

# CORRADO SEGRE

---

CORRADO SEGRE

## Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie

*Rend. R. Acc. Naz. Lincei*, Vol. **17** (1908), p. 405–412

*in*: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 62–70

<[http://www.bdim.eu/item?id=GM\\_Segre\\_CW\\_2\\_62](http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_62)>

## XXVI.

# COMPLEMENTI ALLA TEORIA DELLE TANGENTI CONIUGATE DI UNA SUPERFICIE

«Atti della Reale Accademia dei Lincei»,  
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,  
serie quinta, vol. XVII, 1908-2° semestre, pp. 405-412.

---

1. Sia  $O$  un punto ordinario di una superficie  $S$ ;  $\omega$  il piano tangente in esso. La considerazione dei punti della superficie infinitamente vicini di  $1^{\circ}$  ordine ad  $O$ , e dei loro piani tangenti, conduce al concetto di *tangenti coniugate*. Sono cioè coniugate due tangenti  $t$   $t_1$ , quando il punto di  $S$ , che è infinitamente vicino ad  $O$  su  $t_1$ , ha un piano tangente che taglia  $\omega$  secondo  $t$ .

Ora, se consideriamo anche i punti di  $S$  infinitamente vicini di  $2^{\circ}$  ordine, e poi quelli di  $3^{\circ}$  ordine, ecc., saremo condotti a nuove corrispondenze geometriche.

In fatti prendansi da prima, con  $\omega$ , i due piani tangenti ad  $S$  nei due punti che son successivi di  $O$  su una data curva passante regolarmente per  $O$ . Il punto  $P$  d'intersezione di questi tre piani sarà ben determinato quando si conosca il piano  $\pi$  di quei tre punti, cioè il piano osculatore in  $O$  alla detta curva. Nasce dunque in tal modo una corrispondenza tra i piani  $\pi$  della stella  $O$  ed i punti  $P$  del piano  $\omega$ .

Essa si può definire, come quella delle tangenti coniugate, introducendo, accanto alle linee di  $S$  passanti per  $O$ , le sviluppabili circoscritte ad  $S$  lungo esse. Come  $\pi$  indica il piano osculatore in  $O$  ad una tal linea, così  $P$  è il punto singolare (punto dello spigolo di regresso) del piano  $\omega$  nella sviluppabile circoscritta lungo quella linea. In particolare si può ricorrere alla linea sezione di  $S$  col piano  $\pi$ ; oppure, come sviluppabile, al cono circoscritto ad  $S$  dal punto  $P$ .

Alcuni caratteri della corrispondenza appaiono subito, senza calcoli. Si vede cioè che essa sarà algebrica, e generalmente biunivoca: dunque Cremoniana. Inoltre è chiaro che essa fa corrispondere ai piani  $\pi$  della stella  $O$  passanti per una retta  $t_1$  del fascio  $O\omega$  i punti  $P$  della retta  $t$  del fascio stesso, corrispondente a  $t_1$  nell'involuzione delle tangenti coniugate. Se quindi sostituiamo alla stella  $O$  di piani un piano punteggiato  $\omega'$  ad essa reciproco, avremo fra questo ed il piano  $\omega$  una trasformazione di DE JONQUIÈRES.

Se il punto  $O$  è parabolico per  $S$ , la corrispondenza fra le tangenti coniugate degenera; e però sarà pur degenerare la nostra corrispondenza fra la stella  $O$  ed il piano  $\omega$ .

2. Assumiamo  $O$  come origine di coordinate non omogenee, che chiameremo  $x_1 x_2 z$ ;  $\omega$  come piano  $z = 0$ . La superficie  $S$  sia rappresentata dall'equazione

$$(1) \quad z = f(x_1 x_2),$$

il cui 2° membro s'indicherà anche con  $fx$ . Siano  $(y_1 y_2 0)$  le tre coordinate di un punto  $P$  di  $\omega$ ; e  $z = (xu) (\equiv x_1 u_2 - x_2 u_1)$  l'equazione di un piano  $\pi$  passante per  $O$ , sicchè  $u_1 u_2$  si potranno riguardare come coordinate non omogenee di  $\pi$  entro la stella  $O$ .

La linea di contatto di  $S$  col cono circoscritto da  $P$  sarà l'intersezione di  $S$  colla superficie

$$z + \Sigma (y_i - x_i) f_{ix} = 0$$

(ove  $f_{ix}$  indica la derivata  $\partial fx / \partial x_i$ ), ossia, per la (1), colla superficie

$$(2) \quad fx + \Sigma (y_i - x_i) f_{ix} = 0.$$

Il dire che  $P$  e  $\pi$  sono omologhi nella corrispondenza definita al n. 1, equivale a dire che  $\pi$  è il piano osculatore in  $O$  alla linea (1) (2).

Ora, per esprimere che  $\pi$ , cioè il piano  $z = (xu)$ , ha contatto tripunto (o quadripunto, ecc.) in  $O$  con questa linea, basta scrivere che un tale contatto hanno in  $O$  le linee sezioni delle superficie (1) e (2) con quel piano: ossia le due linee piane (colle coordinate variabili  $x_1 x_2$ )

$$(3) \quad - (xu) + fx = 0$$

$$(4) \quad \Sigma y_i f_{ix} - \Sigma x_i f_{ix} + fx = 0.$$

Supponiamo  $fx$  sviluppabile in serie di potenze di  $x_1 x_2$ , sicchè

$$fx \equiv \alpha x + \beta x + \gamma x + \dots,$$

ove  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sono forme risp. di 2°, 3°, 4°... ordine. (La  $\alpha x = 0$

rappresenterà la coppia delle tangenti principali di  $S$  relative al punto  $O$ . Le equazioni (3), (4), ordinate secondo i gradi crescenti nelle  $x$ , diverranno :

$$(3') \quad - (xu) + \alpha x + \beta x + \dots = 0$$

$$(4') \quad \sum y_i \alpha_i x + (\sum y_i \beta_i x - \alpha x) + (\sum y_i \gamma_i x - 2\beta x) + \dots = 0.$$

3. Per avere il contatto tripunto di queste due curve nell'origine, scriviamo anzitutto che coincidono le loro tangenti, ossia :

$$(5) \quad \sum y_i \alpha_i x \equiv \varrho \cdot (xu).$$

Dopo ciò, per avere l'incontro tripunto in  $O$  di (3') con (4'), potremo sostituire ad esempio a quest'ultima l'equazione che si ottiene aggiungendole l'altra moltiplicata per  $\varrho$  (1). Così, al posto di (4'), avremo :

$$(4'') \quad [(\varrho - 1) \alpha x + \sum y_i \beta_i x] + [(\varrho - 2) \beta x + \sum y_i \gamma_i x] + \dots = 0.$$

Questa curva ha  $O$  doppio, colle tangenti rappresentate dal primo gruppo di termini. Perchè essa abbia incontro tripunto colla (3'), dovrà la tangente in  $O$  a questa, cioè  $(xu) = 0$ , far parte di quelle, cioè

$$(6) \quad (\varrho - 1) \alpha u + \sum y_i \beta_i u = 0.$$

Di qui si trae un'espressione di  $\varrho$ ; e sostituendola nella (5), questa identità lineare in  $x_1 x_2$  esprimerà il legame analitico fra  $y_1 y_2$  e  $u_1 u_2$ , rappresentante la corrispondenza considerata tra i punti  $P$  di  $\omega$  e i piani  $\pi$  di  $O$ . Basterà confrontare nei due membri dell'identità i coefficienti di  $x_1$  e di  $x_2$ , per avere le due equazioni della corrispondenza.

Ma possiamo ottenere facilmente le formole stesse, già risolte rispetto alle  $y$ , osservando che quell'identità (5) fra le  $x$  non può differire dalla nota identità

$$\alpha_1 x \cdot \alpha_2 u - \alpha_2 x \cdot \alpha_1 u \equiv \Delta \cdot (xu),$$

in cui  $\Delta$  è il determinante dei coefficienti delle forme lineari  $\alpha_1, \alpha_2$ , vale a dire il quadruplo del discriminante della forma quadratica

(1) In generale, dalla definizione analitica (cogli sviluppi in serie) della molteplicità d'intersezione di due curve piane analitiche in un punto semplice per l'una di esse (od anche in un punto qualunque), risulta subito che essa non muta, se all'equazione dell'altra curva si aggiunge quella della prima moltiplicata per una funzione qualunque.

$\alpha$ ; e si suppone  $\Delta \neq 0$  <sup>(2)</sup>. Confrontando i coefficienti di  $\alpha_1 x$ ,  $\alpha_2 x$ ,  $(xu)$ , si ha:

$$(7) \quad y_1 = \frac{\varrho}{\Delta} \alpha_2 u, \quad y_2 = -\frac{\varrho}{\Delta} \alpha_1 u;$$

e sostituendo in (6)

$$(\varrho - 1) \Delta \cdot \alpha u + \varrho(\alpha_2 u \cdot \beta_1 u - \alpha_1 u \cdot \beta_2 u) = 0,$$

ossia, rappresentando con  $Ju$  il determinante funzionale delle due forme  $\alpha u$  e  $\beta u$ ,

$$(8) \quad \varrho = \frac{\Delta \cdot \alpha u}{\Delta \cdot \alpha u - Ju}.$$

Quindi le (7) diventano:

$$(9) \quad \begin{cases} y_1 = \frac{\alpha u \cdot \alpha_2 u}{\Delta \cdot \alpha u - Ju} \\ y_2 = -\frac{\alpha u \cdot \alpha_1 u}{\Delta \cdot \alpha u - Ju} \end{cases}$$

4. Queste formole (9) rivelano subito alcuni caratteri della corrispondenza tra i punti  $P$  di  $\omega$  ed i piani  $\pi$  di  $O$ . Ed altre proprietà si possono enunciare insieme, applicando a quelle la legge di dualità nello spazio, cioè scambiando  $O$  con  $\omega$ ,  $P$  con  $\pi$ , ecc. Se poi al lettore farà comodo, sostituisca, come già si disse, alla stella  $O$  un piano reciproco  $\omega'$ , interpretando  $u_1$   $u_2$  come coordinate di punto in  $\omega'$ .

Si vede che la nostra corrispondenza è Cremoniana, e in generale di 3° grado. La rete omaloidica in  $\omega'$  è determinata dalle tre cubiche

$$\alpha u \cdot \alpha_1 u \quad \alpha u \cdot \alpha_2 u \quad \Delta \cdot \alpha u - Ju.$$

Essa si compone dunque di cubiche passanti per  $O$  con due rami, tangenti risp. alle due rette fisse  $\alpha u = 0$  (tangenti principali di  $S$ ); per modo che ogni ramo ha incontro quadripunto in  $O$  con una cubica qualunque della rete, ossia che i rami aventi in  $O$  la stessa retta tangente hanno fra loro incontro tripunto, cioè contatto di 2° ordine. (In  $O$  cadono dunque 8 delle 9 intersezioni di due cubiche

---

(2) In fatti se le due identità fossero distinte, ne seguirebbe, risolvendole, che  $\alpha_1 x$  e  $\alpha_2 x$  avrebbero un rapporto costante; e quindi il loro determinante sarebbe nullo.

della rete). Tale sarà anche la rete omaloidica delle cubiche di  $\omega$  corrispondenti ai fasci di piani della stella  $O$ . D'altra parte, alle rette di  $\omega$  corrisponderanno in questa stella, come involuipi di piani, dei cono di 3<sup>a</sup> classe, aventi  $\omega$  come piano tangente doppio, tangente cioè lungo le due tangenti principali  $\alpha$  di  $S$ ; e questi cono avranno fra loro, lungo ognuna di queste due generatrici, un contatto di 2<sup>o</sup> ordine, proveniente cioè dall'esistenza di tre generatrici successive comuni.

Nel ricavare le formole (9) abbiamo escluso il caso  $\Delta = 0$ , cioè del punto parabolico. Ma si possono ricavare le stesse formole, anche senza quella eccezione. In quel caso però esse si riducono ad esprimere  $y_1$  e  $y_2$  in funzione del solo rapporto  $u_1 : u_2$ ; cosicchè a tutti i piani della stella  $O$  passanti per una stessa retta del fascio  $O\omega$  viene a corrispondere uno stesso punto  $P$ . Ritroviamo la generazione della corrispondenza, già notata al n. 1.

Un altro caso degno di rilievo è quello in cui le forme  $\alpha$  e  $\beta$  abbian comune un fattor lineare: ciò vuol dire che una tangente principale (rappresentata appunto da quel fattore) ha in  $O$  con  $S$  incontro più che tripunto. Quel fattore lineare dividerà pure il Jacobiano  $J$  di  $\alpha$  e  $\beta$ ; sicchè le (9) si semplificheranno colla soppressione di quel fattor comune, e rappresenteranno in questo caso una *trasformazione quadratica*. La rete omaloidica in  $\omega$  si comporrà di coniche tangenti in  $O$  alla 2<sup>a</sup> tangente principale: coniche fra loro osculatrici in  $O$ . Questo caso si presenterà, ad esempio, sempre quando  $S$  sia una superficie rigata gobba.

Se poi entrambe le tangenti principali hanno con  $S$  incontro più che tripunto, cioè se  $\alpha$  divide  $\beta$ , e quindi anche divide  $J$ , le (9) si riducono al 1<sup>o</sup> grado: la corrispondenza fra il piano  $\omega$  e la stella  $O$  si riduce ad una *reciprocità*.

5. Procediamo ora ad una ricerca ulteriore. Rifacendoci a quanto accennavamo al n. 1, prendiamo sulla superficie  $S$ , col punto  $O$ , altri *tre* (anzi che *due*) punti successivi su una curva passante regolarmente per  $O$ ; ma in modo che quei 4 punti stiano in uno stesso piano  $\pi$ . Domandiamo che i quattro piani tangenti in essi a  $S$  concorrano in un punto  $P$ . Otterremo così  $\infty^1$  particolari coppie di elementi  $P$  e  $\pi$  omologhi nella corrispondenza precedentemente studiata. Per ognuna di esse potremo dire che: una linea tracciata su  $S$ , passante per  $O$ , ed avente  $\pi$  per piano *stazionario*, cioè iper-oscultore in  $O$ , dà una sviluppabile circoscritta lungo essa ad  $S$  per la quale il piano  $\omega$  ha come punto singolare un punto *stazio-*

nario  $P$  (punto di regresso sullo spigolo di regresso). In particolare : la linea di contatto di  $S$  col cono circoscritto da  $P$  ha in  $O$  contatto quadripunto col piano  $\pi$ .

Quest'ultima proprietà ci permette di proseguire nella via tracciata ai nn. 2 e 3, per ottenere i luoghi delle  $\infty^1$  coppie  $P\pi$ . Basterà che imponiamo alle curve piane (3'), (4') contatto quadripunto in  $O$ , mentre prima ci bastava il contatto tripunto. Già al n. 3 avevamo sostituito alla (4') la (4''); la quale, mettendovi i valori (8) e (9) di  $\varrho$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , diventa :

$$(10) \quad [Ju \cdot \alpha x + \alpha u (\alpha_2 u \cdot \beta_1 x - \alpha_1 u \cdot \beta_2 x)] + \\ + [(-\Delta \cdot \alpha u + 2Ju) \beta x + \alpha u (\alpha_2 u \cdot \gamma_1 x - \alpha_1 u \cdot \gamma_2 x)] + \dots = 0.$$

Il 1° gruppo, composto dei termini di 2° grado, si annulla (cfr. n. 3) per  $x = u$ ; sicchè si potrà porre, indicando con  $A(x, u)$  una forma, lineare nelle  $x$ , e quadratica nelle  $u$  :

$$(11) \quad (xu) \cdot A(x, u) \equiv Ju \cdot \alpha x + \alpha u (\alpha_2 u \cdot \beta_1 x - \alpha_1 u \cdot \beta_2 x).$$

Sostituisco ancora alla (10) quella che se ne deduce sommandola colla (3') moltiplicata per  $A(x, u)$ , cioè :

$$\alpha x \cdot A(x, u) + (-\Delta \cdot \alpha u + 2Ju) \beta x + \alpha u (\alpha_2 u \cdot \gamma_1 x - \alpha_1 u \cdot \gamma_2 x) \\ + \dots = 0.$$

Questa nuova curva ha in  $O$  un punto triplo, le cui tangenti son rappresentate dai termini scritti, di 3° grado nelle  $x$ . Perchè abbia in  $O$  incontro quadripunto colla (3'), la cui tangente è  $(xu) = 0$ , dovrà quel gruppo di termini annullarsi per  $x = u$ , cioè

$$(12) \quad \alpha u \cdot A(u, u) - \Delta \cdot \alpha u \cdot \beta u + 2Ju \cdot \beta u - \alpha u \cdot D(\alpha u, \gamma u) = 0,$$

ove  $D$  indica il determinante funzionale.

Quest'equazione (12) caratterizza le coordinate  $u_1$   $u_2$  dei piani  $\pi$  di cui ora ci occupiamo. Si può determinare la funzione  $A(u, u)$  che vi compare, eseguendo l'operazione  $\nabla = \alpha_2 u \cdot \partial / \partial x_1 - \alpha_1 u \cdot \partial / \partial x_2$  sui due membri dell'identità (11), il che dà

$$(u_1 \cdot \alpha_1 u + u_2 \cdot \alpha_2 u) A(x, u) + (xu) \cdot \nabla A(x, u) \equiv \\ \equiv Ju (\alpha_2 u \cdot \alpha_1 x - \alpha_1 u \cdot \alpha_2 x) + \\ + \alpha u [(\alpha_2 u)^2 \cdot \beta_{11} x - 2\alpha_1 u \cdot \alpha_2 u \cdot \beta_{12} x + (\alpha_1 u)^2 \cdot \beta_{22} x].$$

Ponendo poi  $x = u$ , e dividendo per  $2\alpha u$ , rimane :

$$A(u, u) = \frac{1}{2} [\beta_{11} u \cdot (\alpha_2 u)^2 - 2\beta_{12} u \cdot \alpha_1 u \cdot \alpha_2 u + \beta_{22} u \cdot (\alpha_1 u)^2].$$

Con ciò la (12) diventa, sopprimendo l'indicazione delle variabili  $u$ , che ora possiamo sottintendere :

$$(13) \quad \frac{1}{2} \alpha [\beta_{11} \alpha_2^2 - 2\beta_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{22} \alpha_1^2 - 2\Delta \cdot \beta] + \\ + 2\beta \cdot D(\alpha, \beta) - \alpha \cdot D(\alpha, \gamma) = 0.$$

In quest'equazione i termini della 1<sup>a</sup> linea costituiscono una forma di 5<sup>o</sup> ordine, quelli dell'altra di 6<sup>o</sup>. Dunque: i piani singolari  $\pi$  della stella  $O$  inviluppano un certo cono di 6<sup>a</sup> classe avente  $\omega$  per piano quintuplo. Dualmente: i punti singolari  $P$ , corrispondenti a quei piani, formano nel piano  $\omega$  una curva del 6<sup>o</sup> ordine avente  $O$  per punto quintuplo.

I suddetti termini di 5<sup>o</sup> ordine della (13) presentano, col fattore quadratico  $\alpha$ , la forma cubica

$$(14) \quad \beta_{11} \alpha_2^2 - 2\beta_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{22} \alpha_1^2 - 2\Delta \cdot \beta.$$

Ora si riconosce facilmente che quest'ultima ha appunto per Hessiano  $\alpha$  (a meno di un fattore costante): rappresenta cioè un ciclo di una proiettività ciclica di 3<sup>o</sup> ordine, i cui elementi uniti sono gli elementi di  $\alpha$ . Se in fatti si assume  $\alpha u \equiv u_1 u_2$ ,  $\beta u \equiv b_0 u_1^3 + \dots + b_3 u_2^3$ , la forma (14) diventa

$$(14') \quad 8(b_0 u_1^3 + b_3 u_2^3).$$

Dunque: il cono di 6<sup>a</sup> classe tocca il piano  $\omega$  lungo le due tangenti principali  $\alpha$  di  $S$ , e lungo altre tre rette formanti una terna che ha  $\alpha$  per Hessiano. La curva del 6<sup>o</sup> ordine del piano  $\omega$  ha in  $O$  per tangenti le due tangenti principali  $\alpha$ , e tre rette formanti una terna di cui  $\alpha$  è l'Hessiano. Queste due terne di rette del fascio  $O\omega$  sono corrispondenti fra loro nell'involuzione delle tangenti coniugate, cioè nell'involuzione che ha  $\alpha$  per coppia di elementi doppi. Ogni terna è dunque il covariante cubico  $Q$  dell'altra.

6. La prima di queste notevoli terne di tangenti fu già incontrata dal sig. DARBOUX<sup>(3)</sup> sotto un altro punto di vista.

Consideriamo le quadriche aventi in  $O$  colla nostra superficie  $S$ , di equazione

$$z = \alpha x + \beta x + \dots,$$

---

<sup>(3)</sup> *Sur le contact des courbes et des surfaces.* Bull. des Sc. math., (2) 4, 1880; cfr. le pp. 356-358.

un contatto di 2° ordine: vale a dire le quadriche seganti  $S$  secondo curve aventi in  $O$  un punto triplo. Hanno per equazione

$$z - \alpha x + z(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 z) = 0.$$

La curva d'intersezione di una di esse con  $S$  ha in  $O$  per tangenti le rette

$$\beta x + (c_1 x_1 + c_2 x_2) \alpha x = 0,$$

le quali costituiscono una terna variabile in un'involuzione  $\infty^2$  di 3° grado, entro al fascio  $O\omega$ . I raggi *tripli* di quest'involuzione son quelli incontrati da DARBOUX (sotto il nome di *tangentes d'osculation quadrique*). Orbene un breve calcolo prova che essi sono appunto quei tre raggi del detto fascio (costituenti necessariamente una terna di quella medesima involuzione) che si rappresentano annullando la nostra forma (14), o la (14'). Coincidono dunque colla terna da noi considerata di generatrici del nostro cono di 6ª classe.

7. Se il punto  $O$  è parabolico per  $S$ , cioè se  $\alpha$  è un quadrato  $l^2$ , l'equazione (13) diventa divisibile per  $l$ , e la forma (14) per  $l^2$ . La tangente principale unica si stacca dunque come luogo di punti dalla curva di 6° ordine, e come involuppo di piani dal cono di 6ª classe (4).

Se invece i due fattori lineari di  $\alpha$  sono distinti, ma uno di essi divide anche  $\beta$ , di nuovo esso dividerà tutto il 1° membro di (13). Dunque anche una tangente principale a contatto più che tripunto si stacca come luogo dalla curva di 6° ordine, e come involuppo di piani dal cono di 6ª classe.

Ma se ciò avviene per entrambe le tangenti principali, ossia se  $\alpha$  divide  $\beta$ , si trova che la forma (14) è nulla identicamente. Si può accertarsene subito, assumendo  $\alpha u \equiv u_1 u_2$ , e quindi la (14) ridotta a (14'), ove nella ipotesi attuale  $b_0$  e  $b_3$  son nulle. Per conseguenza nella (13) rimangono solo i termini del 6° ordine, i quali son divisibili per  $\alpha$ . Concludiamo che: quando entrambe le tangenti principali hanno con  $S$  in  $O$  incontro più che tripunto, la curva

(4) Il cono di 5ª classe, che così rimane, è l'involuppo dei piani osculatori in  $O$  ai due rami con cui passa per questo punto la curva di contatto di  $S$  col cono circoscritto da un punto variabile  $P$  della tangente principale  $l$ .

La coppia delle tangenti in  $O$  a quella curva di contatto varia, movendosi  $P$  su  $l$ , in un'involuzione, di cui un raggio doppio è  $l$ ; mentre l'altro è la tangente in  $O$  alla linea parabolica di  $S$ , e coincide colla retta residua della nostra terna (14).

del 6° ordine si scompone in quelle due tangenti e in un'ulteriore quaterna di rette del fascio  $O\omega$ ; e dualmente, il cono di 6ª classe dà la quaterna delle tangenti coniugate di queste.

8. Un ulteriore passo, nel procedimento di calcolo dei nn. 2, 3 e 5, condurrà facilmente a determinare un certo numero finito di coppie di punto  $P$  e piano  $\pi$  tali, che i piani tangenti ad  $S$  in  $O$  e nei quattro punti successivi comuni a  $S$  e  $\pi$  concorrano in  $P$ .

Un'altra ricerca da fare sarebbe quella delle modificazioni, che esige tutta la precedente teoria, nel caso che il piano  $\omega$  tangente in  $O$  ad  $S$  sia singolare, o multiplo: cioè che nello sviluppo di  $z$  in serie di potenze di  $x_1, x_2$  manchino i termini di 2° grado  $\alpha$ , e poi anche quelli di 3° grado  $\beta$ , ecc.

Del resto in tal caso va già modificato il teorema delle tangenti coniugate. Se lo sviluppo di  $z$  in serie di  $x_1, x_2$  comincia coi termini  $\varphi$  di ordine  $m$ , se cioè la curva sezione di  $S$  con  $\omega$  ha in  $O$  un punto  $m$ -plo (di cui  $\varphi$  darà il gruppo delle tangenti), la linea (2) di contatto di  $S$  col cono circoscritto da un punto generico  $P$  di  $\omega$  avrà in  $O$  la molteplicità  $m - 1$ , e per tangenti il 1° gruppo polare  $t_1 t_2 \dots t_{m-1}$  della retta  $OP$  ( $= t$ ) rispetto al gruppo  $\varphi$  delle  $m$  tangenti principali di  $S$  in  $O$ . Possiamo dire allora che la retta  $t$  è intersezione di  $\omega$  col piano infinitamente vicino che è tangente ad  $S$  nel punto successivo ad  $O$  su una qualunque delle rette  $t_1 \dots t_{m-1}$ . Ciò si spiega col fatto che, considerando  $S$  come involuppo di piani,  $\omega$  è piano  $(m - 1)$ -plo per  $S$ : sicchè, per una retta infinitamente prossima a una retta  $t$  del fascio  $O\omega$ , passano  $m$  piani tangenti di  $S$  infinitamente vicini ad  $\omega$ . La corrispondenza fra le tangenti coniugate, che nel caso ordinario è biunivoca, qui diventa degli indici  $(1, m - 1)$ ; e la denominazione di « *coniugate* » cessa di essere appropriata, perchè la relazione fra due tangenti come  $t$  e  $t_1$  non è più reciproca, in generale.