Corrado Segre

Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **43** (1907-08), p. 985–997

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 50–61

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_50>

XXV.
SULLA GENERAZIONE DELLE SUPERFICIE CHE AMMETTONO UN DOPPIO SISTEMA CONIUGATO DI CONI CIRCOSCRITTI

«Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino»,
vol. XLIII, 1907-08, pp. 553-565.

1. Le superficie dello spazio ordinario, i cui punti han le coordinate omogenee (projettive) rappresentabili parametricamente così:

$$x_i = f_i(u) + g_i(v) \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{1}$$

costituiscono una ben nota estensione delle *superficie di traslazione*. Una loro proprietà *caratteristica* è quella di contenere due sistemi coniugati (costituiti dalle linee parametriche $u =$ cost., $v =$ cost.) tali che le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo quelle linee sono coni.

Ciò è stato rilevato, a quanto pare, per la prima volta, da K. PETERSON [1]; e fu poi dimostrato più completamente dal sig. DARBOUX [2] sotto la forma duale (cioè: le superficie che posseggono un doppio sistema coniugato di linee piane hanno le coordinate omogenee dei loro piani tangenti rappresentabili colle (1), e viceversa).

Il sig. VOSS [3] aggiunse alcune ulteriori proprietà di queste *superficie* $\boldsymbol{P}$, com'egli le chiama [4]. Noi qui le ritroveremo, insieme

---

[1] In una Memoria in lingua russa, del 1866-1867 (pubblicata nel 2° vol. della Società matematica di Mosca), che fu poi tradotta in francese col titolo: *Sur les courbes tracées sur les surfaces*, negli Ann. Fac. des Sc. de Toulouse, (2) 7, 1905.

Il PETERSON chiama *linee coniche* di una superficie le linee di contatto di questa coi coni circoscritti. Userò anch'io qualche volta, per brevità, questa denominazione; adoperando però caratteri corsivi, per evitare ogni pericolo di confusione colle coniche ordinarie, cioè curve piane di 2° ordine.

[2] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, I, 1887, pp. 123-126.

[3] *Zur Theorie der Krümmung der Flächen*, Math. Ann., XXXIX, 1891, pp. 205-207.

[4] La denominazione è accolta anche dal Sig. MLODZIEJOWSKI: *Ueber aufeinander abwickelbare P-Flächen*, Math. Ann., LXIII, 1907.

con altre che ci daranno delle semplici costruzioni per le superficie stesse, sia nel caso generale, sia in certi casi particolari notevoli (5).

2. Conviene premettere qualche considerazione su certi interessanti *sistemi* ∞^4 *di curve nello spazio.*

Prendiamo le equazioni

$$x_i = f_i(u) + \lambda_i, \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{2}$$

in cui le $f_i(u)$ indicano (e indicheranno anche in seguito) date funzioni, monodrome continue e finite, colle loro prime derivate, in un dato campo di variabilità per u; colla condizione che ad un gruppo di valori dei rapporti delle $f_i(u)$ non corrisponda in generale più di un valore di u in quel campo.

Per un dato gruppo di valori delle 4 quantità λ_i, le (2) rappresentano una determinata curva descritta dal punto x al variare di u. Mutando poi quei valori λ_i, questa curva varierà in un certo sistema Σ di curve, riferite fra loro biunivocamente, se chiamiamo *omologhi* quei punti di esse che corrispondono allo stesso valor di u.

Le tangenti alle curve di Σ in punti omologhi u concorrono tutte in un punto della linea fissa

$$x'_i = f'_i(u). \tag{3}$$

La corrispondenza tra i punti di due curve qualunque di Σ ha carattere geometrico molto elementare. Siano le curve

$$x_i = f_i(u) + \alpha_i$$

$$y_i = f_i(u) + \beta_i .$$

Si ha, per punti omologhi x, y:

$$x_i - y_i = \alpha_i - \beta_i ;$$

sicchè le coppie di punti omologhi sono allineate con un punto fisso. Le due curve sono su uno stesso cono. Diremo per brevità che sono *prospettive* (in senso lato).

Viceversa ogni cono che projetta una curva di Σ ne contiene infinite. Se la curva data è la (2) e il punto ha le coordinate

(5) Veggasi pure la costruzione data dal DARBOUX (loc. cit., p. 126) delle superficie duali: cioè come inviluppi dei piani radicali di due sfere tolte ad arbitrio entro due dati sistemi semplicemente infiniti.

p_i, quelle infinite curve di Σ saranno rappresentate da

$$f_i(u) + \lambda_i + \varrho p_i,$$

ove ϱ si faccia variare (6).

È facile vedere che *il sistema Σ è ∞^4*, cioè che le 4 quantità λ_i rappresentano per esso dei parametri *essenziali, se si toglie il caso che tutte le linee di Σ siano rette* (7). E noi nel seguito escluderemo appunto questo caso, che non presenta interesse pel nostro scopo.

3. Per determinare un sistema Σ siffatto di curve si possono dare ad arbitrio, come appartenenti ad esso, *due* curve *prospettive*: per esempio una linea $\varphi_i(u)$, e sul cono che la projetta dal punto (p_i) un'altra curva arbitraria $\varphi_i(u) + \psi(u) \cdot p_i$. Dopo ciò, ponendo $f_i = \varphi_i : \psi$, le formole (2) rappresenteranno un sistema Σ contenente le due linee date.

---

(6) Le equazioni

$$x_i = \varphi_i(u) + \lambda_i \psi(u),$$

ove $\varphi_i(u)$ e $\psi(u)$ sono polinomi di grado n, rappresentano un particolare sistema Σ, le cui curve sono algebriche, d'ordine n (in generale), e passan tutte per certi n punti corrispondenti a quei valori di u che annullano $\psi(u)$.

(7) Possiamo dimostrare ciò, ad esempio, ricorrendo per un istante allo spazio a 4 dimensioni, in cui $x_1, \dots, x_4$ s'interpretino come coordinate cartesiane *non omogenee* di punto, e si consideri come projezione di questo punto dall'origine O, sullo spazio ordinario, il punto che ha in questo come coordinate projettive *omogenee* le x_i. Allora le (2), al variar delle λ, rappresentano in S_4 un sistema di curve deducibili da una qualunque di esse coll'applicarle tutte le ∞^4 traslazioni di questo spazio. Esse saranno ∞^4, se non avviene che quella curva ammetta una infinità continua di traslazioni in sè, ossia se non è una retta. Ne deriva che anche le curve projezioni di quelle ∞^4 sullo S_3 saranno ∞^4, se non sono rette. Perchè allora ognuna di esse è projettata da O mediante un cono, che non è un piano, nè un cilindro; e un tal cono non può contenere un'infinità continua di curve del sistema ∞^4 di S_4, cioè non può essere una superficie di traslazione.

Per determinare quale forma devon avere le funzioni $f_i(u)$ perchè tutte le linee (2) di Σ siano rette, cominciamo a osservare che la curva particolare $x_i = f_i(u)$ sarà una retta (quella dei due punti α, β) solo quando sia $f_i(u) = \alpha_i \varphi(u) + \beta_i \psi(u)$. Dopo ciò, una curva qualunque (2) starà nel piano dei punti $\alpha\,\beta\,\lambda$, ed i suoi punti avranno *entro* quel piano le coordinate: $\varphi(u)$, $\psi(u)$ e 1. Affinchè si riduca ad una retta si dovrà avere fra queste un'equazione lineare. Risulta così:

$$f_i(u) = \gamma_i \varphi(u) + \varepsilon_i.$$

Il sistema Σ che in tal modo si ottiene è in fatti una *stella di rette*.

La costruzione geometrica di Σ si potrà fare così. Siano C e D le due curve date *prospettive* (n. 2) rispetto al punto p. Ogni altra curva X di Σ dovrà essere con C in un certo cono (a), e con D in un certo cono (b). I vertici $p\ a\ b$, dovendo stare su tutti i piani delle terne di punti omologhi delle tre curve, saranno allineati. Dunque: si prendano ad arbitrio due punti a, b allineati con p; e per ogni coppia di punti omologhi c, d di C, D si determini il punto x d'intersezione delle rette ac, bd. Il luogo di x sarà una curva del sistema Σ. E tutte le curve di questo si otterranno mutando in tutti i modi possibili la coppia di punti $a\ b$ (8).

Se due curve di Σ sono piane, ma in piani diversi, tutte le curve di Σ staranno nei piani di un fascio. Ciò risulta subito analiticamente; od anche dalla precedente costruzione geometrica, perchè se C, D sono su due piani distinti, questi risultan prospettivi rispetto al centro p, e quindi prospettive (cioè visuali di uno stesso piano) risultano le stelle che li projettano rispettivamente da a, b; ecc.

4. Se dentro al sistema Σ si prende una ∞^1 di curve, vale a dire se le costanti λ_i delle (2) si assumono uguali a funzioni date

(8) Ne segue facilmente la costruzione di quelle curve di Σ che soddisfano a certe condizioni: per esempio *che passano per due punti dati ad arbitrio.* Si consideri la curva in cui si segano ulteriormente i coni che da questi due punti projettano C, e poi la curva dedotta analogamente da D. I punti a, b dovranno stare sulle due nuove curve, ed essere allineati con p.

Si avverta però che la costruzione evidentemente sarà impossibile in generale, se le curve di Σ sono nei piani di un fascio, com'è detto alla fine di questo n. 3: in fatti allora i due punti dati dovrebbero stare in un piano di quel fascio.

In generale diciamo m_i, n_i le coordinate dei due punti dati; e poniamo che per essi passi la curva (2) di Σ. Avremo:

$$\varrho m_i = f_i(u) + \lambda_i, \quad \sigma n_i = f_i(v) + \lambda_i,$$

donde:

$$\varrho m_i - \sigma n_i = f_i(u) - f_i(v).$$

Se, al variare di u e v, il luogo F dei punti $f_i(u) - f_i(v)$ è una superficie, esisterà in generale una linea di Σ passante pei punti dati m, n: giacchè quella superficie sarà incontrata dalla retta di questi in qualche punto, le cui coordinate ci permetteranno di scrivere l'ultima uguaglianza; e questa rende possibili le precedenti per uno stesso sistema di valori delle λ_i. Invece non esisterà in generale una linea di Σ passante per m, n, se il detto luogo F si riduce ad una linea: il che accade, come vedremo (n. 9), solo quando le curve di Σ sono piane.

$g_i(v)$ di un parametro (9), il luogo di quelle curve sarà la *superficie* P del n. 1

$$x_i = f_i(u) + g_i(v). \tag{1}$$

Otteniamo così un modo molto semplice per generare una tal superficie. Basterà nella costruzione di Σ esposta poc'anzi, far prendere ∞^1 posizioni alla coppia di punti $a\,b$ allineati con p. Con ciò quei due punti descriveranno due curve A, B di un cono col vertice p. E si ha la costruzione seguente:

Si fissino su un cono due curve A, B (10), *e su un altro cono collo stesso vertice due curve* C, D. *Per ogni coppia di punti omologhi* a, b *di* A, B, *e per ogni coppia di punti omologhi* c, d *delle* C, D *si prenda il punto* x *d'intersezione delle rette* ac, bd. *Il luogo di questo punto sarà una superficie* P.

Le linee (di Σ) descritte da x quando la coppia a, b sta fissa, e varia solo la coppia c, d, costituiscono sulla superficie il sistema $v = \text{cost.}$, cioè uno dei due sistemi coniugati a cui si riferisce la proprietà *caratteristica* del n. 1. Similmente l'altro sistema ($u = \text{cost.}$) si costruisce tenendo fissa la coppia c, d.

Il *piano tangente* alla superficie P nel punto x, dovendo contenere le tangenti in x alle linee dei due detti sistemi, risulta in generale determinato dal passaggio pel punto d'incontro delle tangenti in c, d a C, D, e pel punto comune alle tangenti in a, b ad A, B (11).

5. Come si vede, quei due sistemi ∞^1 di curve, che possiamo chiamare *caratteristici* per la superficie P, fan parte risp. del sistema Σ di curve

$$f_i(u) + \lambda_i, \tag{4}$$

e di un analogo sistema Σ_1 rappresentato da

$$g_i(v) + \mu_i. \tag{5}$$

---

(9) Per queste funzioni si supporranno verificate condizioni analoghe a quelle poste per le $f_i(u)$ al n. 2.

(10) Qui e in seguito, parlando di *curve di un cono*, s'intende sempre di escludere le generatrici rettilinee del cono: anzi, si pensa sempre a tratti di curva che non siano incontrati in più d'un punto variabile dalle generatrici generiche.

(11) Ciò concorda col fatto che quei due punti hanno risp. per coordinate $f_i'(u)$ (cfr. il n. 2) e $g_i'(v)$.

Diremo *direttrici* della superficie (1) le linee di questi due sistemi Σ, Σ_1. E chiameremo *associate* due particolari direttrici, (4) e (5), quando per esse si ha

$$\lambda_i + \mu_i = 0 . \qquad (i = 1, \dots, 4) \tag{6}$$

Rileviamo allora due proprietà di questa corrispondenza: 1^0 A due direttrici ($\lambda_i = \alpha_i$, β_i) di Σ sono sempre associate due direttrici di Σ_1 tali che il cono su cui stanno queste (n. 2) ed il cono di quelle hanno lo stesso vertice ($\alpha_i - \beta_i$). — 2^0 La retta che unisce i punti u, v di due direttrici associate passa pel punto (u, v) della superficie (1).

Allora si ritrova la costruzione delle superficie $\boldsymbol{P}$ data precedentemente. Si prendono in Σ due curve qualunque C, D, in Σ_1 le loro associate A, B; ogni retta appoggiata ad A, C in due punti, e la retta che unisce i punti di B, D *omologhi* a questi s'incontreranno in un punto della superficie $\boldsymbol{P}$.

6. Dai n$^{\text{i}}$ 3 e 4 segue che: *Esiste in generale una superficie* $\boldsymbol{P}$*, la quale passa per cinque linee, di cui tre* L, M, N *sono assegnate ad arbitrio, mentre le altre due* C, D (*non rette*) *giacciono in uno stesso cono, e si appoggiano alle prime tre. Anzi, si può imporre alla superficie di avere* C *e* D *per linee caratteristiche di uno stesso sistema.*

In fatti, dando questo significato alle curve C, D, riesce determinato da esse (n. 3) il sistema ∞^4 Σ, entro cui stanno quelle ∞^1 caratteristiche. E appunto per fissare questa ∞^1 di curve, che genera la superficie $\boldsymbol{P}$, si prenderanno quelle curve di Σ che incontrano L, M, N.

Facendo coincidere due di queste ultime linee, o tutte tre, si ottengono per la superficie $\boldsymbol{P}$ condizioni di contatto od osculazione lungo una data linea, quali si presentano nell'integrazione delle equazioni alle derivate parziali.

7. Ad una *superficie* $\boldsymbol{P}$, rappresentata dalle (1), sono legate in generale due *superficie* $\boldsymbol{P}$ *speciali* ([12]), cioè i luoghi dei vertici dei coni congiungenti a due a due le curve caratteristiche di uno stesso sistema.

([12]) Di esse ha già fatto parola il Voss, loc. cit.

Così le due curve della data superficie, corrispondenti a valori fissati u, u_1 del 1^0 parametro, stanno nel cono di vertice

$$f_i(u) - f_i(u_1) . \tag{7}$$

Questo punto, al variar di quelle due curve, cioè di u e u_1, genera un luogo F, che sarà *in generale* una superficie della nostra classe $\boldsymbol{P}$ (13).

Analogamente dalle curve $v = \text{cost.}$ nasce l'altro luogo G dei punti

$$g_i(v) - g_i(v_1) , \tag{8}$$

che sarà pure in generale una *superficie* $\boldsymbol{P}$.

Prendendo u_1 vicinissima ad u si vede che F conterrà la curva $f_i'(u)$ luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie data lungo le linee u. Similmente per G.

8. Quando una *superficie* F appartiene al tipo speciale (7) od (8) di *superficie* $\boldsymbol{P}$, ossia si può rappresentare così

$$y_i = f_i(u) - f_i(v) , \tag{9}$$

avvengono per essa alcuni fatti speciali, che meritano di venir rilevati (14).

I due sistemi di *direttrici* (4) e (5) vengono a coincidere. Anzi, le (6) provano che due direttrici *associate* son sempre coincidenti.

Due curve qualunque di Σ essendo (n. 2) riferite fra loro biunivocamente, si capisce senz'altro che cosa intenderemo per *corde omologhe* di quelle curve. Orbene la superficie F sarà *il luogo dei punti d'incontro delle corde omologhe di tutte le* ∞^4 *curve di* Σ.

---

(13) Citiamo subito un caso in cui F *non è una superficie*: quando le $f_i(u)$ son polinomi di 1^0 o 2^0 grado

$$f_i(u) = a_i u^2 + b_i u + c_i .$$

Allora le espressioni (7), tolto il divisor comune $u - u_1$, diventano

$$a_i (u + u_1) + b_i ;$$

sicchè son le coordinate di un punto mobile su *una retta*. V. una proposizione generale al n. 9.

(14) Per le *superficie di traslazione* non vi è il caso analogo; o meglio, si ottiene solo il piano all'infinito.

Invece le particolari *superficie* $\boldsymbol{P}$ rappresentabili con $f_i(u) + f_i(v)$ dànno, nel caso delle superficie di traslazione, le così dette *superficie doppie*. Ma su quelle non credo necessario trattenermi.

Sicchè la generazione del n. 4 per le *superficie* P, nel caso delle F si riduce così:

Si scelgano ad arbitrio due curve C, D di un cono. Le generatrici di questo segnano una corrispondenza fra i punti di quelle curve; donde segue una corrispondenza tra le corde di C, D. La superficie F è il luogo dei punti d'incontro di tali corde omologhe.

Sulla F il punto (u, v) coincide con (v, u). Le linee caratteristiche formano un solo sistema, tale che per ogni punto di F ne passan due (in direzioni coniugate). La linea $f_i'(u)$ inviluppata da questo sistema [15] sarà un'asintotica.

Due linee caratteristiche qualunque

$$f_i(u) - f_i(\alpha), \quad f_i(u) - f_i(\beta)$$

sono *prospettive* (in senso lato) rispetto al punto $f_i(\alpha) - f_i(\beta)$, che è il loro punto comune.

Fissata una linea caratteristica C di F, il cono che la projetta da un suo punto p sega F secondo l'altra linea caratteristica passante per p. E variando p su C, si ottiene così tutto il sistema delle caratteristiche.

In particolare il cono circoscritto ad F lungo una caratteristica ha sempre il vertice su questa, cioè nel punto di contatto coll'asintotica suddetta [16].

---

[15] E luogo dei punti d'incontro delle *tangenti omologhe* alle curve di Σ: cfr. n. 2.

[16] Come esempio di superficie F, consideriamo quella che si ottiene prendendo per le $f_i(u)$ dei *polinomi di 4^0 grado* (il 3^0 grado darebbe una superficie *piana*; per un grado minore veggasi la nota [13] al n. 7). Dividendo allora le (9) per $u - v$, si riconosce che quelle formole rappresentano una *rigata cubica* generale.

Effettivamente, se s'indica con F una rigata cubica generale, i coni circoscritti ad F dai punti della superficie la toccano secondo cubiche sghembe (passanti pei due punti uniplanari) costituenti un sistema ∞^2. Fissata una di queste cubiche C, i coni che la projettano dai suoi vari punti segano ulteriormente F secondo cubiche di quel sistema: e se ne ottengono così ∞^1 formanti un doppio sistema coniugato, che si può riguardare come il nostro sistema delle caratteristiche.

Se F si rappresenta sul piano, sì che le sue sezioni piane corrispondano al sistema lineare delle iperboli equilatere passanti per un punto fisso O, le ∞^2 cubiche sghembe suddette hanno per imagini i cerchi passanti per O; il sistema delle caratteristiche corrisponde ad un sistema arbitrario di cerchi *uguali* passanti per O; l'inviluppo di questi è un cerchio di centro O, imagine di un'asintotica di F. Ecc.

9. Se il luogo F rappresentato dalle (9) si riduce a una *linea*, questa dovrà pur essere incontrata da tutte le corde di una qualunque curva di Σ. Ne segue subito che questa curva sarà *piana* [17] e che F starà nel suo piano. Quindi F, giacendo nei piani di tutte le curve di Σ, sarà la *retta* asse di questo fascio di piani (cfr. la fine del n. 3).

Viceversa se le curve di Σ sono piane, il luogo F (componendosi di punti comuni alle corde di quelle due curve) si ridurrà ad una retta.

Possiamo facilmente determinare la forma che devono avere le funzioni $f_i(u)$ perchè si presenti questo caso. Se α_i, β_i son le coordinate (ben fissate) di due punti della retta F, il punto $f'_i(u)$ dovendo stare su questa (n. 7), si avrà:

$$f'_i(u) = \alpha_i \cdot \lambda(u) + \beta_i \cdot \mu(u),$$

donde integrando:

$$f_i(u) = \alpha_i \cdot \varphi(u) + \beta_i \cdot \psi(u) + \varepsilon_i. \tag{10}$$

Viceversa, se le $f_i(u)$ si possono esprimere in questo modo, le $\alpha_i\ \beta_i\ \varepsilon_i$ essendo costanti, il luogo F rappresentato dalle (9) sarà una retta [18].

10. Ritornando ora alle *superficie* P, cioè alle superficie con due sistemi coniugati di *curve coniche*, stabiliamo *quali sono quelle per cui le curve di uno di quei sistemi, o di entrambi, sono in pari tempo curve piane.*

Se due curve dell'un sistema sono piane, ma in piani diversi, tutte saranno piane (n. 3), e i loro piani formeranno un fascio, il cui asse F sarà il luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 2^0 sistema [19]. Anzi, due qualunque linee di

---

[17] Perchè una congruenza di rette tale che ogni sua retta abbia tre fochi, e quindi infiniti, si compone sempre delle rette di un piano. Oppure, senza invocare la teoria delle congruenze di rette, si può applicare a questo caso un noto ragionamento (del sig. CASTELNUOVO), che fa subito vedere come le tangenti alla curva di Σ in due punti qualunque saranno sempre in un piano (tangente a un cono di corde di quella curva); onde ecc.

[18] Il lettore vedrà subito perchè ci è bastato scrivere che la linea (3) del n. 2, cioè il luogo del punto $f'_i(u)$, è una retta, per ottenere che si verifichino le altre proprietà relative al caso attuale.

[19] Si ricordi, a questo proposito, la proposizione nota, e quasi evidente, che al sistema delle sezioni di una superficie coi piani passanti per una data retta è coniugato il sistema delle curve di contatto della superficie coi coni circoscritti

questo 2^0 sistema staranno sempre in uno stesso cono avente il vertice su F.

Per generare una superficie P così fatta basterà che nella costruzione del n. 4 si assumano per C, D due curve piane. Per rappresentarla analiticamente colle formole (1), basterà assumere le $f_i(u)$ della forma (10).

Se invece vogliamo che entrambi i sistemi coniugati siano di *linee coniche e piane* nello stesso tempo, basterà nella costruzione del n. 4 prendere per A, B, C, D quattro curve piane. Allora i piani di quei due sistemi di linee caratteristiche passeranno risp. per due rette F, G. E in pari tempo, sarà G (o F) il luogo dei vertici dei coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 1^0 (o risp. 2^0) sistema.

Dalle formole (10) ed analoghe per $g_i(v)$ si trae che una tal superficie, riferita a quelle linee caratteristiche, può rappresentarsi così:

$$x_i = \alpha_i \cdot \varphi(u) + \beta_i \cdot \psi(u) + \gamma_i \cdot \Phi(v) + \delta_i \cdot \Psi(v) + \varepsilon_i, \tag{11}$$

ove le $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$ sono costanti. Risolvendo queste equazioni rispetto alle 4 funzioni che figurano nei secondi membri (quando la risoluzione sia possibile), e poi facendo una conveniente trasformazione delle coordinate projettive (vale a dire, prendendo $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ come punti fondamentali delle nuove coordinate), si potranno *in generale* (non sempre) rappresentare le superficie particolari di cui ora si tratta, così:

$$x_1 = \Theta_1(u), \quad x_2 = \Theta_2(u), \quad x_3 = \Theta_3(v), \quad x_4 = \Theta_4(v), \tag{12}$$

od anche, eliminando u e v, colle due equazioni

$$\eta(x_1, x_2) = 0, \quad \zeta(x_3, x_4) = 0 \tag{13}$$ [20].

---

dai punti di quella retta (Cfr. KOENIGS, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, Thèse, Paris 1882, p. 63).

Viceversa, se su una superficie si hanno due sistemi mutuamente coniugati, l'uno di linee piane, l'altro di *linee coniche*, i piani di quelle formeranno un fascio; perchè ognuno di essi conterrà (delle generatrici e quindi) i vertici di tutti i coni circoscritti alla superficie lungo le linee del 2^0 sistema.

[20] Si rifletta che, quando non s'impone la condizione dell'omogeneità alle equazioni che si dànno per le coordinate di punto $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, occorrono *due* equazioni per rappresentare una superficie.

Sostituendo a quelle quattro coordinate di punto le tre non omogenee $x\, y\, z$, si avrà, invece delle due equazioni (13), una sola equazione della forma $F[x.\omega(z),\ y.\omega(z)] = 0$. Le linee caratteristiche sono allora nei piani $z = \text{cost.}$, e in quelli che passano per l'asse delle z.

Viceversa si riconosce subito che un sistema di equazioni di questi tipi rappresenta in generale una superficie con due sistemi coniugati di *curve piane e coniche.*

Rientrano evidentemente in questa categoria tutte *le superficie di rotazione*; e così pure *la ciclide di* DUPIN, *la superficie romana di* STEINER, ecc. ([21]).

11. Una costruzione delle *superficie* $\boldsymbol{P}$ alquanto diversa da quella del n. 4 ci sarà data da una certa specie di *trasformazioni dello spazio.*

Sopra le due curve qualunque

$$x_i = f_i(u), \quad y_i = g_i(v) \tag{14}$$

distendiamo risp. due variabili U, V, uniformi sulle curve stesse (per esempio i parametri u, v, o delle funzioni uniformi di essi). Poi, consideriamo quella corrispondenza T tra punti dello spazio (generalizzazione dell'*omografia rigata*, o *biassiale*), per la quale sono corrispondenti due punti z, z' quando la loro retta incontra le curve f, g (14) in punti x, y con tali valori di U, V, che il birapporto $(x\, y\, z\, z')$ sia uguale a $U : V$; ossia quando si possa porre

$$z_i = \lambda f_i(u) + \mu\, g_i(v) \tag{15}$$

$$z'_i = \lambda\, U f_i(u) + \mu\, V g_i(v). \tag{16}$$

Si osservi che, se nelle (15) si assumono per λ e μ delle date funzioni rispettivamente di u e v, il punto z, al variar di questi parametri, descrive una *superficie* $\boldsymbol{P}$ avente le curve f, g per *direttrici* associate nel senso del n. 5. E anzi, in questo modo si rappresentano *tutte* queste superficie $\boldsymbol{P}$. Passando allora alle (16) concludiamo subito:

Se si considera l'insieme di tutte le *superficie* $\boldsymbol{P}$ aventi le curve fissate f, g per direttrici associate, ogni trasformazione T

([21]) Per le superficie di rotazione e per la ciclide il doppio sistema caratteristico è dato dalle linee di curvatura. — La superficie di STEINER si ottiene prendendo per le $f_i(u)$ e $g_i(v)$ dei polinomi di 2° grado in u, v (sicchè i luoghi F e G si riducono a rette, per la 2ª nota al n. 7). Dalla rappresentazione della superficie sul piano $(u\, v)$ si trae che i due sistemi caratteristici sono i due sistemi di coniche situate nei piani che passano risp.e per due spigoli opposti del tetraedro costituito coi 4 piani tangenti lungo coniche alla superficie di STEINER (quei due spigoli son le rette singolari dei due punti uniplanari di una retta doppia della superficie). A due a due le coniche di uno stesso sistema sono in un cono quadrico avente il vertice sull'asse dell'altro. Cfr., ad esempio, le pp. 433-434 della mia Memoria nel t. XXIV (1884) dei Math. Ann.

basata su queste direttrici muta quell'insieme in sè stesso. Il gruppo di quelle T è transitivo: vale a dire due qualunque delle dette superficie si corrispondono sempre rispetto ad una T. Basta scegliere convenientemente le U e V.

Ne deriva la costruzione che volevamo per le superficie $\boldsymbol{P}$. *Basterà applicare una trasformazione* T *ad un piano.* In fatti un piano si può sempre riguardare come *superficie* $\boldsymbol{P}$ relativa alle direttrici associate f, g: per esempio il piano $z_1 = 0$ è rappresentato dalle (15), ove si prenda

$$\lambda = \frac{1}{f_1(u)}, \quad \mu = -\frac{1}{g_1(v)}.$$

La trasformazione T ha l'aspetto analitico, in causa delle variabili U, V che occorre distendere sulle curve f, g. Ma si posson definire geometricamente quelle quantità in più modi. Per esempio, si fissino due linee ulteriori f_1, g_1, ed inoltre una corrispondenza biunivoca tra f e f_1; ed una tra g e g_1. Quindi, nella costruzione della T, si assuma sempre il birapporto $(x\, y\, z\, z')$ (che prima ponevamo $= U : V$) uguale al birapporto che due piani fissi determinano con quei due punti di f_1, g_1, che corrispondono ai punti x, y di f, g.