizioni possibili di una retta hanno forme il cui studio si presenta assai semplice, e particolarmente si riconoscono assai facilmente le specialità relative alla retta doppia ed alla distribuzione dei punti doppi della superficie, sicchè a noi basta aver ricondotto lo studio di questa classe di superficie singolari allo studio di superficie del complesso. Del resto le superficie del complesso relative ad una retta qualunque dello spazio e ad una retta appartenente al complesso furono studiate abbastanza diffusamente dal PLÜCKER⁽⁴⁴⁾, il quale notò ad

(44) Vedi PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, pp. 205-226. Nella 2^a parte di quest'opera a pp. 337-344 sono enumerate (dal KLEIN, a quanto è detto nella prefazione) alcune altre specie di superficie di complesso, come quelle che sono superficie singolari di serie omofocali di complessi quadratici $[2211]$, $[222]$, $[(11)211]$.

esempio come nel secondo caso la retta doppia diventi cuspidale per la superficie. Non è difficile proseguire questo studio; noi abbiamo anzi già trovato quali particolarità distingue quella retta doppia cuspidale nei casi $[3\ 1\ 1\ 1]$, $[4\ 1\ 1]$, $[5\ 1]$, $[6]$ (V. n° 162), e per questo ultimo caso $[6]$ abbiamo già visto come la superficie singolare si scinda per separarsi, come parte di essa, di un punto o di un piano di rette contenute nel complesso quadratico, avendo la parte rimanente (superficie di 4° ordine e 3ª classe, ovvero di 3° ordine e 4ª classe) le proprietà viste. Quindi questi casi sono già sufficientemente distinti tra loro, ed è anche dato il modo di approfondirli.

Venendo alle due sottoclassi, che ci rimangono a considerare, le superficie singolari corrispondenti si potrebbero considerare come superficie di complessi relative a ciascuna delle 2 o 3 rette doppie, che esse hanno. Ma possiamo anche servirci delle distinzioni già trovate tra le rette doppie corrispondenti a indici caratteristici diversi.

Ogni complesso della sottoclasse III ha due rette doppie che si tagliano determinando un fascio di rette del complesso (V. alla fine del n° 123). Il caso $[2\ 2\ 1\ 1]$ è quello più generale: la superficie singolare ha quelle due rette per rette doppie. Nel caso $[3\ 2\ 1]$ una delle due rette doppie (quella corrispondente all'indice caratteristico 3) diventa cuspidale per la superficie singolare. E nel caso $[3\ 3]$ entrambe le rette doppie sono cuspidali per questa superficie. Ma nel caso $[4\ 2]$ ricordando le proprietà viste (n° 162) della retta doppia corrispondente all'indice caratteristico 4, e la relazione in cui questa deve stare colla retta doppia, che corrisponde al 2, noi vediamo che il piano, od il punto in cui stanno le due rette doppie, che si hanno in questo caso, si compongono di rette del complesso quadratico, sicchè la superficie singolare si scinde ancora in un piano (od un punto) e una superficie di 3° ordine e 4ª classe (o 4° ordine e 3ª classe) avente quelle due rette per rette doppie come assi e semplici come raggi (o correlat.), ma, come assi, doppie di diversa natura.

Finalmente venendo alla sottoclasse IV, cioè al caso $[2\ 2\ 2]$, in cui vi sono 3 rette doppie, queste si taglieranno a due a due e staranno in un punto od in un piano, le cui rette apparterranno al complesso quadratico (V. ancora alla fine del n. 123), sicchè quel punto, o quel piano, formerà parte della superficie singolare. La parte rimanente sarà una superficie di 4° ordine e 3ª classe contenente tre rette doppie come raggi e semplici come assi, concorrenti in quel punto, che sarà triplo per la superficie, cioè una *superficie*

di STEINER; oppure rispettivamente sarà la superficie correlativa di 3° ordine e 4ª classe.

Così abbiamo distinte le varie specie di complessi contenute in questa prima classe A. Notiamo che le superficie singolari corrispondenti si scindono pel separarsi di un punto o di un piano nei soli 3 casi [2 2 2], [4 2], [6], di cui ciascuno si può riguardare come caso particolare del precedente.

Questa classificazione dei complessi quadratici (o delle loro superficie singolari) di questa classe A ci dà subito, per quanto vedemmo, una classificazione di quelle congruenze quadratiche le cui caratteristiche non contengono gruppi composti di più di un indice. Pel teorema dato al n° 160 quei complessi quadratici (i quali non hanno, come sappiamo, altre focali che congruenze quadratiche) hanno le seguenti congruenze quadratiche focali:

<i>Specie dei complessi quadratici.</i>	<i>Specie delle loro congruenze quadratiche focali.</i>
[1 1 1 1 1 1]	[1 1 1 1 1]
[2 1 1 1 1]	[2 1 1 1] , $\overline{[1 1 1 1 1]}$
[3 1 1 1]	[3 1 1] , $\overline{[2 1 1 1]}$
[4 1 1]	[4 1] , $\overline{[3 1 1]}$
[5 1]	[5] , $\overline{[4 1]}$
[6]	$\overline{[5]}$
[2 2 1 1]	[2 2 1] , $\overline{[1 2 1 1]}$
[3 2 1]	[3 2] , $\overline{[1 3 1]}$, $\overline{[2 2 1]}$
[3 3]	$\overline{[2 3]}$
[4 2]	$\overline{[1 4]}$, $\overline{[3 2]}$
[2 2 2]	$\overline{[1 2 2]}$.

Quelle tra queste congruenze quadratiche, che hanno il segno al disopra di un indice caratteristico (usando la convenzione fatta alla fine del n° 124 e poi al n° 160) si compongono di rette appoggiate sulla corrispondente retta doppia dei complessi quadratici, ed è appunto la considerazione di esse che ci mostrava essere la superficie singolare di questi una superficie di complesso relativa a quelle rette doppie.

CLASSE B.

165. *Tutti i complessi nella cui caratteristica vi è (oltre ad indici caratteristici isolati) un gruppo composto di due indici.*

Questi sono tutti i complessi quadratici aventi, oltre a complessi fondamentali isolati, un fascio di complessi fondamentali. Gli assi dei complessi speciali di questo fascio sono rette doppie. Ogni complesso di questa classe contiene infinite congruenze lineari (formanti due sistemi) passanti per quelle rette doppie, ed è generabile in infiniti modi (oltre che col metodo generale delle stelle reciproche di complessi lineari) con due fasci proiettivi di complessi lineari passanti per queste. La superficie singolare vedemmo essere in questo caso una rigata biquadratica appartenente alla congruenza lineare di quel fascio di complessi fondamentali, rigata che è una focale per tutta la serie omofocale di complessi quadratici. Sappiamo poi che se il gruppo caratteristico di cui si tratta è (11), allora i complessi fondamentali speciali del fascio sono 2 soli e distinti, i cui assi costituiscono 2 rette doppie sghembe distinte del complesso e quindi di quella superficie singolare; mentre se in quel gruppo caratteristico il 1° indice è > 1 , allora la congruenza fondamentale diventa speciale in quanto che le 2 direttrici, che sono appunto quelle due rette doppie, vengono ad essere infinitamente vicine: la rigata biquadratica è di quelle che appartengono ad una congruenza lineare speciale. Finalmente se in quel gruppo caratteristico entrambi gli indici sono > 1 abbiamo pure visto che tutto il fascio di complessi fondamentali si compone di complessi speciali, cioè che la congruenza fondamentale si scinde in un piano ed un punto di rette. La rigata biquadratica dovendo esservi contenuta si scinderà in una conica (come involuppo di 2ª classe) di quel piano ed un cono di quel punto. In questo caso quei complessi lineari fondamentali essendo tutti speciali, i loro assi formano un fascio di rette doppie del complesso quadratico: il piano di questo fascio come luogo di punti, ed il centro del fascio stesso come involuppo di piani apparterranno dunque doppiamente alla superficie singolare, la quale quindi si comporrà ancora di un cono avente il vertice in quel punto, come luogo di punti singolari, e di una conica giacente in quel piano come involuppo di piani singolari; potendo poi questo cono e questa conica degenerare ancora.

Distinguendo dunque 3 sottoclassi abbiamo le seguenti specie:

I. *Superficie singolare una rigata biquadratica a direttrici sghembe distinte*

$[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$, $[(1\ 1)\ 2\ 1\ 1]$, $[(1\ 1)\ 3\ 1]$, $[(1\ 1)\ 2\ 2]$, $[(1\ 1)\ 4]$. *Serie omofocale di grado 3°.*

II. *Rigata biquadratica a direttrici coincidenti*

$[(2\ 1)\ 1\ 1\ 1]$, $[(2\ 1)\ 2\ 1]$, $[(2\ 1)\ 3]$, $[(3\ 1)\ 1\ 1]$, $[(3\ 1)\ 2]$, $[(4\ 1)\ 1]$, $[(5\ 1)]$.

Serie omofocale di grado 3°.

III. *Piano e punto contati doppiamente; cono e conica*
 $[(2\ 2)\ 1\ 1]$, $[(2\ 2)\ 2]$, $[(3\ 2)\ 1]$, $[(4\ 2)]$. *Serie omofocale di grado 2°.*
 $[(3\ 3)]$. *Serie omofocale di grado 1°.*

Per riconoscere poi le proprietà che distinguono p. e. le superficie singolari delle varie specie di complessi quadratici di questa classe basta che facciamo la *classificazione delle rigate biquadratiche*, ed allora il teorema del n° 160 ci darà subito in che modo si corrispondano la caratteristica della rigata biquadratica e quella dei complessi quadratici che l'hanno per superficie singolare. Ora noi vedemmo che le rigate biquadratiche vanno considerate come le quartiche d'intersezione di quadriche in uno spazio lineare a 3 dimensioni, poste su una quadrica fissa, la quale si riduce ad un cono quando la congruenza lineare che contiene la rigata biquadratica viene ad avere le 2 direttrici coincidenti e ad una coppia di piani quando quella congruenza lineare si scinde in un punto ed un piano di rette aventi comune un fascio⁽⁴⁵⁾. D'altra parte la classificazione delle quartiche ordinarie l'abbiamo già fatta nel § 4 della 2ª Parte di questo lavoro. Valendoci di essa, cambiandovi solo le parole punto, quartica, ecc., in retta, rigata biquadratica, ecc., avremo le seguenti proprietà per distinguere le varie specie che considereremo di rigate biquadratiche di complessi di questa classe *B*. Porremo anche, accanto a questa classificazione, a sinistra, la classificazione delle quartiche, affinchè si veda come da quest'ultima noi passiamo a quella delle rigate (biquadratiche) [*].

(45) In un lavoro recente intitolato « *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni dei complessi corrispondenti in due o più fasci proiettivi di complessi lineari* » il Dott. DOMENICO ROCCELLA per studiare i complessi quadratici generati da 2 fasci proiettivi di complessi lineari (i quali sono, come abbiamo visto, tutte le specie di complessi quadratici salvo quelli della classe *A*), rappresenta il sistema triplo di complessi lineari che in generale passa per quei due fasci sullo spazio di piani e giunge così ad avere una rappresentazione del complesso quadratico su una quadrica ordinaria. Però egli non considera un'altra quadrica, che sarebbe importante considerare: quella dei piani che corrispondono ai complessi lineari speciali di quel sistema triplo; se avesse considerato anche questa, sarebbe stato condotto a notare come la sviluppabile di 4ª classe dei piani tangenti comuni a quelle 2 quadriche corrisponda alla superficie singolare del complesso quadratico. La classificazione di questo è così ricondotta, anche sinteticamente, alla classificazione di quelle sviluppabili, ovvero, ciò che fa lo stesso, delle quartiche ordinarie d'intersezione di due quadriche.

[*] Per necessità tipografiche, le due classificazioni son qui riprodotte una di seguito all'altra [N. d. R.].

Quartiche su una quadrica ordinaria

CARATTERISTICA
della quartica
o della rigata
biquadratica

I. — *Quartiche su una quadrica generale.*

[1 1 1 1]	Caso generale; in ognuno dei due sistemi di generatrici della quadrica ve ne sono 4 tangenti.
[2 1 1]	Quartica con punto doppio; in ogni sistema 2 generatrici son venute a coincidere in quella passante pel punto stesso e ne rimangono solo più 2 tangenti propriamente dette alla quartica.
[3 1]	Quartica con cuspidi; in ogni sistema di generatrici della quadrica ve n'è solo più una tangente alla quartica e non passante per la cuspidi.
[2 2]	Quartica scissa in una cubica con una generatrice della quadrica, sua corda. Due altre generatrici dello stesso sistema sono tangenti alla cubica.
[4]	Quartica scissa in una cubica con una generatrice tangente.

II. — *Quartiche su un cono quadrico.*

[1̄ 1 1 1]	Caso generale; quattro generatrici del cono toccano la quartica.
[1̄ 2 1]	Quartica con punto doppio non posto nel vertice del cono.
[2̄ 1 1]	Punto doppio nel vertice del cono, sicchè ogni generatrice di questo contiene solo un altro punto della quartica all'infuori di quello.
[1̄ 3]	Cuspidi fuori del vertice del cono.
[3̄ 1]	Cuspidi nel vertice del cono.
[2̄ 2]	Quartica scissa in una cubica ed una generatrice qualunque del cono.
[4̄]	Lo stesso, ma quella generatrice tocca la cubica nel vertice del cono.

CARATTERISTICA della quartica o della rigata biquadratica	
	III. — <i>Quartiche su una coppia di piani (cioè coppie di coniche).</i>
$[(\overline{1\ 1})\ 1\ 1]$	Coppia generale di coniche aventi comuni 2 punti sulla retta d'intersezione di quei piani.
$[(\overline{2\ 1})\ 1]$	Le due coniche si toccano in un punto.
$[(\overline{1\ 1})\ 2]$	Una conica del caso generale si scinde in due rette.
$[(\overline{3\ 1})]$	Quelle due rette vanno a tagliarsi sulla seconda conica.
$[(\overline{2\ 2})]$	Ognuna delle due coniche si scinde nell'intersezione dei due piani ed un'altra retta del piano corrispondente.

Rigate biquadratiche (E COMPLESSI QUADRATICI CORRISPONDENTI)

CARATTERISTICA del complesso quadratico	
	I. — <i>Rigate biquadratiche a direttrici sghembe distinte (congruenza lineare generale).</i>
$[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$	Caso generale; ognuna delle due direttrici della rigata ha 4 punti e 4 piani cuspidali.
$[(1\ 1)\ 2\ 1\ 1]$	Rigata con generatrice doppia, che taglia le due direttrici; su ciascuna di queste e fuori di quella rimangono solo più due punti cuspidali e due piani cuspidali ⁽⁴⁶⁾ .
$[(1\ 1)\ 3\ 1]$	Rigata con generatrice cuspidale; ognuna delle direttrici ha solo più un punto ed un piano cuspidale, che non appartengono a quella generatrice.

⁽⁴⁶⁾ Il WEILER nella sua classificazione nota per ogni rigata biquadratica che incontra come superficie singolare a quale specie di CREMONA essa appartiene; noi per brevità omettiamo di far questo. Ma solo notiamo che, mentre il WEILER (Memoria citata, n° 9 e 24) è costretto dal metodo che ha seguito a dimostrare espressamente che le superficie singolari relative ai complessi quadratici $[(1\ 1)\ 2\ 1\ 1]$ e $[(2\ 1)\ 2\ 1]$ sono appunto le superficie V e VI di CREMONA più generali, ciò risulta invece immediatamente dal nostro metodo, poichè noi abbiamo visto che il complesso più generale di una data caratteristica (di questa classe) ha per superficie singolare la rigata biquadratica più generale avente la caratteristica corrispondente.

CARATTERISTICA
del complesso
quadratico

[(1 1) 2 2]

La superficie è scissa in una rigata cubica avente quelle due direttrici, una doppia come luogo, l'altra come inviluppo, ed inoltre un punto di quella e un piano di questa (V. n° 120). La rigata cubica ha due punti e due piani cuspidali (rispettivamente sulla prima e sulla seconda delle due direttrici).

[(1 1) 4]

Rigata cubica, come nel caso precedente, ma completata da un suo punto e da un suo piano cuspidali.

II. — *Rigate biquadratiche a direttrici coincidenti (congruenza lineare speciale).*

[(2 1) 1 1 1]

Caso generale; la direttrice (unica) della rigata ha 4 punti e 4 piani cuspidali.

[(2 1) 2 1]

La rigata acquista una generatrice doppia.

[(3 1) 1 1]

La direttrice viene ad essere pure una generatrice, per la quale in conseguenza la rigata passerà due volte; allora per ogni punto (e in ogni piano) della direttrice passa solo un'altra generatrice della superficie.

[(2 1) 3]

La rigata biquadratica ha una generatrice cuspidale.

[(4 1) 1]

La direttrice è pure generatrice e costituisce una retta cuspidale della superficie.

[(3 1) 2]

Rigata scissa in una rigata cubica a direttrici coincidenti con un punto e il piano corrispondente di questa direttrice doppia.

[(5 1)]

Lo stesso, ma quel punto e quel piano sono il punto e il piano cuspidali della direttrice doppia.

III. — *Cono e conica (in un punto e un piano formanti una congruenza lineare degenerata).*

[(2 2) 1 1]

Caso generale; nel fascio di rette comuni al punto e al piano, il cono e la conica hanno 2 rette comuni.

CARATTERISTICA del complesso quadratico	
[(3 2) 1]	Il cono è tangente al piano della conica e questa contiene il vertice del cono; quelle 2 rette coincidono.
[(2 2) 2]	Il cono del 1° caso si scinde in 2 piani pel punto fisso, o la conica in 2 punti del piano fisso.
[(4 2)] (47)	Nel caso precedente se il cono si scindeva in 2 piani (tangenti alla conica), questi si taglieranno ora in una tangente della conica; se invece la conica si scindeva in 2 punti, la loro congiungente starà sul cono.
[(3 3)]	Come rigate, il cono e la conica si scindono nel fascio doppio della congruenza lineare e altri 2 fasci; quindi come superficie si scindono nel piano e nel punto fissi (3 volte) e un punto e un piano uniti rispettivamente a quelli (1 volta).

(47) Per questo caso del complesso quadratico di caratteristica [(4 2)] il WEILER (V. n° 45) dicendo che su ogni piano è determinata la conica del complesso (mediante 6 sue tangenti) quando del complesso stesso è data la superficie singolare, fa confusione, comprendendo anche in questo dato la congruenza delle rette singolari. — Pel caso, che per noi è quello immediatamente seguente, cioè pel complesso [(3 3)], che nel WEILER è al n° 47, questo scienziato dice la congruenza delle rette singolari composta in modo diverso da quello che è realmente, essendo essa composta in realtà da tutte le rette dei 2 piani e dei 2 punti che formano la superficie singolare (contate 3 volte quelle appartenenti al punto e al piano che contano 3 volte); ed il WEILER doveva accorgersene notando che il complesso [(3 3)] non è altro che un caso particolare del complesso tetraedrale [(1 1) (1 1) (1 1)], di cui è ben noto che le rette singolari sono le rette, che stanno nelle facce o nei vertici del tetraedro. Il WEILER poi sbaglia anche per conseguenza nella costruzione delle coniche di questo complesso.

CLASSE C.

166. *Tutti i complessi quadratici nella cui caratteristica vi sono due gruppi caratteristici composti ciascuno di due indici.*

Questi sono tutti i complessi quadratici aventi due fasci di complessi lineari fondamentali (oltre a complessi fondamentali isolati che possono esservi). Le direttrici delle loro congruenze lineari sono 2 coppie di rette sghembe taglientisi mutuamente e appartenenti come rette doppie al complesso quadratico ed alla sua superficie singolare. Ne segue che questa, essendo di 4^o ordine e 4^a classe, dovrà scindersi in due quadriche contenenti entrambe, come generatrici, quelle 4 rette, le quali del resto possono venir a coincidere a 2 a 2; come si vede anche considerando in questo caso la coppia di quadriche come costituente in due modi diversi la rigata biquadratica del caso precedente, secondo che l'una coppia o l'altra di rette doppie si considera come formata dalle direttrici. I complessi di questa classe contengono due coppie distinte di sistemi di ∞^1 congruenze lineari e sono quindi generabili con fasci proiettivi di complessi lineari in 2 serie distinte di modi.

Le varie specie comprese in questa classe sono:

I. $[(1\ 1)(1\ 1)\ 1\ 1]$, $[(1\ 1)(1\ 1)\ 2]$, $[(2\ 1)(1\ 1)\ 1]$, $[(3\ 1)(1\ 1)]$, $[(2\ 1)(2\ 1)]$.
Serie omofocale di grado 2^o.

II. $[(2\ 2)(1\ 1)]$. *Serie omofocale di grado 1^o.*

Per distinguere tra loro queste varie specie si potrebbe, come per la classe B, considerare la superficie singolare come una rigata biquadratica (il che ora si può fare in 2 modi) e quindi classificare questa (la cui caratteristica mostra che essa si scinde in una coppia di rigate quadriche) in modo simile alla classificazione delle quartiche (anzi coppie di coniche) su una quadrica. Però i caratteri distintivi tra quelle specie si riconoscono così facilmente colla teoria da noi premessa che non occorre più neppure far uso di quella considerazione. Avremo così quanto segue:

Nel caso $[(1\ 1)(1\ 1)\ 1\ 1]$, che è il più generale di questa classe, si ha la superficie singolare scissa in due quadriche aventi comuni 4 generatrici nella posizione più generale⁽⁴⁸⁾.

(48) Per questo caso, che nel WEILER è al n.º 3, questi asserisce che per ogni retta dello spazio passano 4 complessi aventi la stessa superficie singolare. Abbiamo visto invece che ne passano due soli.

Nel caso $[(1\ 1)(1\ 1)\ 2]$ interviene una nuova retta doppia (corrispondente all'indice caratteristico isolato 2) tagliante quelle 4 che già si avevano. Ne segue immediatamente che delle due quadriche una si scinderà nella coppia di piani tangenti all'altra passanti per quella retta, e nella coppia di punti in cui questa stessa retta taglia quella quadrica⁽⁴⁹⁾.

$[(2\ 1)(1\ 1)\ 1]$. Delle due coppie di rette doppie del caso generale, una (quella corrispondente al gruppo caratteristico $(2\ 1)$) si compone ora di due rette coincidenti. Dunque in questo caso le due quadriche in cui si scinde la superficie singolare sono raccordate secondo una generatrice.

$[(3\ 1)(1\ 1)]$. Una delle due quadriche si scinde in una coppia di piani condotti per una generatrice dell'altra e nei loro punti di contatto con questa.

$[(2\ 1)(2\ 1)]$. Le due quadriche del caso generale saranno raccordate secondo due generatrici di diverso sistema.

$[(2\ 2)(1\ 1)]$. Considerando questo come caso particolare del caso $[(2\ 2)\ 2]$ della classe *B*, si vede che la superficie singolare viene a comporsi di un piano ed un punto (uniti) contati due volte, ed altri 2 piani e 2 punti.

CLASSE *D*.

167. *Complessi quadratici nella cui caratteristica vi sono tre gruppi caratteristici composti ciascuno di due indici.*

A questa classe appartiene evidentemente solo il complesso quadratico, la cui caratteristica è:

$$[(1\ 1)(1\ 1)(1\ 1)].$$

Serie omofocale di grado 1°. Vi sono tre fasci distinti di complessi lineari fondamentali; ad ogni fascio corrispondono, come assi dei due complessi speciali, due rette doppie sghembe, cosicchè le rette doppie di questo complesso e quindi della sua superficie singolare sono 6 rette, ciascuna delle quali taglia tutte le altre, meno una, cioè

⁽⁴⁹⁾ Questo complesso quadratico fu studiato geometricamente dall'HIRST come formato dalle rette che tagliano 2 piani correlativi in punti coniugati (V. Coll. Math. in mem. D. CHELINI, pp. 51-73, « *On the complexes generated by two correlative planes* »).

sono i 6 spigoli di un tetraedro. Ne segue immediatamente che i piani ed i vertici di questo costituiscono come luogo e come inviluppo la superficie singolare, e che tutte le rette contenute in quei piani od in quei punti sono rette del complesso.

Si riconosce di qui che questo complesso è il noto *complesso tetraedrale*; tuttavia ci pare conveniente il dimostrarne direttamente la sua proprietà caratteristica più conosciuta, tanto più che la dimostrazione seguente è notevole per la sua semplicità e brevità. Noi abbiamo dimostrato (V. n° 143) che il rapporto anarmonico dei 4 punti o dei 4 piani della superficie singolare passanti per una retta qualunque dello spazio è uguale a quello dei 4 complessi quadratici della serie omofocale, i quali passano per la retta stessa, benchè del resto questi complessi quadratici possano essere divenuti evanescenti (V. n° 139) essendo solo più rappresentati da focali; questi complessi evanescenti passanti per ogni retta dello spazio sono tanti quanti sono i gruppi caratteristici di due o più indici contenuti nella caratteristica. Nel caso $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$ sono dunque 3 e quindi se si considerano tutte le rette appartenenti ad un complesso qualunque (non evanescente) avente questa caratteristica, per tutte passeranno gli stessi 4 complessi della serie omofocale, cioè quello considerato ed i 3 evanescenti, e quindi è costante il rapporto anarmonico che la retta stessa determina sulla superficie singolare, ed è uguale all'invariante assoluto del complesso considerato (V. n° 141). Dunque il complesso $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$ gode della proprietà che le sue rette tagliano secondo un rapporto anarmonico fisso le 4 facce del suo tetraedro singolare (o correlativamente), e questa è appunto la definizione più usata del complesso tetraedrale, alla quale volevamo giungere ⁽⁵⁰⁾.

(50) Il teorema citato del n° 143 può anche servire a dimostrare altre proposizioni notevoli. Così 4 complessi lineari fondamentali isolati di un complesso quadratico hanno comuni due rette, per ciascuna delle quali passeranno quei quattro complessi lineari, che appartengono, contati doppiamente, alla serie omofocale: dunque esse determinano lo stesso rapporto anarmonico sulla superficie singolare. Così pel complesso quadratico avente un gruppo di 2 indici caratteristici, come $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$, vi sono delle rigate quadriche (4 in quel caso), intersezioni di 3 complessi fondamentali isolati, tali che le loro rette tagliano la superficie singolare nello stesso rapporto anarmonico, che è un invariante assoluto. Così ancora segue da quel teorema che nel complesso $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1\ 1]$ tutte le rette della congruenza dei due complessi fondamentali isolati determinano uno stesso rapporto anarmonico sulla superficie singolare. Dunque: se due quadriche si tagliano in un quadrilatero sghembo, tutte le rette appoggiate sulle diagonali di questo tagliano le quadriche secondo un rapporto anarmonico fisso. Ecc.

Di questo complesso sono casi particolari i complessi quadratici aventi per caratteristiche $[(2\ 2)\ (1\ 1)]$ e $[(3\ 3)]$, da noi già incontrati nelle classi precedenti.

CLASSE *E*.

168. *Complessi quadratici le cui caratteristiche contengono (oltre ad indici caratteristici isolati) un gruppo caratteristico di 3 indici.*

Essi hanno (oltre a complessi fondamentali isolati) una serie lineare doppiamente infinita di complessi lineari fondamentali, cioè tutti i complessi lineari contenenti una determinata rigata quadrica: la rigata quadrica coniugata conterrà gli assi di quelli speciali tra quei complessi fondamentali, cioè sarà tutta composta di rette doppie, donde segue che per tutti i complessi quadratici di questa classe la superficie singolare si riduce come luogo e come inviluppo (nel senso ordinario della parola) ad una superficie quadrica contata due volte; quella superficie cioè che contiene quelle due rigate coniugate. Se i tre indici del gruppo caratteristico sono uguali tutti ad 1, allora vedemmo che la quadrica è generale. Se il primo indice è > 1 la quadrica è semplicemente specializzata, cioè è scissa come luogo e come inviluppo in una coppia di piani ed una coppia di punti, sicchè le rette doppie del complesso formano due fasci, ed i complessi fondamentali costituiscono la serie dei complessi lineari che contengono la coppia di fasci di rette coniugata a quella. Se entrambi i due primi indici sono > 1 , allora vedemmo pure che la quadrica è doppiamente specializzata, cioè i 2 punti ed i 2 piani in cui si scindeva nel caso precedente vengono a coincidere, di modo che la superficie singolare si comporrà di un piano con un suo punto contati 4 volte. Finalmente, la serie lineare doppiamente infinita di complessi fondamentali è tutta composta di complessi speciali, quando tutti e tre quegli'indici sono > 1 , vale a dire nel solo caso $[(2\ 2\ 2)]$; in questo caso i loro assi sono le rette o di un piano o di un punto e sono ancora rette doppie del complesso; considereremo di nuovo questo caso studiando l'ultima classe. Intanto notiamo ancora come conseguenza di cose esposte che tutti i complessi quadratici che qui consideriamo si possono in infiniti modi generare come luogo delle congruenze lineari comuni ai complessi corrispondenti di due fasci proiettivi di complessi lineari, purchè questi fasci abbiano le loro congruenze di base in posizione speciale, cioè aventi comune una rigata quadrica (quella delle rette doppie), od in altri termini purchè

vi sia un complesso lineare contenuto in entrambi i fasci. E viceversa due fasci di complessi lineari posti in tale posizione generano sempre un complesso quadratico della classe che ora consideriamo (o delle due più speciali, che ancor ci rimangono da considerare). Ogni retta di questo complesso quadratico è congiunta alla rigata quadrica delle rette doppie da una congruenza lineare che è tutta contenuta nel complesso stesso.

Le specie di complessi, che questa classe abbraccia, sono (divise in sottoclassi nel modo suddetto, e tralasciando la $[(2\ 2\ 2)]$):

I. *Superficie singolare una quadrica doppia non degenerata*:
 $[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$, $[(1\ 1\ 1)\ 2\ 1]$, $[(1\ 1\ 1)\ 3]$. *Serie omofocale di grado 2°.*

II. *Quadrica degenerata in due piani con due punti*:
 $[(2\ 1\ 1)\ 1\ 1]$, $[(2\ 1\ 1)\ 2]$, $[(3\ 1\ 1)\ 1]$, $[(4\ 1\ 1)]$. *Serie omofocale di grado 2°.*

III. *Quadrica degenerata in un piano doppio con un punto doppio*:
 $[(2\ 2\ 1)\ 1]$, $[(3\ 2\ 1)]$. *Serie omofocale di grado 1°.*

Prima però di passare alla distinzione di queste varie specie, occorre ancora che vediamo delle proprietà generali comuni a tutte (anche alle specie contenute nella classe che considereremo dopo questa), proprietà riguardanti le rette singolari e le focali della serie omofocale, e che si deducono tutte dalle cose dette al n° 139. Per ogni complesso quadratico di questa classe la congruenza di 4° grado delle rette singolari si scinde in 4 congruenze lineari, distinte o coincidenti. Essendovi un gruppo caratteristico di 3 indici, quei complessi quadratici hanno una *quaterna focale* di rette appartenenti alla rigata quadrica comune alla serie lineare corrispondente di complessi fondamentali, cioè alla rigata coniugata a quella delle rette doppie, e questa quaterna focale è comune a tutta la serie omofocale e basta ad individuarla. Delle 4 rette (distinte o coincidenti) di cui essa si compone, ciascuna è direttrice di una delle 4 suddette congruenze lineari di rette singolari di uno qualunque di questi complessi quadratici. Ciascuna di queste congruenze lineari contiene la rigata quadrica delle rette doppie ed ha quindi entrambe le direttrici giacenti sulla rigata coniugata; ma mentre l'una di queste direttrici è fissa (quella cioè che appartiene alla quaterna focale), l'altra varia col variare del complesso quadratico nella serie omofocale. Inoltre vi è tra quelle due direttrici un'altra differenza importante, cioè questa che mentre un punto qualunque della superficie singolare di 2° grado è *singolare* in quanto che il suo cono del complesso si scinde in due piani taglientisi in una generatrice di quella appartenente al sistema

delle rette doppie del complesso (sicchè per un tal punto singolare della serie omofocale di complessi quadratici la retta singolare corrispondente non varia col variare del complesso, cioè non si ha un fascio di rette singolari corrispondenti, come per un ordinario punto singolare), invece per un punto di una direttrice appartenente alla quaterna focale quei due piani coincidono nel piano che congiunge il punto stesso all'altra direttrice della corrispondente congruenza di rette singolari, e similmente ogni piano passante per una retta focale ha la conica del complesso scissa in due punti coincidenti nel punto d'intersezione di quel piano colla direttrice coniugata. Cosicchè quelle 4 direttrici delle congruenze di rette singolari, le quali costituiscono la quaterna focale, hanno tutti i loro punti e piani per punti e piani *doppi* rispetto ad ogni complesso della serie omofocale, mentre ciò non accade per le altre direttrici; questo spiega anche il perchè quelle caratterizzano la serie omofocale di complessi quadratici, mentre quelle direttrici *secondarie* mutano col mutare il complesso in questa serie⁽⁵¹⁾. In ogni retta singolare di uno di questi complessi quadra-

(51) Il WEILER nel suo lavoro sbaglia completamente a proposito di queste congruenze di rette singolari, attribuendo alle 2 direttrici di una stessa congruenza uffizi correlativi, contrariamente a quanto accade. Egli in fatti afferma a proposito dei casi $[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$, $[(2\ 1\ 1)\ 1\ 1]$, $[(1\ 1\ 1)\ 2\ 1]$, ecc., ripetutamente che delle due direttrici di una di quelle congruenze l'una è luogo di punti doppi, l'altra involuppo di piani doppi del complesso quadratico; il che non è. In conseguenza dà anche qualche costruzione erronea. Credo perciò non inutile il dare qui i valori veri delle coordinate delle direttrici delle congruenze singolari, almeno per due casi. Pel caso più generale $[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$ supponendo con WEILER che l'equazione di condizione per la retta e l'equazione del complesso quadratico siano rispettivamente:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0, \quad \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2 + \lambda_6 x_6^2 = 0,$$

si trovano per le direttrici x' , x'' di una congruenza lineare di rette singolari le coordinate:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_2 = x'_3 = 0, & x'_4 &= \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)}, \\ x'_5 &= \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)}, & x'_6 &= \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)}; \\ x''_1 &= x''_2 = x''_3 = 0, & x''_4 &= \sqrt{\lambda_4(\lambda_5 - \lambda_6)}(\lambda_4 - \lambda_5 - \lambda_6), \\ x''_5 &= \sqrt{\lambda_5(\lambda_6 - \lambda_4)}(\lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_4), & x''_6 &= \sqrt{\lambda_6(\lambda_4 - \lambda_5)}(\lambda_6 - \lambda_4 - \lambda_5); \end{aligned}$$

e per le altre congruenze singolari basterà in queste espressioni cambiare il segno ad uno dei 3 radicali che vi compaiono. Si può allora verificare analiticamente che le 4 direttrici che si hanno da x' sono appunto quelle princi-

tici il punto singolare ed il piano singolare corrispondenti saranno determinati dallo stare il punto sulla direttrice principale (focale) della congruenza lineare singolare cui quella retta appartiene, e dal passare il piano per quella direttrice stessa, e non per la direttrice secondaria come afferma il WEILER.

Risulta immediatamente da proposizioni generali da noi stabilite che ogni complesso lineare fondamentale di un complesso quadratico qualunque di questa classe contiene o l'uno o l'altro dei due sistemi di generatrici della quadrica, che è superficie singolare: contiene quello a cui appartengono le 8 direttrici considerate se fa parte del sistema lineare doppiamente infinito di complessi fondamentali, altrimenti esso conterrà il sistema delle rette doppie. Orbene in quest'ultimo caso si corrisponderanno rispetto al complesso fondamentale considerato le 4 direttrici principali a 2 a 2, e anche le 4 direttrici secondarie a 2 a 2. Questo mostra come un complesso quadratico della serie omofocale sia determinato quando, essendo già data questa e per conseguenza la quaterna di rette focali (direttrici principali) si dà ancora una direttrice secondaria di una congruenza lineare singolare. Si vede pure che se 2 rette della quaterna focale coincidono, coincideranno pure con esse le direttrici secondarie corrispondenti, cosicchè due delle 4 congruenze singolari coincideranno nella congruenza speciale delle tangenti lungo quella retta alla superficie singolare.

pali, che dicemmo rette focali, mentre le 4 rette x'' sono le direttrici secondarie; e si verifica pure immediatamente che il passaggio ad un complesso qualunque della serie omofocale, passaggio che si effettua ponendo $\lambda_i/(k\lambda_i + 1)$ in luogo di λ_i , non muta le rette x' , ma muta le rette x'' . Per questo caso il WEILER non trova le coordinate di quelle direttrici. Le dà invece per il caso $[(2\ 1\ 1)\ 1\ 1]$, ma dà espressioni errate, il che spiega come anche in questo caso trovi risultati erronei. Le vere coordinate delle due direttrici per ciascuna congruenza di rette singolari, nell'ipotesi che all'equazione del complesso si dia, come fa il WEILER, la forma:

$$\lambda_1 (p_{12} + p_{34})^2 - \lambda_2 (p_{12} - p_{34})^2 + p_{14}^2 = 0,$$

sono:

$$\begin{cases} p'_{12} = 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ p'_{34} \end{cases} \quad \begin{cases} p'_{34} = 0, \\ p'_{12} \end{cases} \quad p'_{23} = \lambda_2 - \lambda_1, \quad p'_{13} = p'_{42} = p'_{14} = 0,$$

$$\begin{cases} p''_{34} = 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ p''_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} p''_{12} = 0, \\ p''_{34} \end{cases} \quad p''_{23} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad p''_{13} = p''_{42} = p''_{14} = 0,$$

di cui p' è direttrice principale, o focale, p'' è direttrice secondaria.

Venendo finalmente al distinguere i vari casi che si presentano in questa classe di complessi quadratici ricordiamo che la quaterna focale proveniva dalla intersezione di due quadriche a 1 dimensione in uno spazio lineare a due dimensioni (due coniche nel piano), delle quali due quadriche una notevole è rappresentata dalla rigata quadrica in cui sta quella quaterna di rette. Dunque dal teorema del n° 160 siamo ridotti a classificare le quaterne di punti d'intersezione di una conica fissa con altre coniche nel piano. Ora dalla nostra teoria generale risulta immediatamente che nel caso $[1\ 1\ 1]$ quei 4 punti sono distinti, nel caso $[2\ 1]$ due di essi coincidono, nel caso $[3]$ ne coincidono tre. Inoltre nel caso $[(1\ 1)\ 1]$ coincidono a coppie in 2 punti e nel caso $[(2\ 1)]$ coincidono tutti 4. — Se la conica fissa si scinde in una coppia di rette, allora nel caso $[\overline{1}\ 1\ 1]$ si hanno 2 punti su ciascuna retta, nel caso $[\overline{1}\ 2]$ sull'una retta coincidono quei due punti, nel caso $[\overline{2}\ 1]$ su ciascuna delle due rette uno dei 2 punti è andato a coincidere col loro punto d'intersezione, nel caso $[\overline{3}]$ sull'una delle due rette anche l'altro punto è andato a coincidere con questo, e nel caso $[\overline{1}\ (1\ 1)]$ su ciascuna delle due rette i 2 punti del caso generale coincidono. — Finalmente se la conica fissa si riduce ad una retta doppia, allora nel caso $[(\overline{1}\ 1)\ 1]$ vi sono 2 punti (doppi) distinti, e nel caso $[(\overline{2}\ 1)]$ questi coincidono.

Applicando adunque la regola fornita dal teorema citato avremo per le varie specie di complessi quadratici le seguenti particolarità, dipendenti solo, entro ciascuna delle 3 sottoclassi, dalla quaterna focale.

I. *Superficie singolare una quadrica doppia non degenerata.*

$[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$. Caso generale: le 4 rette focali, e quindi anche le 4 congruenze lineari di rette singolari sono distinte. Vi sono 3 complessi fondamentali isolati involutori.

$[(1\ 1\ 1)\ 2\ 1]$. Due rette focali coincidono in una retta doppia del complesso quadratico (proveniente dall'indice caratteristico 2); due delle congruenze lineari singolari coincidono nella congruenza speciale delle tangenti alla quadrica lungo quella retta.

$[(1\ 1\ 1)\ 3]$. Tre rette focali coincidono in una retta doppia, e quindi anche 3 delle 4 congruenze singolari coincidono nella congruenza speciale delle tangenti alla quadrica lungo quella.

II. *Quadrica degenerata in due piani con due punti comuni.*

[(2 1 1) 1 1]. Caso generale: I due sistemi di generatrici della quadrica sono scissi in due coppie coniugate di fasci, di cui l'una è composta di rette doppie del complesso, l'altra contiene le quattro rette focali, 2 per ciascun fascio. Vi sono 4 congruenze lineari di rette singolari, di cui ciascuna ha per direttrici una di quelle rette focali e una retta dell'altro fascio (di quella stessa coppia di fasci).

[(2 1 1) 2]. Sull'un fascio coincidono due rette focali in una retta che sarà doppia pel complesso quadratico. Le congruenze lineari di rette singolari relative alle altre due rette focali non si specializzano⁽⁵²⁾; invece coincidono le altre due, e, com'è facile vedere, in una congruenza lineare che si scinde nel piano e nel punto di rette i quali contengono quel fascio.

[(3 1 1) 1]. Delle due rette focali di ciascuno dei 2 fasci, una per ciascuno è venuta a coincidere colla retta comune ai due fasci, e corrispondentemente due delle 4 congruenze lineari di rette singolari coincidono in una congruenza speciale avente quella retta per asse.

[(4 1 1)]. Tre delle 4 rette focali coincidono colla retta comune ai 2 fasci e danno luogo ad una congruenza lineare di rette singolari (contata tre volte) scissa nel piano e nel punto di un fascio; rimane nell'altro una retta focale che dà luogo ad una congruenza lineare generale di rette singolari.

III. *Superficie singolare un piano e un punto uniti contati 4 volte.*

[(2 2 1) 1]. Due rette focali distinte per quel punto in quel piano, le quali sono assi di congruenze lineari speciali, che, contate doppiamente, comprendono tutte le rette singolari del complesso quadratico.

[(3 2 1)]. Quelle due rette focali, e quindi anche quelle due congruenze lineari, coincidono.

⁽⁵²⁾ Il WHILER (loc. cit. n° 27) dice invece che queste due congruenze lineari sono speciali con direttrici che si tagliano.

CLASSE *F*.

169. *Complessi quadratici le cui caratteristiche contengono un gruppo di 3 indici ed uno di 2.*

Essi hanno un sistema lineare doppiamente infinito di complessi lineari fondamentali ed inoltre un fascio di altri complessi lineari fondamentali involutori a quelli. Vi è dunque una rigata quadrica di rette doppie ed inoltre vi sono due rette doppie (distinte o coincidenti) sulla rigata quadrica coniugata. La superficie di 2° grado che contiene queste rigate è ancora, contata doppiamente, la superficie singolare come accadeva per la classe precedente. Il complesso quadratico è ancora generabile con due fasci di complessi lineari proiettivi, le cui congruenze di base abbiano comune la rigata quadrica delle rette doppie, ma anche con fasci convenienti di complessi lineari, le cui congruenze di base hanno solo comuni le 2 rette doppie contenute nella rigata quadrica coniugata. Si hanno solo queste 3 specie:

$[(1\ 1\ 1)(1\ 1)\ 1]$, $[(1\ 1\ 1)(2\ 1)]$, $[(2\ 1\ 1)(1\ 1)]$. *Serie omofocale di grado 1°.*

Si può anche per questa classe considerare una quaterna focale per la serie omofocale di complessi quadratici come pei complessi della precedente classe *E* (soltanto che quella quaterna sarà specializzata) e anzi valgono anche per la classe che ora consideriamo le proprietà relative a quella quaterna focale ed alle congruenze di rette singolari che vedemmo per la classe precedente, poichè quelle proprietà non dipendevano che dall'esistenza di un gruppo caratteristico di 3 indici. In particolare avremo la distinzione tra quelle tre specie comprese in questa classe paragonandone quelle loro quaterne focali a quaterne di punti di una conica aventi per caratteristiche (V. n° 160) $[(1\ 1)\ 1]$, $[(2\ 1)]$, $[\bar{1}(1\ 1)]$, rispettivamente. Avremo dunque:

$[(1\ 1\ 1)(1\ 1)\ 1]$. Oltre alla rigata quadrica (non specializzata) di rette doppie del complesso quadratico, questo ha altre due rette doppie nella rigata coniugata⁽⁵³⁾, nelle quali coincidono a coppie le rette della quaterna focale: le rette singolari formano due congruenze lineari speciali (contate due volte) aventi quelle due rette per assi.

(53) Il WEILER non nota il comparire di queste rette doppie separate sia in questo caso, sia nel successivo.

$[(1\ 1\ 1)(2\ 1)]$. Quelle due rette doppie coincidono in una retta, asse di una congruenza lineare speciale di tangenti alla quadrica, costituente, contata 4 volte, la congruenza delle rette singolari.

$[(2\ 1\ 1)(1\ 1)]$. La quadrica singolare si scinde in una coppia di piani con una coppia di punti. Oltre ad una coppia di fasci di rette doppie del complesso, ogni fascio della coppia coniugata contiene un'altra retta doppia del complesso quadratico, ecc.

CLASSE G.

170. *Complessi quadratici le cui caratteristiche contengono due gruppi di 3 indici, e quindi aventi per caratteristica: $[(1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1)]$.*

Un complesso quadratico di questa specie ha due serie lineari doppiamente infinite di complessi lineari fondamentali, le quali, per quanto sappiamo, saranno involutorie; quindi gli assi dei loro complessi speciali formeranno le due rigate quadriche coniugate di una stessa superficie di 2° grado, e saranno rette doppie del complesso e della sua superficie singolare, la quale si ridurrà quindi a quella superficie di 2° grado contata due volte. Ora il fascio di rette determinato da due rette doppie provenienti da gruppi caratteristici diversi sappiamo esser sempre composto di rette del complesso quadratico. Applicando questa proposizione a due generatrici qualunque di diverso sistema di quella superficie di 2° grado, noi vediamo che tutte le tangenti a questa superficie (le quali evidentemente formano un complesso quadratico) appartengono al complesso quadratico considerato. Dunque ogni complesso della specie considerata non è altro che il complesso delle tangenti di una superficie di 2° grado, la quale ne è superficie singolare.

La formula generale ci dà 0 per grado della serie omofocale di questo complesso quadratico, ed in realtà vi è solo un complesso quadratico che abbia quella superficie singolare. Bisogna notare che dicendo « superficie singolare » intendiamo non solo l'insieme dei suoi punti e dei suoi piani, ma anche l'insieme di quei suoi punti e piani che sono doppi rispetto al complesso quadratico. Quindi le superficie singolari p. e. dei complessi quadratici $[(1\ 1\ 1)1\ 1\ 1]$ e $[(1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1)]$ sono ben diverse, quantunque costituiscano entrambe delle superficie generali di 2° grado doppie; ma pel complesso $[(1\ 1\ 1)1\ 1\ 1]$ i punti ed i piani doppi formano 4 generatrici deter-

minate di quella superficie (la quaterna focale), mentre pel complesso $[(1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1)]$ tutti i punti ed i piani di quella superficie di 2° grado sono doppi (V. anche la nota al n° 144).

Come caso particolare del complesso ora visto delle tangenti di una superficie di 2° grado va considerato il caso $[(2\ 2\ 2)]$, che incontrammo nella classe E . Si può in fatti immaginare il caso $[(2\ 2\ 2)]$ come derivato da quello $[(1\ 1\ 1)(1\ 1\ 1)]$ facendo avvicinare indefinitamente i valori delle due radici triple del discriminante corrispondenti ai due gruppi caratteristici di questa. Già notammo che in tal caso vi è tutto un piano (o tutto un punto) di rette doppie del complesso quadratico e della sua superficie singolare: ciò proviene dal fatto che le due serie lineari doppiamente infinite di complessi fondamentali essendo involutorie devono diventare una serie di complessi lineari tutti speciali, quando vengono a coincidere. È chiaro che quella quadrica come luogo di punti (o inviluppo di piani) si sarà ridotta a quel piano doppio (o quel punto doppio), e quindi come inviluppo di piani (o luogo di punti) si sarà ridotta ad una conica di quel piano (o ad un cono avente il vertice in quel punto). Dunque nel caso $[(2\ 2\ 2)]$ il complesso quadratico si compone o delle secanti di una conica, o delle tangenti di un cono. — È da notarsi però che in questi casi la superficie dei piani singolari, o rispettivamente dei punti singolari, si può considerare come indeterminata: ogni piano dello spazio è singolare pel complesso quadratico delle secanti di una conica ed ogni punto dello spazio è singolare pel complesso quadratico delle tangenti di un cono quadrico.

171. Con ciò è compiuta la classificazione, che intendevamo fare dei complessi quadratici, trascurando quelle specie che si scindono in complessi lineari ⁽⁵⁴⁾. Come già facemmo per la classe A

⁽⁵⁴⁾ Tutti i risultati da noi ottenuti vanno d'accordo con quelli del WEILER salvo alcune inesattezze, che già rilevammo, della Memoria di questo. Vogliamo ancora notare qualche altra inesattezza di quella Memoria, pensando così di far cosa utile ai cultori della geometria della retta, ai quali può spesso accadere di doverla consultare. Pel complesso $[(2\ 2)\ 1\ 1]$, la cui superficie singolare vedemmo scindersi in un cono quadrico ed una conica, le rette singolari formano due congruenze quadratiche rispettivamente di tangenti al cono e di secanti della conica; i 2 complessi lineari a cui queste congruenze rispettivamente appartengono non sono punto involutori come dice il WEILER (n° 23). Lo stesso errore si ripete pel caso $[(3\ 2)\ 1]$, che vedemmo esser caso particolare di questo (WEILER, n° 35). Nel caso $[(2\ 2)\ 2]$ vi è, come parte della congruenza di 2° grado delle rette singolari, una congruenza quadratica di tangenti di un cono (o di secanti di una

dei complessi quadratici, così per le altre si possono dare le caratteristiche delle congruenze quadratiche focali, facendo uso del teorema dato al n° 160. Però è chiaro, per le teorie svolte, che le classi *E* ed *F* di complessi quadratici non possono avere per congruenze quadratiche focali che congruenze degenerate in coppie di congruenze lineari, e che le classi *D* e *G* non hanno congruenze focali, sicchè rimangono soltanto le congruenze focali dei complessi delle classi *B* e *C*. Come le congruenze quadratiche che ottenemmo dalla classe *A* di complessi quadratici avevano soltanto congruenze lineari fondamentali isolate e per focali delle rigate biquadratiche (non già come *superficie* focali, ma come luoghi di rette), così quelle ottenute dalle classi *B*, *C* hanno fasci di congruenze lineari fondamentali e quaterne di rette focali.

Specie dei complessi quadratici.

$[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$
 $[(1\ 1)\ 2\ 1\ 1]$
 $[(1\ 1)\ 3\ 1]$
 $[(1\ 1)\ 2\ 2]$
 $[(1\ 1)\ 4]$

 $[(2\ 1)\ 1\ 1\ 1]$
 $[(2\ 1)\ 2\ 1]$
 $[(2\ 1)\ 3]$
 $[(3\ 1)\ 1\ 1]$
 $[(3\ 1)\ 2]$
 $[(4\ 1)\ 1]$

 $[(2\ 2)\ 1\ 1]$
 $[(2\ 2)\ 2]$
 $[(3\ 2)\ 1]$

 $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1\ 1]$
 $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 2]$
 $[(2\ 1)\ (1\ 1)\ 1]$

Specie delle loro congruenze quadratiche focali.

$[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$
 $[(1\ 1)\ 2\ 1]$, $[\bar{1}\ (1\ 1)\ 1\ 1]$
 $[(1\ 1)\ 3]$, $[\bar{2}\ (1\ 1)\ 1]$
 $[\bar{1}\ (1\ 1)\ 2]$
 $[\bar{3}\ (1\ 1)]$

 $[(2\ 1)\ 1\ 1]$
 $[(2\ 1)\ 2]$, $[\bar{1}\ (2\ 1)\ 1]$
 $[\bar{2}\ (2\ 1)]$

 $[(3\ 1)\ 1]$
 $[\bar{1}\ (3\ 1)]$

 $[(4\ 1)]$

 $[(2\ 2)\ 1]$
 $[\bar{1}\ (2\ 2)]$

 $[(3\ 2)]$

 $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1]$
 $[\bar{1}\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$

 $[(2\ 1)\ (1\ 1)]$

conica), la quale appartiene ad un complesso lineare che non è quello speciale indicato dal WEILER (n° 40), ma un certo complesso lineare generale. Quest'ultima osservazione fu pure già fatta, almeno in parte, dall'HIRST nella Memoria citata, in cui si trovano anche corrette due altre inesattezze del WEILER, a proposito dei complessi quadratici $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 2]$ e $[(3\ 1)\ (1\ 1)]$, le quali perciò non abbiamo notato.

Siccome noi abbiamo già visto le proprietà che distinguono quelle varie specie di complessi quadratici e quindi le loro superficie singolari, così essendo queste le superficie focali di quelle congruenze quadratiche si può dopo queste indicazioni riguardare come compiuta anche la classificazione delle congruenze quadratiche. Queste congruenze si distinguono anzitutto in 2 classi, secondo che appartengono ad un complesso lineare generale ovvero ad un complesso lineare speciale. Nel classificare i complessi quadratici A noi troviamo (V. alla fine del n° 164) 7 specie di congruenze quadratiche della 1^a classe, e 12 della 2^a classe. Ora poi ne troviamo altre 11 specie della 1^a classe e 9 della 2^a classe. In totale vi sono dunque 18 specie di congruenze quadratiche appartenenti ad un complesso lineare generale, e 21 specie di congruenze quadratiche appartenenti al complesso speciale delle rette secanti di una retta fissa; in genere vi sono 39 specie di congruenze quadratiche⁽⁵⁵⁾. — Similmente contando le specie da noi trovate di complessi quadratici se ne hanno 49.

Quanto poi alla classificazione, che pure intendevamo fare, delle rigate biquadratiche, essa è contenuta (tenendo anche conto di tutte le degenerazioni possibili di quelle rigate), in quella delle classi B , C , D , F di complessi quadratici.

172. Terminiamo col ricordare, riguardo alla classificazione dei complessi quadratici, che entro ciascuna tra parecchie delle specie che noi così abbiamo trovato possono esservi ancora varii casi diversi proiettivamente tra loro: ciò accade per tutte quelle specie che sono dotate di invarianti assoluti. Noi vedemmo (n° 141) come si riconoscano queste specie e come per ciascuna di esse si possa assegnare immediatamente non solo il numero degl'invarianti assoluti, ma anche quei gruppi di elementi di forme di 1^a specie che li danno

(55) Con una rappresentazione, di cui abbiamo già parlato, e che si riduce in sostanza ad una proiezione stereografica di una quadrica a 3 dimensioni (generale o specializzata), si può ricondurre allo studio delle congruenze quadratiche di un complesso lineare, generale o speciale, lo studio delle superficie di 4° ordine con conica doppia, generale o scissa in due rette — od anche viceversa. In questo senso dunque si può dire che la classificazione di quelle congruenze quadratiche e la classificazione di queste superficie di 4° ordine sono identiche tra loro. Il fatto che nella geometria della retta non si ha il corrispondente del caso in cui la conica doppia di quelle superficie si scinde in due rette coincidenti dipende dal non potere un complesso lineare essere doppiamente specializzato, perchè la quadrica di rette non è specializzata.

come rapporti anarmonici⁽⁵⁶⁾. Così, come notammo, il complesso quadratico più generale ha 4 invarianti assoluti, di cui 3 appartengono alla sua superficie singolare. Così la superficie singolare corrispondente alla caratteristica $[2\ 2\ 2]$ non avrà invarianti assoluti, sicchè potremo concludere che una superficie di STEINER (o la sua reciproca) non ha invarianti assoluti. Così la superficie singolare $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1\ 1]$, cioè la rigata biquadratica, ha 2 invarianti assoluti (V. n° 156), e possiamo anche trovarli applicando la regola generale data. Si consideri cioè il piano tangente in un punto qualunque di quella superficie: la taglierà in una generatrice ed una cubica passante per quel punto; le 4 tangenti condotte da questo a quella cubica, e quella generatrice formano un gruppo di 5 rette di un fascio, che rimarrà proiettivo a se stesso mutando il punto della superficie ed avrà per invarianti assoluti quelli della superficie. Per uno di questi invarianti assoluti si potrà dunque assumere il rapporto anarmonico di una cubica piana contenuta nella superficie, donde risulta che questo rapporto anarmonico è lo stesso per tutte le cubiche piane della superficie, proprietà nota importante della rigata biquadratica e che noi così abbiamo ottenuto come caso particolare di una proprietà delle superficie singolari di complessi quadratici. Similmente notando che la superficie singolare $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1\ 1]$ deve avere un invariante assoluto ed interpretando questo nello stesso modo che nel caso precedente si ha una proprietà notevole di due quadriche passanti per uno stesso quadrilatero sghembo. E così via dicendo.

(56) Il teorema, che ivi notammo, cioè che ogni fascio di complessi lineari polari di rette rispetto ad un complesso quadratico contiene sempre un complesso involutorio con ogni sistema lineare di complessi fondamentali di quello, dà luogo a nuove proprietà riguardanti varie specie di complessi quadratici. Così in ogni complesso quadratico avente un fascio di complessi fondamentali potremo dire che le due rette doppie corrispondenti di quello stanno sempre in un complesso lineare rispetto a cui sono coniugate una retta qualunque dello spazio e la sua polare rispetto al complesso quadratico. Così in ogni complesso quadratico avente un sistema lineare doppiamente infinito di complessi fondamentali, e quindi la superficie singolare ridotta ad una quadrica doppia, p. e. nel caso $[(1\ 1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$, una retta e la sua polare rispetto al complesso taglieranno le stesse due generatrici di un certo sistema di quella quadrica: il sistema cioè delle rette doppie del complesso. Quindi nel caso $[(1\ 1\ 1)\ (1\ 1\ 1)]$ una retta e la sua polare tagliano le stesse generatrici di entrambi i sistemi della quadrica singolare e quindi sono polari rispetto a questa quadrica nel senso ordinario della parola.

Così nella specie più generale di complessi quadratici, cioè $[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$, è incluso quel complesso quadratico, che fu studiato dal BATTAGLINI (che lo considerava invece come il complesso quadratico più generale) ⁽⁵⁷⁾. La superficie singolare di un tale complesso è un *tetraedroide* di CAYLEY, e corrisponde alla relazione d'involuzione del gruppo dei 6 complessi quadratici speciali della serie omofocale relativa a quella superficie. Inoltre se si prendono i due elementi doppi di quell'involuzione si hanno i due soli complessi quadratici di BATTAGLINI relativi al tetraedroide (cosa che dimostrerò in altra occasione). È notevole come dalla considerazione di quell'involuzione e delle note proprietà della superficie di KUMMER si ricavano quelle del tetraedroide. Se si considera un piano doppio qualunque, i 6 punti doppi che stanno sulla sua conica di contatto formeranno un'involuzione e quindi saranno congiunti a 2 a 2 da 3 rette concorrenti in un punto, pel quale in conseguenza passeranno altri 3 piani doppi. Si vede così che i 16 piani doppi passano a 4 a 4 per certi 4 punti (pei quali il cono circoscritto alla superficie si scinderà in conseguenza in due coni quadrici) e che similmente i 16 punti doppi stanno a 4 a 4 su certi 4 piani (nei quali la curva d'intersezione colla superficie si scinderà in due coniche). Ma è pure facile scorgere che quei 4 punti e questi 4 piani formano lo stesso tetraedro, poichè in uno di questi piani i 4 punti doppi della superficie, che vi stanno, formano un quadrangolo, di cui ognuno dei 3 punti diagonali, stando su due rette congiungenti di punti doppi, e quindi intersezioni di piani doppi, della superficie, è punto comune a 4 piani doppi, ossia è uno dei 4 punti sopra considerati. Si hanno così le proprietà principali del tetraedroide ⁽⁵⁸⁾.

(57) V. Giornale di matem., 6 e 7.

(58) L'esposizione delle proprietà note del complesso quadratico di BATTAGLINI e di alcune mie ricerche su esso furono oggetto di alcune conferenze da me tenute nell'anno scolastico 1881-82 nella scuola di Magistero relativa al corso di Geometria superiore. Recentemente ne trovai una nuova proprietà interessante, che dimostrerò in altra occasione: quella di potersi rappresentare su un complesso *lineare* di coniche iscritte in un tetraedro. [*Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di BATTAGLINI e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro*, Giornale di matem., 21, 1883, pp. 355-378; questo volume, pp. 234-261; N. d. R.].

Il complesso quadratico di BATTAGLINI si può poi anche generare (in infiniti modi) come luogo delle rette che tagliano armonicamente due quadriche fisse (o correlativamente). Questa proprietà che fu scoperta dall'ASCHIERI (Giornale di matem., 8), assunta come definizione del complesso quadratico, conduce a cerca-

re quante e quali delle diverse specie di complessi quadratici si possano generare in quel modo. Il mio amico carissimo GINO LORIA ed io abbiamo fatto insieme questa ricerca assai interessante. [*Sur les différentes espèces de complexes du 2^e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre*, Math. Ann., XXIII, 1883, pp. 213-234; questo volume, pp. 1-24; N. d. R.]. Da essa, risulta che molte delle specie di complessi quadratici si possono generare in questo modo, ad esempio la specie [2 2 2], che ha per superficie singolare la superficie di STEINER o la sua reciproca. Da quella generazione si ottengono varie proprietà di quei complessi e delle loro superficie singolari, delle quali alcune sono nuove.