Corrado Segre

Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi inviluppi

in: Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio, Bocca, Torino, 1918, p. 1–21

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume II, Edizione Cremonese, Roma, 1958, p. 130–148

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_2_130>

XXX.

SU ALCUNE CLASSI PARTICOLARI DI SISTEMI CONTINUI DI QUADRICHE, E SUI RISPETTIVI INVILUPPI

« Scritti matematici offerti ad ENRICO D'OVIDIO »,
Torino, 1918, pp. 1-21.

1. Se si considerano le rette ordinarie come i *punti* di una varietà V_4^2 (che indicherò con R) dell'iperspazio S_5, i *regoli* (ossia schiere di generatrici delle quadriche ordinarie) risultano rappresentati dalle intersezioni di quella varietà coi piani di S_5: o, se vogliamo, senz'altro, da questi piani (¹). Per conseguenza i sistemi continui di regoli corrisponderanno ai sistemi continui di piani dello S_5 (²).

Ora, fra tali sistemi di piani si trovano delle classi notevoli: come i sistemi dei piani tangenti ad una curva, o superficie, ecc. Si tratta in questo scritto di vedere quali siano i corrispondenti sistemi continui di regoli, od anche di quadriche ordinarie.

Quadriche e quartiche concatenate.

2. La prima ricerca da fare riguarda i regoli che son rappresentati in S_5 da piani incidenti ed infinitamente vicini.

(¹) Sulla rappresentazione dei regoli di S_3 coi piani di S_5 si può consultare (ma non occorre, per l'intelligenza del presente lavoro) la mia Memoria: *Sulla geometria delle schiere rigate, o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti*, Ann. mat., (3) 27, 1918, p. 151.

(²) Volendo, invece che ai *regoli*, riferirsi alle *quadriche*, poichè ogni quadrica ordinaria contiene due regoli, si avrà in S_5, come imagine di un sistema di quadriche, un sistema *di coppie di piani* (ogni coppia essendo costituita di due piani polari rispetto ad R). Ma, finchè siamo in geometria generale, cioè finchè non si esige che i sistemi siano algebrici, sarà la stessa cosa considerare un sistema *di piani*.

Due regoli corrispondenti a due piani incidenti, ossia a due piani di uno stesso S_4, saranno due regoli contenuti in uno stesso complesso lineare di rette (o, come diremo talora più brevemente, due regoli *legati linearmente*).

Siano dunque $\alpha\,\beta$ due regoli giacenti in due quadriche ordinarie $A\,B$; α' e β' gli ulteriori regoli contenuti in queste (o, come diremo, i regoli *incidenti* ad α e β). Supponiamo che α e β stiano in un complesso lineare di rette L (3). Allora ogni retta g di β' avrà per reciproca rispetto a L (cioè alla reciprocità nulla definita da L) una retta h dello stesso regolo β'; e le due rette c, d di α (e quindi di L) incidenti a g saranno pure incidenti ad h. Avremo così un quadrilatero sghembo, di cui due lati opposti c, d sono in α e gli altri due g, h in β'.

Viceversa, se esiste un tale quadrilatero, il complesso lineare di rette determinato dall'essere g ed h reciproche rispetto ad esso (donde seguirà che il complesso contiene c e d), e dal passare per una retta di α diversa da c, d, conterrà tutto il regolo α; come pure il regolo β, che è composto di rette appoggiate a g, h.

Dunque: condizione necessaria e sufficiente affinchè due regoli sian legati linearmente (cioè stiano in uno stesso complesso lineare di rette) è che esista un quadrilatero di cui due lati opposti stiano nell'uno di quei regoli, e i rimanenti due nel regolo incidente all'altro (4).

La simmetria di questa condizione rispetto alla coppia di regoli nominata — sia $\alpha\beta$ — e alla coppia $\alpha'\beta'$ dei regoli incidenti a quelli, prova che è lo stesso dire che α e β sono legati linearmente, o che son così legati α' e β' (5).

Si noti che l'esistenza di un quadrilatero come $cdgh$, avendo per conseguenza il legame lineare tra α e β, produce l'esistenza di infiniti tali quadrilateri: potendosi prendere ad arbitrio un lato (ad esempio g, o c) entro al regolo in cui deve stare. I vertici di quei quadrilateri, come punti comuni a rette di α e di β', stanno tutti sulla quartica d'intersezione delle quadriche A, B. Si tratta di quadrilateri semplici iscritti in questa quartica.

---

(3) In questo scritto, dicendo « complesso lineare » si potrà sottintendere « di rette ».

(4) A. Voss, *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen 2ten Grades*, Math. Ann., X, 1876, p. 143: vedi a pp. 175-176. — Il Voss accenna, in nota a p. 176, ad una comunicazione di R. Sturm.

(5) Voss, loc. cit.; v. anche la fine del n. 18 della mia Memoria citata in (1).

3. Suppongasi ora che il regolo β s'avvicini indefinitamente ad α, e per conseguenza anche B ad A, β' ad α'. I quadrilateri con due lati opposti in α e gli altri due in β' diventano, al limite, quadrilateri giacenti nella quadrica A, ossia con due lati opposti in α e due in β; ed abbiamo questa proposizione:

Affinchè su una quadrica A *una quartica di 1ª specie, irriducibile, si possa riguardare come l'intersezione di* A *con una quadrica infinitamente vicina, tale che due regoli infinitamente vicini delle due quadriche siano in uno stesso complesso lineare, è necessario e sufficiente che esista un quadrilatero semplice iscritto nella curva, i cui lati stiano in* A. *Dall'esistenza di un siffatto quadrilatero segue l'esistenza d'infiniti, potendosi prendere ad arbitrio un lato tra le generatrici di* A, *od un vertice ad arbitrio sulla quartica.*

Dirò, per brevità, *concatenate* fra loro una quadrica ed una quartica che siano in questa relazione.

Risulta dal n. precedente che in ognuno dei due regoli di A le coppie di lati (opposti) dei detti quadrilateri son le coppie di un'involuzione: nella quale son coniugate le rette che son reciproche rispetto al complesso lineare che congiunge l'altro regolo al regolo infinitamente vicino passante per la stessa quartica.

Osserviamo ancora che, se si prende come lato di uno dei quadrilateri ora nominati una generatrice di A che tenda a diventar tangente alla quartica, i due lati adiacenti a quello tenderanno a coincidere, e quindi anche il lato opposto al primo diverrà tangente alla curva. Si ha dunque quest'altra particolarità per la quadrica e la quartica concatenate: *In ciascun regolo di* A *le 4 generatrici che son tangenti alla curva si dividono in due coppie tali che i punti di contatto delle generatrici di una coppia stanno su una stessa generatrice dell'altro regolo di* A.

Il fatto che due generatrici di un regolo di A tocchino la quartica in punti di una stessa retta dell'altro regolo basta, esso pure, a caratterizzare la relazione di concatenamento della quadrica con la quartica [6].

---

[6] In A. Harnack, *Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt periodische Functionen*, Math. Ann., XII, 1877, p. 47 (v. in particolare pp. 73-74), si ritrovano gli elementi essenziali dei fatti precedenti, mediante la rappresentazione delle quartiche con parametri ellittici. — Cfr. anche G. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, tome 2, 1888, p. 451.

4. Sopra una quadrica Q si abbia un *fascio di quartiche di 1^a specie*: ossia le quartiche segate su Q da un fascio di quadriche (non contenente Q); vale a dire quartiche di 1^a specie giacenti su Q e passanti per 7 punti dati di Q e quindi per un ottavo punto, *associato* a quelli. Domandiamo quante sono, in generale, le curve del fascio concatenate a Q. *Supporremo*, qui e nel seguito, *che il fascio sia a punti base distinti, e che mai quattro di questi sian complanari.*

Diciamo Γ le varie quartiche del fascio. Sia A uno degli 8 punti base, e siano c e g le due generatrici di Q passanti per A. Supporremo che esse non contengano altri punti base. Se una Γ è concatenata a Q, ammetterà un quadrilatero iscritto giacente in Q ed avente un vertice in A, del quale c e g saranno dunque due lati. Il fascio delle Γ sega su c e g (fuori di A) due punteggiate projettive; le ulteriori generatrici h e d di Q uscenti da punti omologhi di quelle descrivono i due diversi regoli, riferiti projettivamente, e quindi s'incontrano nei punti M di una conica μ. Si tratta di vedere quanti sono i punti di μ che stanno sulle Γ da cui provengono: saranno fra essi i vertici opposti ad A dei quadrilateri testè menzionati. Ora i punti M di μ sono in corrispondenza projettiva colle Γ del fascio; e quindi anche colla involuzione delle quaterne di punti che le Γ segano su μ. Vi sono dunque 5 punti M che stanno sulle corrispondenti Γ. Due di essi provengono rispettivamente dalle Γ che toccano in A l'una o l'altra generatrice di Q. Così la Γ tangente in A a g dà origine, come punto M, al punto in cui la Γ stessa sega, fuori di A, la c. La generatrice di Q diversa da c, che passa per quel M, non riesce ivi tangente, in generale, alla Γ: si ottiene un quadrilatero degenere che non rende (n. 3) la Γ concatenata a Q. Esclusa questa soluzione e l'analoga, i quadrilateri provenienti dai rimanenti 3 punti uniti M non son più degeneri, e dànno origine ad altrettante Γ concatenate a Q. *In un fascio di quartiche di 1^a specie giacenti su una data quadrica sono in generale tre le quartiche concatenate a questa* (7).

5. Il teorema precedente si ritrova subito, se si ricorre alla rappresentazione dei regoli coi piani di S_5 (n. 1). I regoli delle

(7) Mediante proiezione di Q su un piano da un punto base del fascio, la proposizione risulta equivalente a quest'altra: che in un fascio di cubiche piane sono tre le cubiche, per ognuna delle quali due punti base assegnati son vertici opposti di quadrilateri completi iscritti, ossia punti aventi lo stesso tangenziale.

quadriche di una rete dànno allora una ∞^2 di piani di S_5 (8). Fissato uno di essi, e quindi la quadrica Q, le quartiche della rete giacenti in Q, ossia le Γ del n. precedente, son le tracce su Q degli altri regoli; e una Γ sarà concatenata a Q, se proviene da un regolo, che sia infinitamente vicino a quello fissato e nello stesso tempo sia legato linearmente con esso. Ciò è come dire che il corrispondente piano di S_5 è infinitamente vicino ed incidente al piano fissato.

Ora (9) nella ∞^2 considerata di piani un dato piano è incidente appunto a 3 piani infinitamente vicini.

I fasci di quartiche, sopra una quadrica, tutte concatenate a questa.

6. Riprendiamo il ragionamento del n. 4, per cercare quando è che *tutte* le quartiche Γ del fascio ivi considerato sono concatenate alla quadrica Q.

Suppongasi ancora, come là si faceva, che le due generatrici c e g di Q non contengano altro punto base del fascio che A. Ogni Γ sega c e g, rispettivamente, in due punti variabili, pei quali passano due ulteriori generatrici h e d di Q, incontrantisi in un punto M, il quale dovrà stare *sempre* sulla Γ, se questa è sempre concatenata a Q. D'altra parte M descrive (n. 4) una conica μ. Sia B un punto base diverso da A, e assumiamo come d la generatrice del sistema di c, che passa per B; ossia consideriamo la Γ che passa pel punto d'incontro di quella generatrice d con g. Poichè questa Γ ha da essere concatenata a Q, essa dovrà, se è irriducibile, passare pel punto in cui c è incontrata dall'altra generatrice di Q passante per B. Ne deriva che B è una posizione del punto variabile M: cioè B sta su μ.

Quanto all'ipotesi ora fatta, che la Γ considerata sia irriducibile, essa si verifica certo, se B è, come A, tale che nessuna delle 2

(8) Si vede facilmente — ma non occorre per il testo — che essi riempiono una V_4 del 9^0 ordine. Sono incidenti a 8 piani fissi, imagini delle stelle di raggi aventi i centri negli 8 punti base della rete di quadriche. Tra gli ∞^2 piani ve ne sono ∞^1 giacenti in R: quelli che corrispondono alle infinite stelle di raggi contenenti i coni quadrici della data rete.

(9) C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. Palermo, 30, 1910_2, p. 87; fine del n^0 13, applicata a $k = 2$. [Questo volume, p. 85].

generatrici passanti per esso contenga un altro punto base. In fatti se quella Γ si spezzasse, sarebbe necessariamente in una retta (generatrice di Q) e una cubica (essendosi escluso (n. 4) che quattro punti base sian complanari): la retta contenendo 2 punti base, e la cubica i rimanenti 6. Per la condizione imposta tanto ad A quanto a B, la retta componente non può essere una generatrice passante per A, o per B. Dovrebbe dunque pel punto gd, ed insieme per A e per B, passare la cubica: la quale così incontrerebbe in due punti ciascuna delle due generatrici g, d, di diverso sistema, di Q: assurdo.

Se di punti base *isolati*, nel senso che non son congiunti ad altri punti base mediante generatrici di Q, ve ne fossero più di 4, preso uno di essi come A, e gli altri come punti B, questi ultimi starebbero, come ora s'è dimostrato, sulla conica μ; e quindi sarebbero complanari. Essendosi da noi esclusi i fasci in cui 4 degli 8 punti base sono complanari, non potranno dunque essere più che 4 i punti base *isolati* nel detto senso. Per 4 punti base almeno accadrà che ciascuno è su una generatrice di Q contenente un altro punto base.

7. Siano C, D due tali punti base, situati su una stessa generatrice m di Q; a, b le ulteriori generatrici passanti rispettivamente per C, D. Se una di esse, per es. b, contiene un altro punto base, E, le quartiche irriducibili del fascio, essendo concatenate a Q, e passando per tre vertici CDE di un quadrilatero giacente in Q, passeranno pure pel quarto vertice F, intersezione di a colla generatrice diversa da b, che passa per E. Così anche a conterrà, oltre a C, un secondo punto base F. Su Q starà un quadrilatero semplice, i cui vertici sono quattro degli 8 punti base.

Escluso questo caso, ogni Γ segherà su a e b, fuori di C e D, rispettivamente due punti variabili con essa: e questi punti, per essere la Γ concatenata a Q, saranno sempre su una generatrice (variabile) di Q, del sistema di m. Prendasi in particolare quella tra tali generatrici — e sia n — che passa per un punto base G diverso da C e D. Poichè la Γ deve contenere, oltre G, i due punti di n situati su a e b, ossia tre punti distinti di n, si spezzerà, contenendo n come parte. Quindi in n starà, oltre G, un altro punto base del fascio. Ripetendo ciò per ciascuno dei punti base come G, diversi da C e D, avremo che essi stanno a coppie su generatrici del sistema della generatrice CD.

Concludiamo: *Se un fascio di quartiche di 1ª specie giacenti su una quadrica* Q, *a punti base distinti, fra cui mai quattro complanari,* *si compone tutto di quartiche « concatenate » (n. 3) a Q, si presenterà uno dei due casi seguenti: 1°) quattro degli 8 punti base son vertici di un quadrilatero semplice, i cui lati giacciono su Q; 2°) gli 8 punti base si distribuiscono a coppie su quattro generatrici di uno stesso sistema di Q.*

8. Preso sulla quadrica Q un quadrilatero di generatrici, e poi ancora tre punti generici, le quartiche di 1ª specie di Q, passanti per i vertici del quadrilatero e per quei tre punti formeranno un fascio (avranno ancora comune un punto ulteriore, *associato* ai sette nominati); e saranno tutte concatenate a Q, in causa di quel quadrilatero iscritto. Così il 1° caso dell'ultimo enunciato ha luogo effettivamente.

Quanto al 2° caso, diciamo AA', BB', CC', DD' quattro coppie di punti di Q situate rispettivamente su quattro generatrici di uno stesso sistema, e supponiamo che siano 8 punti *associati* per le quadriche, ossia gli 8 punti base di un fascio di quartiche di Q. Tra le quartiche ve ne sarà una spezzata nella retta DD' ed in una cubica passante per gli altri sei punti. Su questa cubica le generatrici di Q del sistema nominato segnano un'involuzione, di cui faran parte le tre coppie di punti AA', BB', CC'. Le generatrici dell'altro regolo di Q (in corrispondenza projettiva coi punti della cubica situati in esse), che contengono queste coppie di punti, daranno dunque anch'esse tre coppie di un'involuzione, entro a quel regolo. Estendendo il risultato alla coppia delle generatrici passanti per D e D', concludiamo: *Affinchè quattro coppie di punti distribuite su quattro generatrici di uno stesso regolo di Q siano 8 punti « associati » (rispetto alle quadriche), occorre che le quattro coppie di generatrici dell'altro regolo di Q passanti rispettivamente per esse faccian parte di un'involuzione entro questo regolo.*

Considerando i raggi doppi u, v di quest'involuzione entro al regolo, quella condizione si può anche esprimere così. Le 4 coppie date di punti devon comporsi di punti armonici rispetto a due generatrici determinate u, v del secondo regolo di Q: devon cioè essere coppie di punti omologhi nella involuzione biassiale dello spazio che ha per assi u e v.

Viceversa, sia soddisfatta questa condizione ulteriore dalle quattro coppie di punti AA', ..., DD' di prima. Rispetto ad ogni quadrica S passante per le prime tre di queste coppie, i tre punti in cui le rette che le contengono incontrano u avran per coniugati le tracce su v di quelle stesse rette. Ma le rette u, v, se non sono polari rispetto a S, son riferite projettivamente quando si chiamano omologhi due punti che siano coniugati rispetto a S. Qui la projettività è determinata dalle tre rette nominate, che son del 1^0 regolo di Q: dunque sono omologhi in quella projettività, e quindi coniugati rispetto a S, anche i punti in cui u e v sono incontrate da un'altra retta qualunque di quel 1^0 regolo, e in particolare dalla retta DD'. Ciò vale anche nel caso che u e v sian polari rispetto a S. Ora i punti D, D' eran separati armonicamente da u, v. Dunque se S viene ulteriormente costretta a passare per D, passerà di conseguenza per D': cioè gli 8 punti $AA' \dots DD'$ sono associati. Inoltre vediamo che la quartica intersezione di S con Q è tale che i due suoi punti d'incontro con una retta del 1^0 regolo di Q sono sempre separati armonicamente da u e v. Se per due tali punti M, M' della quartica tiriamo le generatrici m, m' di Q del 2^0 regolo, esse saranno dunque coniugate armoniche rispetto alle generatrici u, v; e se le loro intersezioni ulteriori colla quartica si chiamano N, N', la retta del 1^0 regolo di Q, passante per N, dovrà incontrare ulteriormente la quartica in un punto di m', ossia precisamente in N'. Così il quadrilatero $MM'N'N$ giacente in Q è iscritto nella quartica: e però questa è concatenata a Q. In conclusione le quattro coppie di punti $AA', \dots, DD'$ sono i punti base di un fascio di quartiche concatenate a Q.

9. Le due specie di fasci di quartiche concatenate ad una data quadrica Q, così ottenute (n[i] 7, 8), dipendono entrambe, *su* Q, da 10 costanti: come subito si vede.

Vi sono fasci (dipendenti da 9 costanti, oltre a quelle di Q) che appartengono all'una e all'altra di quelle due specie. Fra essi meritano menzione quelli (con 8 costanti), i cui punti base sono i vertici di due quadrilateri qualunque giacenti su Q.

10. Si considerino le quartiche di un fascio concatenato a Q, nella maniera con cui si sono ottenute al n. 3: ossia ognuna come intersezione di Q con una quadrica Q' infinitamente vicina, i cui regoli stanno coi regoli infinitamente prossimi di Q in complessi lineari. Si è visto al n. 3 che, se L è un complesso lineare contenente un 1^0 regolo di Q e quello infinitamente vicino di Q', i due lati opposti di un quadrilatero giacente in Q e iscritto nella quartica, i quali stanno nel 2^0 regolo di Q, sono rette reciproche rispetto a L.

Ora supponiamo che L non muti, al variare della quartica nel fascio; e assumiamo un punto base A di questo, come vertice di un quadrilatero giacente in Q ed iscritto in una quartica Γ del fascio. Quel lato a del quadrilatero, che è nel 2º regolo di Q e che passa per A, avrà sempre, qualunque sia Γ, come lato opposto a', la retta del 2º regolo che è reciproca di a rispetto a L. Il vertice del quadrilatero che è adiacente ad A e che sta su a' sarà l'intersezione di questa retta fissa colla generatrice del 1º regolo passante per A: è dunque un punto A' determinato, indipendente da Γ, ossia un punto base del fascio. — Ripetendo per gli altri punti base ciò che s'è detto per A, concludiamo che gli 8 punti base sono a coppie su quattro rette del 1º regolo, mentre le coppie di rette del 2º regolo passanti per quelle coppie di punti sono in un'involuzione (come rette reciproche rispetto a L). Abbiamo la 2ª specie di fasci dei nⁱ 7, 8. Per essa è fisso il complesso lineare contenente il 1º regolo di Q con quello infinitamente vicino: ma sarà variabile in generale il complesso lineare contenente il 2º regolo di Q e quello infinitamente vicino.

Per la 1ª specie di fasci saranno in generale variabili entrambi i complessi lineari. Ma essendo per es. il complesso lineare L dei primi regoli tale che due rette fisse del 2º regolo di Q ~~son~~ sempre reciproche rispetto ad esso (due lati opposti del quadrilatero giacente in Q, i cui vertici son punti base), L varierà in un fascio. E così pure il complesso lineare dei secondi regoli.

Sono fissi ambi i complessi lineari nel caso speciale della fine del n. 9.

I sistemi ∞^1 di quadriche, nei quali ogni quadrica è concatenata alla propria quartica caratteristica.

11. Passiamo ora a considerare dei particolari sistemi (sottinteso sempre: *continui*) di regoli o di quadriche che, secondo il concetto del n. 1, si ottengono da particolari sistemi infiniti di piani dello S_5.

Un caso che è già stato ampiamente studiato (10), e che qui conviene ricordare, è quello dei sistemi ∞^1 di piani di S_5, che si ottengono da una ∞^1 qualunque d'iperpiani, come intersezioni di tre iperpiani infinitamente vicini. Sono i piani tangenti di una superficie sviluppabile; ossia, in generale, i piani osculatori di una curva. Due piani del sistema, infinitamente vicini, si posson riguardare come

(10) C. Segre, *Le congruenze rettilinee* W *aderenti a due superficie rigate,* Atti Acc. Torino, XLII, 1906-07, p. 335; *Sulle congruenze rettilinee* W, *di cui una od ambe le falde focali sono rigate,* Atti idem, XLIX, 1913-14, p. 257 [qui a p. 9 e p. 119].

incidenti secondo una retta. Quindi nel corrispondente sistema ∞^1 di quadriche due quadriche successive si tagliano secondo un quadrilatero. Si tratta allora di una di quelle famiglie ∞^1 di quadriche, nelle quali la *caratteristica* di ogni quadrica (intersezione colla quadrica infinitamente vicina) è un quadrilatero. Due lati opposti di questo quadrilatero (e così pure gli altri due) descrivono due rigate *trasformate asintotiche* l'una dell'altra, cioè falde focali di una *congruenza W* (composta precisamente di un sistema di regoli della famiglia di quadriche).

Si ottengono tali sistemi di quadriche, o di regoli, partendo, ad esempio, da una ∞^1 di complessi lineari di rette: sono i regoli intersezioni di tre complessi successivi. Le congruenze lineari *caratteristiche*, cioè intersezioni di due complessi successivi, hanno per direttrici due lati opposti dei quadrilateri caratteristici. Ecc. ecc.

12. Suppongasi invece di avere in S_5 ∞^1 piani *tangenti* (non più osculatori) ad una curva nei suoi vari punti. Ogni piano si potrà riguardare come incidente al suo infinitamente vicino nel punto di contatto colla curva. In conseguenza otterremo nello spazio ordinario un sistema ∞^1 di regoli, tale che ognuno sta in un complesso lineare di rette con quello successivo, ossia una famiglia ∞^1 di quadriche, in cui ogni quadrica è concatenata alla propria quartica caratteristica.

Sarà facile costruire una ∞^1 di regoli che soddisfi alla detta condizione. Possono essere anzitutto ∞^1 regoli di un complesso lineare fisso, senz'altra particolarità. Se no, si considerino gli ∞^1 complessi lineari, ognun dei quali congiunge un regolo al regolo successivo. Ogni regolo starà in due complessi infinitamente vicini di questa ∞^1, ossia nella loro congruenza lineare [comune]. Viceversa, data una ∞^1 di complessi lineari, se si prende ad arbitrio (con continuità) un regolo entro ogni congruenza d'intersezione di due complessi successivi, si otterranno ∞^1 regoli, di cui due successivi stan sempre in un complesso lineare. Concludiamo:

Un sistema ∞^1 di quadriche tale che ogni quadrica sia concatenata alla propria quartica caratteristica si ottiene nei seguenti modi: 1°) ∞^1 quadriche, di cui le generatrici di un sistema stiano in un complesso lineare fisso. 2°) Si fissi ad arbitrio un sistema ∞^1 di complessi lineari, e in ogni sua congruenza lineare caratteristica (intersezione di due complessi infinitamente vicini) si prenda un regolo, si tiri cioè una quadrica per la coppia delle rette direttrici della congruenza: le ∞^1 quadriche così scelte formano il sistema voluto.

Si osservi che le coppie di rette ora nominate son precisamente le coppie di generatrici omologhe di due rigate trasformate asintotiche l'una dell'altra, quali si sono accennate al n. 11.

13. Abbiasi ora un sistema ∞^2 di quadriche. Dalla nota teoria degl'inviluppi deriva che ogni quadrica Q è incontrata in generale da quelle infinitamente vicine secondo ∞^1 quartiche (caratteristiche) passanti per gli stessi 8 punti, cioè formanti un fascio. Gli 8 punti sono quelli di contatto di Q colla superficie F inviluppo del dato sistema ∞^2.

Se questo sistema è preso in modo generico, per ogni Q il fascio di quartiche caratteristiche conterrà in generale (n. 4) *tre* quartiche concatenate alla Q. Esse rappresentano tre *direzioni* con cui si passa, entro al sistema ∞^2 di quadriche, da una di esse Q ad un'altra infinitamente vicina, i cui regoli son linearmente legati, rispettivamente, ai regoli di Q. Proseguendo la variazione, entro al sistema ∞^2, nelle direzioni così definite, si conclude che: *Un sistema ∞^2 di quadriche si può scomporre in tre modi in ∞^1 famiglie semplicemente infinite della natura di quelle determinate al n. 12: tali cioè che entro ogni famiglia ciascuna quadrica è concatenata alla propria curva caratteristica. Così una superficie* F *inviluppo di ∞^2 quadriche si può in tre modi diversi ottenere come inviluppo di una famiglia semplicemente infinita di altre superficie, le quali a lor volta sono inviluppi di famiglie ∞^1 di quadriche del n. 12.*

Una 1ª categoria di sistemi ∞^2 di quadriche, nei quali ogni quadrica è concatenata a tutte le sue quartiche caratteristiche.

14. Proponiamoci di stabilire in quali casi un sistema ∞^2 di quadriche è tale che su ogni quadrica Q *tutte* le ∞^1 quartiche caratteristiche siano concatenate a Q (non solo tre, come in generale (n. 13)): cosicchè gli 8 punti di contatto della Q coll'inviluppo F presentino sempre l'uno o l'altro dei due casi ottenuti ai n.^{i} 7, 8.

Trasportato il problema in S_5, esso prende questa forma: quando è che un sistema ∞^2 di piani di S_5 è tale che ogni suo piano sia incidente a ciascuno degli ∞^1 piani infinitamente vicini. Ora i sistemi ∞^2 di piani così fatti sono stati determinati nel § 7 dei « *Preliminari* » citati in (9). Se, anzitutto, l'S_4 che unisce un piano assegnato del sistema ad uno infinitamente vicino resta fisso al variare di quest'ultimo, si hanno i casi seguenti: 1º) ∞^2 piani di un S_4; 2⁰) ∞^2 piani giacenti negli S_3 caratteristici di una ∞^1 d'iperpiani (S_4); 3⁰) ∞^2 piani di contatto di una ∞^2 d'iperpiani colla varietà da essi inviluppata (sistema corrispondente per dualità a quello degli ∞^2 piani tangenti di una superficie di S_5). Se invece è fisso su ogni piano il punto d'incontro con ciascun piano infinitamente vicino, abbiamo i sistemi che derivano per dualità dai precedenti. Trattandosi di applicare tutto ciò ai sistemi di ∞^2 quadriche, i due sistemi di regoli di queste si rappresentano in S_5 con due sistemi ∞^2 di piani, polari fra loro rispetto alla varietà quadratica R, e per conseguenza corrispondentisi per dualità. Basta dunque, per quell'applicazione, considerare i sistemi di piani prima enumerati. Concludiamo:

I sistemi ∞^2 di quadriche, pei quali accade che tutte le quartiche caratteristiche sono concatenate alle rispettive quadriche, dànno luogo anzitutto ai seguenti casi: che son quelli in cui un regolo di ogni quadrica sta in uno stesso complesso lineare con tutti gli ∞^1 regoli infinitamente vicini, delle quadriche del sistema infinitamente prossime a quella:

1º) Sistema delle quadriche contenenti ∞^2 regoli presi ad arbitrio entro uno stesso complesso lineare di rette.

2º) Assunta una ∞^1 di complessi lineari, nella congruenza lineare «caratteristica» di ciascun complesso (n. 11) si prendano ∞^1 regoli; si otterranno complessivamente ∞^2 regoli, le cui quadriche costituiscono il sistema voluto. Sono dunque ∞^2 quadriche, passanti ognuna per una coppia di generatrici omologhe di due rigate trasformate asintotiche l'una dell'altra, cioè focali per una congruenza W (n. 11).

3º) Si prenda una ∞^2 di complessi lineari: ogni complesso avrà comune con tutti quelli infinitamente vicini un regolo; gli ∞^2 regoli così definiti stanno sulle quadriche del sistema cercato.

15. Al n. 10 s'è dimostrato che, quando il complesso lineare L, che unisce un regolo di Q ad uno infinitamente vicino entro al sistema ∞^2, sta fisso al variar di questo secondo regolo, il fascio di quartiche concatenate a Q deve presentare il 2⁰ caso dei n.ⁱ 7 e 8. Devono cioè gli 8 punti base stare a coppie su quattro rette di uno stesso regolo di Q. Dunque: *I sistemi ∞^2 di quadriche costruiti al numero precedente si possono anche caratterizzare così. Per ogni quadrica del sistema gli 8 punti di contatto colla superficie inviluppo stanno, a coppie, su quattro generatrici di uno stesso regolo della quadrica (e, per conseguenza, sono quattro coppie di punti separati armonicamente da due generatrici dell'altro regolo).*

Si ottengono in tal modo tre classi molto ampie di superficie, caratterizzate da questa particolarità: di ammettere ∞^2 bitangenti situate a quattro a quattro su una stessa quadrica (in uno stesso regolo), tangente alla superficie negli 8 punti di contatto delle quattro bitangenti. Queste 4 coppie di punti saran sempre armoniche rispetto a due trasversali comuni delle 4 bitangenti.

16. Su ogni quadrica Q di uno degli attuali sistemi ∞^2, il fascio di quartiche caratteristiche, avendo, ad esempio, due punti base A, A' su una generatrice a di Q, conterrà una quartica avente a come parte. Ripetendo ciò per le 4 coppie di punti base, possiamo dire che nel dato sistema stanno 4 quadriche infinitamente vicine a Q, ognuna delle quali ha comune con questa quadrica una generatrice: e si hanno così le quattro generatrici del n. 15. Passando poi ancora da una di quelle 4 quadriche ad una successiva, e così via, vediamo che: *Un sistema ∞^2 di quadriche dei n.^i 14, 15 si può in quattro modi spezzare in ∞^1 famiglie semplicemente infinite, ognuna delle quali ha un inviluppo contenente come parte una superficie rigata.* Precisamente: *le quadriche di ciascuna famiglia semplicemente infinita son raccordate alla corrispondente superficie rigata lungo le generatrici rettilinee di questa.* Si può anche dire che la superficie inviluppo delle ∞^2 quadriche ammette una congruenza di bitangenti scomponibile in un sistema (unico) di ∞^1 rigate, tale che ogni quadrica del sistema ∞^2 è raccordata a quattro di quelle rigate lungo quattro generatrici.

Le quattro generatrici singolari di ogni quadrica Q si possono ottenere dallo S_5, così. Nel sistema ∞^2 di piani polare rispetto a R di ciascun sistema delle 3 specie del n. 14, ossia nel sistema ∞^2 in cui ogni piano è incontrato in un punto fisso da tutti i piani infinitamente vicini, il piano stesso è congiunto a quelli infinitamente vicini mediante gli ∞^1 iperpiani di un inviluppo di 2ª classe (11). Fra questi iperpiani ve ne saran dunque 4 tangenti a R. Essi

(11) Se si tratta del 3º caso del n. 14, questo fatto costituisce un noto teorema di DEL PEZZO, relativo ai piani tangenti di una superficie iperspaziale. Ma anche nel 1º e nel 2º caso si riconosce subito che il fatto sussiste. Pel sistema ∞^2 di piani, polare rispetto ad R di quello dato dal 2º caso del n. 14, cioè per un sistema ∞^2 di piani tangenti a una curva, l'inviluppo di 2ª classe del testo si spezza sempre in due fasci d'iperpiani, aventi per assi gli S_3 che congiungono il piano ivi considerato, rispettivamente, a quello infinitamente vicino uscente dalla stessa tangente, e al piano osculatore della curva.

corrispondono ai complessi lineari speciali, che han per assi le 4 generatrici singolari di Q.

Un caso più speciale di sistemi doppiamente infiniti di quadriche.

17. Suppongasi che, per un sistema ∞^2 di quadriche, sì l'uno che l'altro sistema dei regoli contenuti in esse presentino le particolarità dei n.^{i} 14 e seg.^{i}. Allora su ogni quadrica Q gli 8 punti base del fascio di quartiche caratteristiche dovranno distribuirsi, a coppie, su 4 rette di un regolo; e ancora, a coppie, su 4 rette dell'altro regolo. Nei due regoli staranno, rispettivamente, due coppie di rette, direttrici di involuzioni assiali, che mutano in sè la configurazione degli 8 punti. Ne segue che questi si scompongono in due quaterne di vertici di 2 quadrilateri giacenti in Q. Si presenterà su ogni Q il caso speciale della fine del n. 9.

Per avere tutti i sistemi ∞^2 di quadriche così fatti si dovrà, risalendo al n. 14, imporre a ciascuna delle 3 specie particolari di sistemi di ∞^2 piani di S_5 là considerate, di esser tale che anche i piani polari rispetto ad R costituiscano un insieme appartenente ad una di quelle 3 specie. Ciò è come dire che un sistema di piani deve appartenere ad una di quelle 3 specie e nello stesso tempo ad una delle specie duali di quelle.

Si ottengono così 6 diverse possibilità per il sistema ∞^2 di quadriche.

18. Fra queste 6 classi limitiamoci, per brevità, a segnalare quella che si ottiene da un sistema ∞^2 di piani che, oltre ad essere l'insieme dei piani tangenti di una superficie di S_5, sia l'insieme dei piani caratteristici di una ∞^2 d'iperpiani (cioè piani di contatto di questi iperpiani col loro inviluppo). Si sa ([12]) che in tal caso la superficie è una qualunque di quelle speciali (da indicarsi per brevità col simbolo Φ), i cui punti han le coordinate omogenee esprimibili con funzioni di due parametri $u\, v$, soluzioni di una stessa equazione a derivate parziali di 2^0 ordine, lineare e omogenea nella funzione e nelle prime e seconde derivate (equazione di LAPLACE). Ricorderò che tali superficie son caratterizzate geometricamente dal

([12]) V. il n. 26 della mia Nota: *Su una classe di superficie degl'iperspazii, legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2º ordine*, Atti Acc. Torino, XLII, 1906-07, p. 559 [qui a p. 46].

contenere un *doppio sistema coniugato* di linee, ossia due sistemi ∞^1 di linee, tali che i piani tangenti alla superficie nei punti di una linea dell'un sistema inviluppano una superficie sviluppabile, le cui generatrici rettilinee son tangenti alle linee dell'altro sistema. Questo doppio sistema di linee si ha integrando quell'equazione differenziale, che DARBOUX chiama « *equazione delle caratteristiche* » per la data equazione di LAPLACE (13).

Per ottenere i sistemi di quadriche rappresentati da siffatti sistemi ∞^2 di piani, si potrà dunque far così. Si considerino gli ∞^2 complessi lineari di rette $\Sigma\, c_{ik}\, p_{ik} = 0$, i cui coefficienti c_{ik} son funzioni di due parametri $u\, v$, soluzioni linearmente indipendenti di una stessa equazione di LAPLACE. Le equazioni fra le p_{ik}:

$$(1) \qquad \Sigma\, c_{ik}\, p_{ik} = 0\,, \qquad \Sigma \frac{\partial c_{ik}}{\partial u} p_{ik} = 0\,, \qquad \Sigma \frac{\partial c_{ik}}{\partial v} p_{ik} = 0\,,$$

per ogni coppia $u\, v$ determinano un regolo; la quadrica di questo, al variare di $u\, v$, descrive il sistema ∞^2 voluto.

Per questa classe di sistemi ∞^2 di quadriche, il fatto che, su ognuna Q di esse, gli 8 punti caratteristici sono i vertici di due quadrilateri giacenti in Q, risulta anche così. Da quel che sopra s'è ricordato, intorno al doppio sistema coniugato di una superficie Φ, segue che un piano tangente a questa si può riguardare come incontrato secondo rette da due piani tangenti infinitamente vicini. Tradotto in geometria delle rette, questo fatto ci dà che ciascun regolo del sistema ∞^2 sarà segato secondo coppie di rette da due diversi regoli infinitamente vicini: ossia che la Q sarà tagliata secondo quadrilateri da due diverse quadriche infinitamente vicine. Gli 8 punti caratteristici saran le intersezioni di questi due quadrilateri di generatrici di Q, e quindi formeranno i vertici di altri due quadrilateri (costituiti dalle stesse coppie di generatrici, ma con uno scambio evidente).

19. In corrispondenza al doppio sistema coniugato di linee della superficie Φ ed alle sviluppabili circoscritte a questa lungo esse, avremo (in base al n. 11): Integrando l'equazione delle caratteristiche dell'equazione di LAPLACE, si scompone il sistema ∞^2 di complessi lineari c_{ik} in due varietà ∞^1 di sistemi semplicemente

---

(13) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Tome I, 1887, p. 133. Sulle dette superficie Φ, cfr. anche le citazioni di C. GUICHARD e di E. E. LEVI nella nota (20) dei miei « *Preliminari* ».

infiniti; a questi corrispondono, col passaggio dato dalle (1), due varietà ∞^1 di sistemi semplicemente infiniti di quadriche, componenti il sistema ∞^2 di quadriche, tali che ogni sistema semplicemente infinito è della natura indicata al n. 11; cioè che entro ciascuno di essi le singole quadriche hanno per caratteristiche dei quadrilateri. In altre parole, il complesso dei *primi* regoli delle ∞^2 quadriche si può spezzare in due modi in ∞^1 congruenze W aderenti a due superficie rigate (e così, di conseguenza, pei *secondi* regoli).

Possiamo anche dire che la superficie F inviluppata dalle ∞^2 quadriche è toccata da ognuna di queste negli 8 vertici di due quadrilateri giacenti nella quadrica stessa. F *ammette* ∞^2 *quadrilateri sghembi semplici iscritti, tali che ogni lato tocca* F *in ambi i suoi vertici; questi quadrilateri giacendo a due a due su una quadrica.*

20. Se la superficie Φ considerata è *parabolica* (ossia è tale la corrispondente equazione di LAPLACE), se cioè in ogni punto della Φ coincidono le due tangenti coniugate, coincideranno in corrispondenza su ogni quadrica del sistema ∞^2 i due quadrilateri i cui vertici sono i punti di contatto della quadrica coll'inviluppo F: F *sarà toccata da ogni quadrica in soli 4 punti, ognun dei quali va riguardato come la riunione di due punti di contatto.*

Questo caso speciale si presenta, ad esempio, se la superficie Φ è una *rigata.* Segando questa e i suoi piani tangenti con R, abbiamo nello spazio ordinario un sistema ∞^2 di quadriche che si definisce semplicemente così. *Si assumano, nello spazio ordinario, due rigate* G, H, *con una corrispondenza assegnata tra le loro generatrici. Per ogni coppia di generatrici omologhe* g, h *si prenda il fascio di quadriche determinato dalle due quadriche che contengono* g *ed* h, *e che son raccordate, l'una a* G *lungo* g, *l'altra ad* H *lungo* h. *Si otterranno in tal modo* ∞^2 *quadriche costituenti il sistema voluto.*

La 2ª categoria di sistemi ∞^2 di quadriche, concatenate a tutte le loro quartiche caratteristiche.

21. Dal n. 14 in poi abbiam considerato la categoria di siffatti sistemi ∞^2 di quadriche, rappresentata da sistemi ∞^2 di piani di S_5, per cui avviene (n. 14) che è fisso l'S_4 congiungente un piano con ciascuno degli ∞^1 infinitamente vicini: oppure accade il fatto duale.

Restan da considerare quei sistemi ∞^2 di piani di S_5, nei quali ogni piano è incontrato da tutti quelli infinitamente vicini in un punto variabile; e in pari tempo è variabile l'S_4 che unisce un piano agli infinitamente vicini.

Per i sistemi corrispondenti di ∞^2 quadriche dovrà (n. 10), su ogni quadrica, il fascio delle ∞^1 quartiche caratteristiche presentare il 1° dei due casi del n. 7. Otterremo dunque così *sistemi di* ∞^2 *quadriche tali che, fra gli 8 punti di contatto di ognuna di queste colla superficie inviluppo* F, *quattro sono vertici di un quadrilatero giacente sulla quadrica.* In altre parole: *la superficie* F, *inviluppo di un tal sistema* ∞^2 *di quadriche, ammette* ∞^2 *quadrilateri semplici iscritti, di cui ogni lato la tocca nei suoi due vertici.*

Viceversa: *se una superficie* F *ammette* ∞^2 *quadrilateri siffatti, sì che ogni suo punto sia vertice di uno di essi* (14), F *sarà, almeno come parte, fra le superficie che ora consideriamo.* Basta in fatti che per ognuno di quei quadrilateri si conduca una quadrica (variabile con continuità al mutar del quadrilatero): si otterranno ∞^2 quadriche tangenti ad F nelle quaterne di vertici dei quadrilateri; sicchè esse formeranno un sistema quale ora stiamo studiando, ed avranno per inviluppo la data superficie F, con una eventuale superficie residua.

Le superficie del § preced.^{e} (n. 17 e seg.^{i}) eran casi particolari di queste. Sono anche tra le superficie attuali gli inviluppi di sole ∞^1 quadriche concatenate alle proprie quartiche caratteristiche (sistemi ∞^1 dell'enunciato finale del n. 12): gli ∞^2 quadrilateri essendo quelli che giacciono nelle ∞^1 quadriche e sono iscritti nelle rispettive quartiche caratteristiche.

22. Quanto alla effettiva determinazione di tutti i sistemi ∞^2 di quadriche che ora vogliamo, essa deriva da quella dei corrispondenti sistemi ∞^2 di piani di S_5, che si trova fatta al n. 32 e seg.^{i} dei « *Preliminari* », in particolare al n. 34.

D'altra parte si osservi che ora l'essenziale non sono più le ∞^2 quadriche, bensì gli ∞^2 quadrilateri suddetti, in esse rispettivamente contenuti (i cui vertici han per luogo F, ecc.). Quando questi son noti, abbiam detto testè come si costruiscano infiniti sistemi corrispondenti di quadriche, tirando per ogni quadrilatero (con continuità) una quadrica ad arbitrio.

---

(14) Per una superficie *qualunque*, volendo cercare se esista un tale quadrilatero iscritto, si dovranno imporre ai 4 vertici, ossia ad 8 parametri, precisamente 8 condizioni: sicchè si può pensare, in generale, solo ad un numero finito di quadrilateri siffatti, non a ∞^2.

A conferma di ciò, il citato n. 34 dei « *Preliminari* » dà che nel caso attuale un piano generico G della ∞^2 di piani di S_5 è incontrato da quelli infinitamente vicini nei punti di una retta g, ed è congiunto ad essi dagl'iperpiani passanti per un S_3, Γ. I due punti in cui R è incontrata da quella retta, e quelli in cui è toccata da iperpiani passanti per Γ, rappresentano le due coppie di lati opposti del quadrilatero proveniente dalla quadrica di cui un regolo ha per imagine G. E il fatto che nella costruzione del suddetto n. 34 l'elemento essenziale sono la retta g e l'S_3 Γ, mentre il piano G si può prendere ad arbitrio (con continuità) fra i piani passanti per g entro Γ, risponde all'osservazione fatta sull'arbitrarietà della quadrica passante pel quadrilatero.

Nel caso più generale (« *Preliminari* », n. 35) si è ricondotti ad una superficie della classe Φ ricordata al n. 18. La retta g è la tangente in un punto P di Φ ad una linea del doppio sistema coniugato; e l'S_3 Γ è quello che unisce il piano tangente in P a Φ col piano osculatore in P alla detta linea. Servendoci di quanto s'è detto al n. 18, ne deduciamo:

Per ottenere nel caso più generale un sistema di ∞^2 quadrilateri semplici, i cui vertici abbian per luogo una superficie, alla quale sian tangenti nei vertici stessi i quattro lati, ossia le 4 facce, si può procedere come segue. Si fissi una ∞^2 di complessi lineari di rette $\Sigma\, c_{ik}\, p_{ik} = 0$, *coi coefficienti* c_{ik} *funzioni di due parametri* u v *soddisfacenti una stessa equazione di* LAPLACE; *per ciascun complesso si avrà un corrispondente regolo* (1) *del n. 18. Entro la ∞^2 di complessi si scelga una delle due varietà semplicemente infinite di sistemi ∞^1 di complessi, provenienti dall'integrazione della equazione delle caratteristiche dell'equazione di* LAPLACE *(n. 19), composta cioè di sistemi di complessi tali che i corrispondenti regoli dati dalle* (1) *formino sistemi della specie del n. 11. Poi per ognuno,* L, *degli ∞^2 complessi si prenda il regolo corrispondente entro la ∞^2, ed anche il regolo d'intersezione coi due complessi lineari successivi a* L *entro il sistema ∞^1, della varietà considerata, passante per* L. *Le quadriche dei due regoli si taglieranno nel quadrilatero, che al variare di* L *descrive il sistema ∞^2 voluto.*

Questa costruzione, come s'è detto, corrisponde al caso generale. Ma vi sono dei casi speciali, pure degni di un cenno. Così (« *Preliminari* », n. 35), se in S_5 si fissano due curve ad arbitrio, ogni retta appoggiata a queste si può assumere come la g, e l'S_3 delle tangenti alle curve nei due punti d'appoggio come lo spazio Γ. Ne segue questa costruzione:

Si fissino ad arbitrio due sistemi ∞^1 *di complessi lineari di rette. Per ogni coppia di complessi* U, V, *presi rispettivamente entro ai due sistemi, si determini la coppia delle rette comuni alle loro congruenze lineari caratteristiche (intersezioni di* U, V *coi complessi infinitamente vicini), e la coppia delle direttrici della congruenza lineare di* U *e* V. *Si avranno così le due coppie di lati opposti di un quadrilatero, che, al mutare di* U *e* V, *descrive coi suoi vertici una superficie a cui son tangenti, nei vertici stessi, le quattro corrispondenti facce del quadrilatero.*

23. Citerò, terminando, una ben nota superficie, che rientra fra quelle di cui ora ci siamo occupati: la superficie di KUMMER del 4⁰ ordine e 4ª classe. Si fissino in fatti due dei sei sistemi nulli che mutano questa superficie in sè: siano I e II. Per un punto qualunque A di essa si prendano i piani tangenti β e δ che gli corrispondono in I e II: i loro punti di contatto, rispettivamente B e D, saranno gli omologhi in I e II del piano α tangente in A, e quindi giaceranno su questo piano. Il punto che in II corrisponde a β e quello che in I corrisponde a δ coincideranno in uno stesso punto C della superficie, in causa della permutabilità dei due sistemi nulli. E il piano γ tangente in C sarà l'omologo di B in II e di D in I, sicchè conterrà B e D. Così il quadrilatero (o tetraedro) $ABCD$ ha i vertici sulla superficie, e come piani tangenti in A, B, C, D rispettivamente le quattro facce DAB, ABC, BCD, CDA. Variando A, si ottengono ∞^2 tali quadrilateri, o tetraedri ([15]).

Si osserverà che il ragionamento vale, non solo per la superficie di KUMMER, ma per ogni superficie che sia trasformata in sè da due sistemi nulli, fra loro permutabili.

([15]) Questi tetraedri rientrano fra gli ∞^5 tetraedri, in pari tempo iscritti e circoscritti alla superficie di KUMMER, che E. CAPORALI ha ottenuto al n. 47 della Memoria: *Sui complessi e sulle congruenze di 2⁰ grado,* Mem. Acc. Lincei, (3) 2, 1877-78, p. 749 (= E. CAPORALI, *Memorie di Geometria,* Napoli, 1888, p. 54). Nell'enunciato che ivi s'incontra si parla di soli ∞^4 tetraedri; ma, essendo questi dedotti da uno degli ∞^1 complessi quadratici pei quali la data superficie è singolare, è implicito che in totale i tetraedri sono ∞^5. — Per altra via gli ∞^5 tetraedri di CAPORALI furon incontrati da F. KLEIN: *Ueber Configurationen, welche der Kummer'schen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind,* Math. Ann., XXVII, 1886, p. 106.