Alessandro Terracini

Prefazione

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. v–xviii

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_P5>

PREFAZIONE

Questo secondo volume delle *Opere* di CORRADO SEGRE (1) riproduce i lavori del Maestro che, grosso modo, si possono classificare sotto i titoli di « Geometria differenziale » e di « Enti immaginari » (2). Sono lavori che abbracciano un lungo periodo, dal 1886 al 1924, pur non rappresentando che una parte dell'attività di SEGRE. Molti di essi hanno un'importanza permanente per i risultati raggiunti, per i metodi impiegati, per i nuovi punti di vista segnalati; e tutti, come tutta l'opera di CORRADO SEGRE, sono esempi di nitidezza di idee e di propositi, di chiarezza di esposizione, di visione geometrica dei fatti: il carattere geometrico dell'opera di SEGRE è stato giustamente sottolineato da SEVERI nella sua bella Prefazione al primo volume di queste Opere, specialmente per quanto concerne la geometria iperspaziale, ma esso domina tutta la sua opera.

Non è questo il luogo per dilungarci sulla esatta accezione, se pure essa esiste, da attribuire all'aggettivo « geometrico »: lo possiamo intendere sia secondo quelle ragioni tradizionali che, come è stato detto, sole autorizzerebbero l'impiego del termine stesso, sia anche in un senso più concreto pensando ad esso come indicante il prevalere dell'aspetto intrinseco della materia trattata, al di là di ogni rappresentazione per esempio analitica. Comunque, non è dubbio quanto lo spirito geometrico pervada tutta l'opera di SEGRE.

---

(1) La revisione dei lavori riprodotti in questo volume è stata fatta dai professori E. BOMPIANI (XXX, XXXIII, XXXIV), B. SEGRE (XXV, XXVI, XXXI, XXXII, XXXV), A. TERRACINI (XXIII, XXIV, XXVII, XXVIII, XXIX), E. G. TOGLIATTI (XXII, XXXVI, XXXVII, XXXIX, XL), M. VILLA (XXXVIII). La revisione delle bozze è stata fatta da E. G. TOGLIATTI e D. GALLARATI; a quest'ultimo è dovuta anche l'osservazione contenuta nella nota dei revisori a p. 432.

(2) In tal modo, di fatto, i due gruppi di lavori sono suddivisi nel volume, anche se — per buone ragioni — non è stato ritenuto opportuno porre un sottotitolo definito a ciascuna delle due parti.

*
* *

I lavori di Segre pubblicati nel primo gruppo, che abbiamo detto potersi denominare di geometria differenziale, sono in realtà di geometria proiettiva differenziale, e riguardano parti svariate di questa disciplina, della quale Segre è stato uno dei creatori.

In essi ritroviamo il tratto caratteristico di Segre, di mantenere sempre in primo piano la figura geometrica della quale lo interessano le proprietà proiettive differenziali. Il suo temperamento lo porta di regola a servirsi di metodi analitici, variabili caso per caso, unicamente per dedurne fondatamente risultati che dicano qualche cosa alla sua intuizione o che egli ha previsti mediante la sua intuizione.

Non si cerchino in Segre metodi analitici unitari ideati per costruire tutta una teoria, come p. e. — per rimanere nel campo di cui ci occupiamo — in Wilczynski oppure in Fubini. Come è ben noto Wilczynski — che nel 1906 aveva pubblicata la *Projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces,* dove curve e superficie rigate erano studiate sistematicamente attraverso equazioni differenziali lineari ordinarie, o rispettivamente loro sistemi — è poi passato allo studio sistematico delle superficie (e delle congruenze rettilinee), condotto con mezzi analitici analoghi, nel senso che p. e. una superficie dello spazio ordinario viene rappresentata, a meno di omografie, da un sistema di due equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine in una funzione incognita di due variabili; dopo essersi preparato il cammino sviluppando una opportuna teoria di quei sistemi, Wilczynski cerca di leggere su di essi le proprietà della superficie. Anche in Fubini appare chiarissima la tendenza a introdurre metodicamente in luogo della figura geometrica degli enti analitici che la sostituiscano: per quanto riguarda la teoria delle superficie, il suo metodo si fonda su un sistema di forme differenziali atte a rappresentare una superficie a meno di omografie. In Segre non troviamo nulla di simile: anche quando la primitiva trattazione sintetica non ha lasciato nella sua redazione una traccia visibile, essa si indovina sotto la trattazione analitica, la quale ha, in ogni suo stadio saliente, un significato geometrico.

Certamente in questo modo Segre rinunciava ai vantaggi che provengono dall'applicazione metodica di un dato strumento analitico. Ma è da riconoscere che anche il metodo di Segre (se così lo si può chiamare, dato che esso consisteva nel non seguire un metodo analitico determinato) ha i suoi propri vantaggi: sopratutto quello di condurre costantemente a risultati geometricamente interessanti senza correre il pericolo che l'algoritmo possa prevalere sullo scopo al quale esso è dedicato. Questa stessa posizione ha anche portato SEGRE a poter esaminare una serie assai eterogenea di questioni di geometria proiettiva differenziale; senza naturalmente cadere in eclettismi, che non sarebbero assolutamente potuti rientrare nel suo modo di lavorare e di considerare i problemi.

Il primo lavoro che troviamo, fra quelli da ascriversi alla geometria differenziale, risale al 1897: *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie* (XXII). Il titolo non rivela quella che è forse la circostanza essenziale inerente a questo lavoro. Invero in esso quell'invariante, chiamato di MEHMKE-SEGRE o di SMITH-MEHMKE-SEGRE — relativo ad una coppia di elementi curvilinei di second'ordine contenuti in uno stesso piano, uscenti da un punto con la medesima retta tangente — appare, se non erro, per la prima volta come limite di un certo birapporto (il che ovviamente costituisce una giustificazione a priori del carattere proiettivo dell'invariante stesso). Restava così indicato un procedimento fecondo, destinato ad essere ripetutamente applicato in seguito nella geometria proiettiva differenziale. Su una questione analoga dello spazio CORRADO SEGRE doveva poi ritornare molti anni dopo con uno dei suoi ultimi lavori: *Sugli elementi curvilinei, che hanno comuni la tangente e il piano osculatore* (XXXV).

Nel primo lavoro di cui testè si è detto, l'indirizzo proiettivo differenziale appare soltanto, per così dire, in sordina: quello che in quel primo momento realmente interessava SEGRE erano le applicazioni a punti multipli di linee algebriche (p. e. ai tacnodi simmetrici), o alle condizioni perchè un punto semplice di una superficie algebrica sia multiplo per la sua linea parabolica. Doveva passare una decina d'anni prima che CORRADO SEGRE tornasse, e questa volta intenzionalmente, alla geometria proiettiva differenziale.

Intanto troviamo nel 1907 la prima (XXIII) di due Note che SEGRE ha dedicato espressamente alle congruenze W a falde focali rigate. Spinto da un risultato ottenuto poco prima dal BIANCHI sulle deformazioni infinitesime di una rigata che la mantengono rigata, CORRADO SEGRE ha assegnato il modo di costruire tutte le congruenze W in questione a partire da una loro falda focale, servendosi all'uopo di procedimenti sintetici e della rappresentazione delle rette dello spazio ordinario nei punti della quadrica di KLEIN. Di sei anni dopo è l'altra Nota *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate* (XXIX), originata dal desiderio di mettere alla prova l'affermazione che poco prima era stata fatta da un altro autore, secondo la quale se una congruenza W ha entrambe le falde focali rigate, oltre alla possibilità che sola era stata studiata sin allora, che alle generatrici rettilinee di una falda corrispondano le generatrici rettilinee dell'altra, ve ne sarebbe una nuova: corrispondenza tra le generatrici rettilinee della prima falda e asintotiche curve della seconda. SEGRE ha dimostrato che non si tratta di congruenze W di tipo nuovo, in quanto allora necessariamente la prima falda è una quadrica, cosicchè si ricade sul caso già studiato quando sulla quadrica si considera la seconda schiera. Ma la Nota, condotta con la consueta eleganza e col consueto ricorso a procedimenti analitici per verificare previsioni fatte per via sintetica, contiene altre cose notevoli relative alle congruenze W con una sola falda focale rigata, nonchè la costruzione delle congruenze W aventi come falda focale una quadrica; e anche vi si nota un'elegante applicazione della interpretazione geometrica, assegnata da VOSS, della condizione di integrabilità di un'equazione ai differenziali totali

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0\,.$$

Dello stesso 1907 è anche il primo lavoro di CORRADO SEGRE destinato ex professo alla geometria proiettiva differenziale negli iperspazi: è la Nota (XXIV) *Su una classe di superficie degli iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine.* Sono le superficie per le quali le coordinate proiettive omogenee del punto che le descrive, espresse come funzioni di due variabili indipendenti u, v soddisfano a una stessa equazione lineare omogenea alle derivate parziali del second'ordine, cioè — come nella geometria differenziale è venuto in uso di dire — di una stessa « equazione di LAPLACE » (la quale equazione di LAPLACE si dice *rappresentata* dalla superficie, sebbene in realtà superficie profondamente differenti tra loro possano « rappresentare » una medesima equazione di LAPLACE). Nello spazio ordinario, una superficie rappresenta sempre una coppia di equazioni di LAPLACE (e tutte le loro combinazioni lineari) il cui sistema individua la superficie a meno di omografie; e, se si prescinde dall'esigenza che la superficie venga individuata a meno di omografie, anche il caso di una sola equazione si trovava già ampiamente nella letteratura in quanto p. es. in DARBOUX viene applicata frequentemente l'osservazione che, se i sistemi delle linee $u =$ costante, $v =$ costante sono coniugati, le quattro coordinate sono soluzioni di una equazione della forma

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = a(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v} + c(u, v)\, \theta , \tag{1}$$

e viceversa. Per le superficie appartenenti agli iperspazi, in generale le cose stanno diversamente: soltanto nello spazio a 4 dimensioni ogni superficie rappresenta un'equazione di LAPLACE. Lo scopo della Nota di SEGRE consiste precisamente nello studio di quelle superficie degli iperspazi, da lui chiamate superficie Φ, che rappresentano un'equazione di LAPLACE. Queste superficie (o i reticoli delle loro linee caratteristiche che, come ora si dirà, le ricoprono doppiamente) erano già stati studiati da GUICHARD e anche nella tesi di E. E. LEVI (dedicata principalmente alle questioni metriche), il quale aveva denominate le superficie in questione superficie a punti planari: ne costituiscono un esempio le immagini sulla quadrica di KLEIN delle congruenze W dello spazio ordinario. La trattazione di SEGRE è sistematica, e muove — prescindendo al momento dal requisito che si tratti di una superficie Φ — dalla considerazione di quello che oggi si chiama lo $S(2)$ osculatore alla superficie in un suo punto x, cioè il minimo spazio che contiene il punto x insieme coi suoi derivati primi e secondi (ed è generalmente uno S_5), e da quella del « cono di DEL PEZZO » relativo al punto x, vale a dire della V_4^2 ricoperta dai piani osculatori in x alle linee delle superficie passanti regolarmente per x. Le superficie Φ sono quelle per le quali in ogni punto generico si ha eccezione a quanto ora detto, nel senso che gli $S(2)$ osculatori sono degli S_4. SEGRE definisce il doppio sistema delle « linee caratteristiche » della superficie Φ (doppio sistema che si proietta costantemente in S_3 secondo un doppio sistema coniugato), e in relazione con questo introduce geometricamente la trasformazione di LAPLACE per l'equazione (1). Il caso in cui lo spazio ambiente di una superficie Φ è uno S_5 ferma in modo particolare l'attenzione di SEGRE, in quanto allora la totalità ∞^2 degli iperpiani osculatori appartiene alla specie duale delle superficie Φ; e anzi i piani tangenti della superficie Φ di partenza appaiono altresì nel modo duale. Anche la varietà V_4 ricoperta dai piani tangenti di una superficie viene caratterizzata da SEGRE con una particolarità geometrica caratteristica per il caso delle superficie Φ. Insomma, si può dire che nella Nota in questione sono introdotti in germe i concetti e le proprietà che, a partire da quel momento, hanno dominato molti fra i successivi sviluppi della geometria proiettiva differenziale iperspaziale; e anzi alla possibilità delle generalizzazioni successive molto spesso si accenna in questa Nota.

Le due Note di geometria proiettiva differenziale che cronologicamente seguono la XXIV si riferiscono allo spazio ordinario, e sono di importanza assai diversa. Prescindendo qua dalla XXV (*Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti*), che considera una classe particolare di superficie, quelle aventi un doppio sistema coniugato di linee tali che le sviluppabili circoscritte lungo ciascuna di esse sono coni (superficie duali, dunque, di quelle con un doppio sistema coniugato di linee piane) — superficie che SEGRE, seguendo VOSS, chiama superficie P, — la XXVI, nonostante il suo titolo poco appariscente (*Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*), costituisce un progresso molto notevole nella teoria generale delle superficie, in quanto in essa appare per la prima volta quella particolare terna di rette tangenti in un punto, che oggi prendono il nome di *tangenti di* SEGRE (le quali, dopo le tangenti asintotiche, sono tra le tangenti particolari più importanti nella geometria proiettiva differenziale). SEGRE prende le mosse dalla corrispondenza (generalmente cremoniana, del terz'ordine) che a partire da un punto generico O di una superficie S e dal relativo piano tangente ω resta stabilita tra i piani della stella O e i punti del piano ω quando a ogni piano π della stella si fa corrispondere il punto P comune ai tre piani che toccano la superficie in O e rispettivamente in due suoi ulteriori punti infinitamente vicini situati nel piano π. E' chiaro come questa corrispondenza generalizzi quella, classica, tra tangenti coniugate di una superficie, il che spiega il titolo della Nota. Approfondendo ulteriormente la questione, SEGRE giunge precisamente alla terna di tangenti già segnalata, oltre che a quella delle *tangenti di* DARBOUX, così denominate in quanto DARBOUX, sia pure da un altro punto di vista, già le aveva fatte conoscere.

Torniamo invece agli iperspazi con la Memoria XXVII: *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi* (della quale la XXVIII: *Aggiunta alla Memoria: Preliminari ...* costituisce un complemento). Essa, nella geometria proiettiva differenziale iperspaziale, riveste quello stesso carattere di importanza fondamentale che già si è rilevato per la Nota XXIV. Come esprime il titolo, lo scopo principale di questa Memoria è lo studio, in S_n, delle varietà generate da uno spazio variabile. Così vengono studiate le questioni che concernono la distribuzione degli spazi tangenti di quelle varietà nei singoli punti di uno spazio generatore, e l'eventuale incidenza di spazi generatori infinitamente vicini. Si tratta di problemi fondamentali, che negli spazi superiori sono molto meno immediati e più interessanti che nello spazio ordinario, dove essi sono triviali. Per quanto concerne la prima questione, SEGRE trova (per n sufficientemente grande) che « in generale » per una $V_{k+\alpha}$ contenente ∞^{α} S_k, gli $S_{k+\alpha}$ tangenti nei singoli punti di uno S_k generatore, sia G, ricoprono una $V_{2k+\alpha}$, appartenente ad uno spazio $[\alpha k+k+\alpha]$, la quale si può riguardare come uno S_k-cono ottenuto proiettando dallo spazio G una « varietà di SEGRE » (varietà $V_{k+\alpha-1}$ rappresentante le coppie di punti estratti rispettivamente da uno S_k e da uno $S_{\alpha-1}$, nel senso già studiato da SEGRE nella Nota XIII (queste *Opere*, vol. I, p. 173), o « varietà prodotto » dei due spazi testé nominati): come tale, la $V_{2k+\alpha}$ deve contenere ulteriormente $\infty^{\alpha-1}$ S_{2k+1}, i quali sono poi gli spazi congiungenti G con gli S_k generatori infinitamente vicini. Per quanto concerne la seconda questione, riguardante le eventuali incidenze di uno S_k generatore generico G con spazi generatori infinitamente vicini, « in generale », se $2k+\alpha > n$, sempre G è incontrato da qualche spazio generatore infinitamente vicino, e SEGRE determina i caratteri della varietà luogo dei punti d'intersezione. Ma egli trova risultati più notevoli, quando il sistema ∞^{α} di S_k considerato viene particolarizzato in modo che i predetti punti di intersezione esistano anche a prescindere dalla disuguaglianza prima considerata. E SEGRE determina (per non parlare del caso $\alpha=1$) tutti i sistemi ∞^2 di piani tali che sempre due piani infinitamente vicini siano incidenti. Si tratta dunque di una delle possibili generalizzazioni del concetto elementare di rigata sviluppabile. SEGRE ha poi anche seguito un'altra via per giungere ad un'altra generalizzazione di quello stesso concetto considerando le V_k i cui S_k tangenti costituiscono una totalità di dimensione minore di k (cosicchè ciascuno di essi è tangente alla V_k in tutti i punti di uno spazio) e trovando p. e. tra l'altro le α varietà focali di una $V_{\alpha+1}$ rigata con $S_{\alpha+1}$ tangente fisso lungo ogni generatrice, col che SEGRE generalizza la proprietà dei sistemi ∞^{n-1} di rette in S_n che egli aveva indicato vari anni prima nella Nota *Un'osservazione sui sistemi di rette degli spazi superiori* (Rend. Circolo di Palermo, t. II, 1887). Tra le ricerche accennate — alle quali abbiamo fatto espresso riferimento anche perchè più facilmente riassumibili — ne sono intercalate altre, non meno importanti, e tutte riguardanti questioni basilari di geometria proiettiva differenziale iperspaziale, concernenti altresì varietà che non sono luoghi di spazi. In questa Memoria si trovano poi anche estese alle varietà quelle nozioni che nella Nota XXIV avevano condotto SEGRE alla nozione delle superficie Φ: una di queste estensioni conduce alla Nota XXVIII, dove vengono caratterizzate le varietà a tre dimensioni che rappresentano quattro equazioni di LAPLACE linearmente indipendenti.

Di carattere più particolare è la Nota *Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi inviluppi* (XXX), destinata in sostanza a interpretare nella geometria dei regoli (o schiere) proprietà proiettive differenziali di alcuni sistemi di piani dello S_5, attraverso la rappresentazione dello spazio rigato sulla quadrica di KLEIN, e forse, più che dal desiderio di una nuova interpretazione, originata dai due precedenti lavori di SEGRE sulle congruenze W. Ma anche in questo lavoro, del resto relativamente tenue, che avrebbe potuto cadere in quella geometria che il D'OVIDIO (al quale appunto sono dedicati gli *Scritti matematici* fra i quali fu pubblicata nel 1918 la Memoria in questione) aveva caratterizzato come « tic-tac geometria », si vede come SEGRE, anche quando si trattava di passare da un'interpretazione ad un'altra, nella nuova interpretazione voleva vederci chiaro; e così, per introdurre nella geometria dei regoli la nozione che corrisponde a quella di due piani infinitamente vicini, tra loro incidenti, in S_5, pone la nozione di quadrica e quartica sghemba (di 1ª specie, esistente sulla quadrica) tra loro *concatenate*, particolarità che consiste nell'esistenza di un quadrilatero semplice (e quindi di infiniti) iscritto nella quartica, i cui lati appartengano alla quadrica. Alla luce della nozione così posta SEGRE enuncia facilmente proprietà di sistemi ∞^1 o ∞^2 di regoli provenienti nel modo indicato da opportuni sistemi di piani di S_5; e trova così sistemi ∞^1 (o ∞^2) di quadriche, nei quali ogni quadrica è concatenata con la corrispondente quartica caratteristica (o rispettivamente con tutte le sue quartiche caratteristiche). Fra i sistemi ∞^2 sono particolarmente notevoli quelli in cui la superficie inviluppata possiede ∞^2 quadrilateri semplici inscritti tali che ogni lato risulta tangente alla superficie stessa nei due vertici che esso congiunge (a questa classe di superficie appartiene per esempio la superficie di KUMMER).

Una questione postagli da CASTELNUOVO ha condotto SEGRE a determinare le curve iperspaziali che ammettono ∞^2 piani 6-secanti (*Sui fochi di 2° ordine dei sistemi infiniti di piani, e sulle curve iperspaziali con una doppia infinità di piani plurisecanti*, XXXI): la loro determinazione conduce SEGRE a due soli tipi. Il punto di partenza di SEGRE, come esprime il titolo, è costituito dalla ricerca del numero (cinque) dei fochi di second'ordine esistenti su un piano generico di una totalità ∞^2 in S_4 (punti che risultano comuni ad esso e a due ulteriori piani consecutivi del sistema stesso), laddove i fochi di prim'ordine costituiscono una conica. Soltanto per particolari sistemi di piani, che SEGRE determina, avviene che tutti i fochi di prim'ordine lo siano anche di secondo: fra essi è il sistema dei piani delle coniche della superficie proiezione della F^4 di VERONESE. E la stessa superficie di VERONESE riappare nella nota XXXII: *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di* VERONESE. Nota breve ma succosa, nella quale si trovano: *a*) una nuova definizione delle cinque tangenti principali, in generale esistenti in un punto generico di una superficie appartenente allo S_5 (altre definizioni risultavano già sia dai *Preliminari*... (XXVII), sia da un lavoro di BOMPIANI); *b*) una nuova caratterizzazione della superficie di VERONESE, come unica superficie non sviluppabile appartenente a S_5, e avente in ogni suo punto indeterminate le tangenti principali; *c*) la nozione di « ordine di vicinanza » per due piani infinitamente vicini (in un sistema ∞^1 di piani) entro S_5, e più generalmente per due S_k entro S_{2k+1}, insieme con una proposizione semplice ma notevole relativa al caso in cui k è pari.

I due lavori che precedono hanno condotto SEGRE ad altre due Note concernenti la ricerca delle superficie iperspaziali contenenti ∞^2 curve appartenenti a degli S_3: *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali* (XXXIII). *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve spaziali* (XXXIV). In esse invero da un lato gioca di nuovo il concetto dei fochi di second'ordine di un sistema ∞^2 di spazi, mentre dall'altro lato è chiaro che si tratta di un problema che prende le sue origini dal desiderio di generalizzare una proprietà della superficie di VERONESE. E SEGRE trova che, lasciando da parte alcune classi di superficie, da lui enumerate, che dipendono da funzioni arbitrarie, le altre soluzioni devono ricercarsi tra alcune poche classi di superficie algebriche (superficie che egli chiama « delle specie isolate »). Ma mentre è abbastanza facile elencare un numero assai ristretto di tipi di superficie isolate tra le quali le soluzioni vanno cercate, nascono poi difficoltà notevoli per riconoscere se i singoli tipi si debbano escludere, o no. Anzi la seconda delle due Note ha precisamente lo scopo di escludere, con considerazioni sottili, uno dei predetti tipi (dove le curve spaziali in questione sarebbero quintiche sghembe), ché nella prima Nota era bensì stato escluso, ma con un ragionamento insufficiente. L'enunciato conclusivo si trova alla fine della prima Nota; ad esso SEGRE manifestamente si proponeva di apportare in seguito qualche complemento, il che a quanto risulta non è avvenuto.

Finalmente, l'ultima Nota del primo gruppo (XXXVI): *Le curve* *piane d'ordine n circoscritte a un* $(n+1)$*-latero completo di tangenti ad una conica, e una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti*, di carattere piuttosto particolare, si riattacca, per quanto concerne il suo aspetto differenziale, ad alcuni dei lavori precedenti, quali XXII, XXV, XXXV: le superficie menzionate nel titolo sono quelle rappresentate su un piano mediante un sistema lineare contenuto entro quello descritto nella prima parte del titolo stesso.

* * *

Le ricerche di SEGRE sugli elementi immaginari in geometria fanno tutte capo, direttamente o indirettamente, a STAUDT. E si può dire che ciò non cessa di sussistere anche per la Nota XL ripubblicata in questo volume, in gruppo con le XXXVII-XXXIX (le quali riguardano effettivamente gli elementi immaginari), sebbene questa concerna l'intervento non più dei numeri complessi ordinari, bensì dei «numeri duali». La predilezione che SEGRE dimostrava per alcune di quelle ricerche è da ascriversi probabilmente, almeno in parte, all'ammirazione che egli provava per STAUDT e per la sua teoria degli elementi immaginari.

Il primo lavoro di CORRADO SEGRE in questo campo: *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica* (XXXVII) ha origini didattiche, e precisamente è sorto dal corso di Geometria proiettiva che SEGRE ha tenuto, per incarico, all'Università di Torino nell'anno accademico 1885-86, in quanto SEGRE si è proposto lo scopo di rendere accessibile la teoria sintetica degli elementi immaginari già in un corso propedeutico di geometria proiettiva (naturalmente, bisogna riportarsi allo sviluppo che aveva tale corso — e alla sua autonomia — in tempi passati). La semplificazione rispetto alla trattazione di STAUDT è resa possibile dal fatto che SEGRE rinuncia a separare l'uno dall'altro due elementi immaginari coniugati (separazione che STAUDT aveva ottenuto mediante l'idea ingegnosa e sottile di associare ad un'involuzione in una forma di prima specie reale l'uno o l'altro dei due sensi di movimento sul sostegno della forma stessa), in quanto in molte questioni di geometria proiettiva sintetica è sufficiente considerare la coppia di elementi immaginari coniugati. Naturalmente, non si tratta di un ritorno ad una insoddisfacente trattazione prestaudtiana: SEGRE opera sempre col dovuto rigore, e — definita la coppia come un'involuzione ellittica su un sostegno reale, e la nozione di coppie armoniche in base a quella di involuzioni permutabili — svolge in modo conseguente la teoria, assumendo come coppia di elementi uniti in una proiettività ellittica l'involuzione permutabile con la proiettività stessa, e studiando le coppie di elementi immaginari coniugati quali si presentano nella teoria delle coniche. Con la trattazione contenuta in questo lavoro è da porre a riscontro quella accolta nelle « *Lezioni di geometria proiettiva* » di ACHILLE SANNIA, pubblicate pochi anni dopo.

Completamente diverso è lo scopo che SEGRE si è prefisso nella serie di quattro Note, uscite alcuni anni dopo, col titolo di « *Un nuovo campo di ricerche geometriche* » (XXXVIII). Il «nuovo campo» di SEGRE è quello dello studio delle totalità ∞^i $(1 \leq i \leq 5)$ di punti complessi, fra gli ∞^6 dello spazio reale (la valutazione delle dimensioni ha ovviamente luogo con riferimento a parametri reali). Le predette totalità sono *iperalgebriche* se sono algebriche le equazioni tra le parti reali delle coordinate, e i coefficienti dell'unità immaginaria, che servono a definire le totalità stesse. A base della trattazione di SEGRE stanno le corrispondenze *antiproiettive* (definibili come corrispondenze non proiettive, ma biunivoche e continue, e, p. e. tra due spazi reali punteggiati, tali da portare punti complanari in punti complanari; tra due forme di prima specie, invece, conservanti i gruppi armonici). Particolarmente notevoli sono tra esse le *antiinvoluzioni*, e — se esse ammettono elementi uniti — le totalità che questi formano, cioè le catene (totalità ∞^1, o risp. ∞^2, o ∞^3, proiettivamente equivalenti alle totalità dei punti reali di una retta reale, o rispettivamente di un piano, o dello spazio, reale; le catene rettilinee, e queste sole, già comparivano in STAUDT). Breve è il passo dalle antireciprocità alle *antipolarità*, piane o spaziali, e da queste alle *iperconiche*, o *iperquadriche*, luoghi dei loro punti autoconiugati, che — in quanto esistenti — costituiscono rispettivamente delle totalità ∞^3 o ∞^5. Insomma SEGRE ha evidentemente davanti a sè il programma di costruire una teoria analoga a quella della geometria proiettiva classica (e coglie le differenze degli sviluppi delle due teorie: p. e. l'analogo della generazione proiettiva delle coniche non conduce alle iperconiche, ma ad altri enti iperalgebrici), arricchita però con l'apporto delle sue ricerche, in altri campi, degli anni precedenti: si veda per esempio come a proposito dei fili cubici (totalità ∞^1, in quanto esistenti, dei punti base di una rete di iperconiche) intervengano le corrispondenze birazionali di una cubica ellittica in sè, quali egli aveva studiato nella sua Nota XII (pp. 152-172 del vol. I di queste *Opere*).

Alla precedente serie di Note seguiva immediatamente la Memoria

XXXIX: *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici,* con lo scopo di sviluppare nuovi punti di vista che conducessero a una visione più sintetica di alcune delle teorie in quelle contenute, e guidassero anche a una impostazione più generale di alcune questioni. Qua il punto di partenza è dato dalla rappresentazione mediante elementi reali della totalità degli elementi complessi di una forma geometrica fondamentale (generalizzazione della rappresentazione degli elementi complessi di una forma di prima specie nei punti del piano di GAUSS, e della sfera di RIEMANN, o nelle rette di una congruenza lineare ellittica), ed essa viene ottenuta mediante le « varietà di SEGRE ». Queste varietà alle quali è espressamente dedicata la Nota XIII (cfr. il vol. I di queste *Opere*), varietà la cui importanza è stata giustamente sottolineata da SEVERI nella Prefazione allo stesso vol. I, sono proprio state immaginate da CORRADO SEGRE (come emerge chiaramente da vari passi della Nota menzionata) per avere una rappresentazione dello S_r complesso sopra una varietà reale V_{2r}, in modo che la corrispondenza fra i punti complessi dello S_r e i punti reali della V_{2r} non soffra eccezioni. Sulla V_{2r} di SEGRE che entra in gioco in quest'occasione gli S_r generatori dei due sistemi che essa contiene sono immaginari, risultando i due sistemi immaginari coniugati l'uno dell'altro: le omografie dello S_r oggettivo in sè si rispecchiano in omografie della V_{2r} in sè, mutanti in sè ciascuno dei due menzionati sistemi di S_r generatori, laddove le omografie della V_{2r} in sè che scambiano quei due sistemi risultano immagini delle antiomografie dello S_r oggettivo. Nella presente Memoria appaiono nozioni di una certa generalità concernenti le varietà iperalgebriche (varietà ∞^1 o *monovarietà* o *fili* varietà ∞^2 o *bivarietà* o *tele*, ecc.), e vengono introdotti dei caratteri numerici, alcuni dei quali sono invarianti per trasformazioni iperalgebriche (trasformazioni le cui immagini reali sono corrispondenze algebriche), altri solo per trasformazioni proiettive. In quest'occasione SEGRE è stato altresì condotto ad introdurre punti bicomplessi (aventi come immagini punti complessi della varietà reale immagine), nozione che viene poi chiarita alla luce della teoria dei numeri complessi a più unità.

I punti di vista introdotti da SEGRE nei lavori XXXVIII-XXXIX sono veramente importanti, e il « nuovo campo » è stato coltivato in seguito con successo, per esempio dal VILLA. Non è facile spiegarsi il giudizio negativo formulato da H. F. BAKER — pur fervente ammiratore dell'attività geometrica di SEGRE — nella sua necrologia di CORRADO SEGRE pubblicata nel vol. I di «The Journal of the London

Mathematical Society» (1). BAKER scrive: « A third direction in which SEGRE sought to initiate a mathematical developement (*Un nuovo campo di ricerche geometriche ...*) connects itself with VON STAUDT'S theory of the imaginary in geometry (*Beiträge z. Geometrie der Lage*, e. g. 147-148); and regards two spaces, of which one consists of the points which are the conjugate imaginaries of the points of the other, as being in geometrical correspondence. This is not the place to argue the matter; but it would seem that this view cannot be maintened. For instance, the real line, often said to be possible through an imaginary point of a plane, can be infinitely varied by variation of the reference points by which the imaginary points of the plane are defined. But the theory developed by SEGRE is an interesting exercise in algebra ». Così si esprime il BAKER, e si resta veramente sorpresi del suo giudizio.

Vari anni dopo SEGRE è tornato, in un certo senso, a una ricerca del tipo delle precedenti: « *Le geometrie proiettive nei campi di numeri duali* (XL), che utilizza — come lo dice il titolo, — i numeri « duali », cioè della forma $a + b\,\varepsilon$, dove a, b sono numeri complessi ordinari, al pari dei numeri g, h che compaiono nell'equazione alla quale soddisfa la ulteriore unità ε: $\varepsilon^2 = g\,\varepsilon + h$, numeri che già apparivano in considerazioni geometriche anteriori, p. e. nella *Geometrie der Dynamen* di STUDY. E comparivano anche nel « *Saggio di geometria non archimedea* » di PREDELLA, il quale aveva considerate come punti di un nuovo spazio le omografie paraboliche sulle ordinarie rette punteggiate. SEGRE parte dalle quattro coordinate omogenee $x_i + y_i\,\varepsilon$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ di un punto duale (con alcune limitazioni intese a tener conto dei divisori dello zero), e cercando in che modo possono variare le x_i e le y_i in modo che il punto duale resti invariato, trova come immagini dei « punti duali » nello spazio ordinario complesso, le proiettività di dato birapporto sulle varie rette di quest'ultimo spazio; dopo di che Egli passa a sviluppare le prime proposizioni della geometria proiettiva nei nuovi spazi.

***

In entrambe le parti in cui questo vol. II è suddiviso affiora pressochè costantemente la predilezione di CORRADO SEGRE per la geometria proiettiva, anche quando egli ha creato indirizzi nuovi.

---

(1) Trad. italiana (di GINO LORIA) in Boll. Un. Mat. It., vol. XI, 1927, pp. 276-284.

Vengono alla mente le parole che su CORRADO SEGRE ha scritto il CASTELNUOVO: « E' notevole il fatto che la produzione del SEGRE appartiene quasi per intero alla geometria proiettiva, per quanto la sua cultura eclettica gli avrebbe permesso di coltivare con successo altri campi. Di quel ramo di matematica che aveva suscitato i suoi entusiasmi giovanili, egli parla spesso con ammirazione; si direbbe che esso costituisca una solida base per le sue indagini, dalla quale egli non voglia mai troppo allontanarsi ».

Nelle parole di CASTELNUOVO non è da vedere una minor valutazione dell'opera di CORRADO SEGRE, bensì solo l'indicazione di un punto di riferimento costante nell'opera geometrica di lui, anche quando egli si dirigeva verso orizzonti nuovi. Si tratta della constatazione di un fatto (e forse CASTELNUOVO aveva in mente in modo particolare l'indirizzo di SEGRE per la geometria su una curva algebrica). Per quanto riguarda l'attività geometrica di CORRADO SEGRE negli indirizzi che emergono dal contenuto del presente volume, quella constatazione ci dà una ragione del perchè quando SEGRE ha studiato gli immaginari in geometria, abbia proceduto come ha proceduto e quando ha fatto della geometria differenziale, questa sia stata la geometria differenziale proiettiva.

A. TERRACINI