Corrado Segre

Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (I partie, Courbes algébriques)

Math. Annalen, Vol. **30** (1887), p. 203–226

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 80–104

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_80>

VI.

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LES COURBES ET LES SURFACES RÉGLÉES ALGÉBRIQUES

« Mathematische Annalen », Band XXX, 1887, pp. 203-226.

Des résultats sur les surfaces réglées d'ordre n quelconque et de genre p égal à $0, 1$ ou 2 (1) donnaient lieu à penser qu'il arrive aussi pour p quelconque qu'il y ait un certain espace (2) tel que celles parmi ces surfaces qui appartiennent à des espaces inférieurs soient des projections de celles qui appartiennent à cet espace. On verra dans la 2e Partie de ce Mémoire que pour n assez grand il en est réellement ainsi et que l'espace dont il s'agit est S_{n-2p+1}. De là une méthode importante pour étudier les surfaces réglées des espaces inférieurs, par exemple celles de l'espace ordinaire: je me borne à en faire l'application à des questions relatives à la géométrie des courbes tracées sur une surface réglée, et en particulier à celle des courbes *minimae* de celle-ci. Quant aux surfaces réglées de genre p et ordre n appartenant à des espaces supérieurs à S_{n-2p+1}, elles jouissent de particularités remarquables qu'on verra établies complètement. On rencontrera aussi d'autres espèces particulières de surfaces réglées (3).

---

(1) Voir pour $p=0$, VERONESE: *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens* (Math. Ann., XIX); et pour ce cas et les deux autres mes deux travaux: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, XIX), *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (mêmes Atti, XXI).

(2) J'entends par *espace* S_r une variété linéaire à r dimensions et je dis qu'une variété quelconque *appartient* à un S_r qui la *contient* lorsqu'elle n'est pas contenue dans un espace inférieur (c. à. d. à un nombre de dimensions $< r$).

(3) J'ai énoncé une partie des résultats sur les surfaces réglées que l'on trouvera ici dans la Note: *Nuovi risultati sulle rigate algebriche di genere qualunque* (Atti Acc. Torino, XXII) [V. la precedente Nota V in questo volume (N. d. R.)].

Mais pour pouvoir faire sur les surfaces réglées les recherches que j'avais en vue, il était indispensable d'établir certaines propriétés relatives aux courbes algébriques d'un espace quelconque. C'est ce que j'ai fait dans la 1e Partie du travail. On y verra en outre résolues d'autres questions intéressantes sur les courbes algébriques, et établies d'une façon synthétique simple des propositions que l'on est accoutumé à prouver analytiquement (par exemple certains cas du *Restsatz*). Cependant je ne me suis pas arrêté sur plusieurs autres questions relatives aux courbes algébriques qui se présentaient naturellement et que l'on peut traiter par les mêmes méthodes; car elles n'entraient pas dans le cadre de ce travail.

Ie Partie.

Courbes algébriques.

Sur les deux espèces de courbes algébriques dans un espace quelconque [4].

1. Soit donnée une courbe algébrique quelconque γ_p^n, c'est-à-dire de genre p et ordre n, *appartenant* à un S_r. Imaginons dans un plan une courbe d'ordre ν convenable $f_p^\nu, f=0$, de même genre p et mêmes modules et qui soit en correspondance uniforme avec γ. En indiquant par $x_0, x_1 \dots x_r$ les coordonnées d'un point de γ dans S_r, il est évident que cette correspondance sera exprimée analytiquement par les équations

$$(1) \qquad x_0 : x_1 : \dots : x_r = \psi_0 : \psi_1 : \dots : \psi_r$$

---

(4) La méthode dont nous faisons usage dans ce § pour obtenir les courbes algébriques, qui consiste à les considérer comme transformations uniformes des courbes planes, a été appliquée aux courbes gauches par M. M. Brill et Nöther au § 17 de leur travail: *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (Math. Ann., VII., pp. 269-310) et puis plus largement par M. Nöther dans son Mémoire couronné par l'Académie de Berlin: *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Abhandl. d. kön. Ak. d. W. zu Berlin, 1882). Presque tout ce premier paragraphe de notre travail est une extension du § 2 de ce Mémoire de M. Nöther aux courbes d'un espace quelconque. Pour les propositions dont nous ferons usage sur les séries linéaires de groupes de points d'une courbe algébrique (plane) nous renvoyons une fois pour toutes au Mémoire cité de M. M. Brill et Nöther, que nous indiquerons dans la suite simplement par B. N.

où les $\psi_0, \psi_1 \dots \psi_r$ sont dans le plan $r+1$ courbes *indépendantes* (5) d'une ∞^r linéaire de courbes *adjointes* à f, coupant celle-ci, en dehors de points fixes, en une série *linéaire* r fois infinie de groupes de n points, c'est-à-dire en une g_n^r. Cette g_n^r est l'image sur f de la ∞^r de groupes de n points déterminés sur γ par les S_{r-1} de S_r.

Inversement si

$$\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_r \psi_r = 0, \tag{2}$$

où les α sont des constantes arbitraires, désigne une ∞^r linéaire de courbes adjointes à f et coupant celle-ci en une g_n^r, les équations (1) avec $f=0$ représenteront une courbe γ appartenant à S_r, et dont les groupes de points d'intersection avec les S_{r-1} correspondront à la g_n^r de f. Cette courbe γ sera en correspondance uniforme avec f, et par suite d'ordre n et genre p. Il faut seulement excepter le cas où pour chaque point de f il y en aurait d'autres i tels que tous ces $i+1$ points fassent prendre les mêmes valeurs aux rapports $\psi_0 : \psi_1 : \dots : \psi_r$, c'est-à-dire donnent, substitués dans (2), une même équation entre les α, ce qui signifie que toutes les courbes de cette ∞^r qui passent par un point quelconque de f viennent passer par cela même par d'autres i points déterminés par celui-là.

2. On voit ainsi que pour avoir les différentes courbes de genre p et ordre n appartenant à un espace quelconque, on doit chercher quelles sont toutes les séries linéaires de groupes de n points de f (ne présentant pas l'exception dont nous avons parlé).

Or on sait qu'il y a une distinction importante à faire entre les séries qui sont déterminées sur f_p^ν par des $\varphi^{\nu-3}$, c. à. d. des courbes adjointes d'ordre $\nu - 3$, séries que l'on nomme *spéciales*, et les séries *non spéciales* qui sont données par des courbes adjointes d'ordre supérieur à $\nu - 3$. Comme les points d'intersection variables de f avec une $\varphi^{\nu-3}$ sont $2p-2$, on voit que si $n > 2p-2$ la g_n^r ne peut pas être spéciale. Et plus précisément une g_n^r n'est pas spéciale *en général* si $r \leq n - p$; elle ne l'est absolument pas, lorsque cette condition se vérifie, si cette g_n^r est complètement définie par les points fixes de f par lesquels passent les courbes adjointes qui la déterminent. Et si au contraire $r > n - p$ la g_n^r sera toujours spéciale, et par suite $n \leq 2p - 2$.

Si $r \leq n - p$ la g_n^r est contenue en général dans une g_n^{n-p} déterminée, qui est donnée par *toutes* les courbes adjointes d'une série

(5) Car les x ne doivent pas être liées par des relations linéaires.

définie par les points fixes. On peut choisir arbitrairement pour déterminer une série non spéciale g_n^r un groupe de n points : cela prouve que les g_n^{n-p} dans f sont ∞^p. Et comme une quelconque de ces g_n^{n-p} contient $\infty^{(r+1)(n-p-r)}$ séries g_n^r, il s'ensuit qu'il y a dans f $\infty^{(r+1)(n-p-r)+p}$ g_n^r.

Une série spéciale de groupes de $n \leq 2p-2$ points est aussi contenue dans une qui est déterminée par toute une série de courbes adjointes définie par les points fixes [6], mais pour cette g_n^r ci on a, comme nous l'avons déjà rappelé, $r > n - p$. Le nombre de ces g_n^r est *généralement* (B. N. p. 292) $\infty^{p-(r+1)(p+r-n)}$, c'est-à-dire encore le même nombre que pour les séries non spéciales, [ayant] $r<n-p+1$, pourvu naturellement que

$$p-(r+1)(p+r-n) \geq 0 \tag{3}$$

c. à. d. (en représentant avec Ex le plus grand entier contenu dans x)

$$n \geq r + E\frac{r(p+1)}{r+1}. \tag{4}$$

Cette relation est alors, *pour des modules généraux*, la condition nécéssaire et suffisante pour l'existence de la g_n^r spéciale. Pour des modules particuliers il pourrait cependant arriver qu'il y eût des g_n^r spéciales même lorsque cette relation n'est pas satisfaite.

Ajoutons que pour définir une série spéciale de groupes de n points on ne peut plus, comme pour les séries non spéciales, prendre arbitrairement un groupe de n points : en effet le théorème de RIEMANN et ROCH établit un lien entre les points d'un tel groupe, qui lorsque $r > n-p$ consiste en ce que par n tels points passent non pas seulement $\infty^{p-n-1}\,\varphi^{\nu-3}$, comme par n points quelconques de f, mais bien $\infty^{p+r-n-1}$, de sorte que d'un groupe de n points qui doivent appartenir à une g_n^r spéciale, $n-r$ tout au plus seront arbitraires [7].

---

(6) On pourra en conséquence sur une variété algébrique simplement infinie quelconque de genre p appeler une série linéaire ∞^r de groupes de n éléments, c. à. d. une g_n^r, série *spéciale* si $r > n-p$, ou bien si elle est contenue dans une $g_n^{r'}$, où $r' > n-p$. Par des transformations uniformes d'une variété algébrique, une g_n^r, spéciale ou non, se change resp. en une g_n^r, spéciale ou non.

(7) Le cas de ce théorème que nous aurons à appliquer plus tard, c. à. d. celui de $r=1$ qui établit que dans une série linéaire simplement infinie de groupes de p points ou d'un nombre inférieur, on ne peut prendre arbitrairement tout un groupe pour définir la série, est dû à RIEMANN (*Theorie der Abel'schen Functionen* [Crelles J., 54, p. 115 ; Ges. math. Werke, p. 101] n° 5) et il est le premier qui ait été considéré (Voir aussi B. N. p. 280).

3. Les propositions qui précèdent nous montrent l'existence de courbes γ_p^n appartenant à S_r et leur nombre, du moins pour certains cas. En effet dans S_r une γ_p^n est déterminée en donnant: 1⁰ les $3p - 3$ modules qui servent à définir dans le plan f_p, ou mieux sa *classe* dans le sens de RIEMANN, 2⁰ la g_n^r considérée au n⁰ 1 et dont nous avons trouvé le nombre de paramètres, 3⁰ les $r(r+2)$ paramètres qui fixent dans cette g_n^r les $r+1$ groupes $x_i = 0$, c. à. d. les ψ_i, et leurs coefficients moins un, ou si l'on veut les $r(r+2)$ paramètres d'une homographie de S_r, en remarquant que les γ_p^n de S_r provenant d'une même g_n^r de f_p sont toutes projectives entre elles. — Nous nommerons une γ_p^n appartenant à S_r *spéciale* ou non, suivant que telle est la g_n^r qui lui correspond, c. à. d. la g_n^r des groupes de points déterminés sur elle par les S_{r-1} de S_r. Alors nous arrivons ainsi à la proposition suivante:

Le nombre des constantes dont dépendent les courbes d'ordre n, *genre* p *appartenant à* $\mathrm{S_r}$ *est*

$$3p - 3 + (r+1)(n-p-r) + p + r(r+2)$$
$$= (r+1)n - (r-3)(p-1)$$

pourvu toutefois que la condition (3) *ou* (4) *soit vérifiée.*

Cette condition est satisfaite si $r \leq n - p$, ce qui arrive nécessairement lorsque $n > 2p - 2$. Lorsque $r \leq n - p$ une γ_p^n appartenant à S_r n'est pas *en général* spéciale; et elle ne l'est *jamais* si $n > 2p - 2$. Mais si $r > n - p$ les γ_p^n sont toutes spéciales, et l'on a $n \leq 2p - 2$; il peut alors arriver que la condition (4) ne soit pas satisfaite, et que toutefois il existe des γ_p^n, *avec des modules particuliers*: l'expression donnée pour le nombre des paramètres des γ_p^n ne sera plus alors qu'une limite inférieure de ce nombre (8).

4. Le fait que pour $n > 2p - 2$ on a $r \leq n - p$ peut s'exprimer ainsi: *l'espace le plus élevé auquel puisse appartenir une* $\mathrm{\gamma_p^n}$ *lorsque* $\mathrm{n > 2p - 2}$ *est* $\mathrm{S_{n-p}}$ (9). Le nombre des paramètres de ces courbes

(8) Les courbes de genre $p = 0, 1, 2$ ne peuvent pas être spéciales; c'est avec $p = 3$ qu'on commence à avoir des courbes spéciales (la courbe plane générale du 4ᵉ ordre).

(9) Cette proposition importante est due à CLIFFORD: *On the Classification of Loci* (Phil. Trans., 1878) (qui suppose $p \leq n/2$, c. à. d. $n \geq 2p$), qui l'a tirée de la représentation des courbes au moyen d'intégrales abéliennes. M. VERONESE (loc. cit., p. 213) l'a établie au contraire au moyen de la représentation sur une courbe plane et des théorèmes sur les séries linéaires de groupes de points de celle-ci.

de S_{n-p} est $n(n-p+1)-(n-p-3)(p-1)=(n-p)(n-p+2)+4p-3$. Elles ont $4p-3$ invariants absolus, dont $3p-3$ sont les modules et p les constantes qui parmi les $\infty^p\, g_n^{n-p}$ fixent celle qui est donnée par les sections de la courbe avec les $\infty^{n-p}\, S_{n-p-1}$ de S_{n-p}. Les courbes non spéciales de genre p et ordre n appartenant à S_{n-p} seront dites *normales* et designées par C_p^n.

Si la g_n^r qui définit une γ_p^n de S_r (1) est contenue dans une $g_n^{r'}$ où $r'>r$, celle-ci donnera dans $S_{r'}$ une courbe dont les équations seront

$$x_0 : x_1 : \dots : x_r : \dots : x_{r'} = \psi_0 : \psi_1 : \dots : \psi_r : \dots : \psi_{r'} ;$$

en les comparant avec (1) on voit que la γ_p^n de S_r peut être considérée comme projection de celle de $S_{r'}$. De là il suit en particulier, en se rappelant que chaque série g_n^r où $r \leq n-p$ est contenue dans une g_n^{n-p}: *Les courbes de genre* p *et ordre* n *appartenant à* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p}}$ *nous donnent en elles-mêmes et en leurs projections toutes les courbes d'ordre* n *et genre* p *appartenant à des* $\mathrm{S_r}$ *où* $\mathrm{r} \leq \mathrm{n-p}$. Et si $n > 2p-2$ on a en particulier que ces courbes appartenant à S_{n-p} et par suite *normales* donnent avec leurs projections toutes les courbes de genre p et ordre n (10).

5. Lorsque $n \leq 2p-2$ et que les γ_p^n considérées sont spéciales, si l'on a $n>p$ et $r<n-p+1$ chaque g_n^r spéciale appartient à une g_n^{n-p+1}; donc *les courbes spéciales de genre* p *et ordre* n, *où* $\mathrm{p} < \mathrm{n} \leq 2\mathrm{p}-2$, *des espaces inférieurs à* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p+1}}$ *sont projections de celles appartenant à cet espace.* Et comme les g_n^{n-p+1} de f sont alors ∞^{2p-2-n} et chacune contient $\infty^{(r+1)(n-p+1-r)}\, g_n^r$, *le nombre de constantes dont dépend une* $\gamma_\mathrm{p}^\mathrm{n}$ *spéciale de* $\mathrm{S_r}$ *lorsque* $\mathrm{r} \leq \mathrm{n-p+1}$ *sera*

$$2p-2-n+(r+1)(n-p+1-r)+r(r+2)+3p-3$$
$$=r(n+1)-(r-4)(p-1).$$

En comparant ce nombre avec celui des γ_p^n générales de S_r (n° 3) on conclut que: *pour* $\mathrm{r+p} \leq \mathrm{n} \leq 2\mathrm{p}-2$ *une* $\gamma_\mathrm{p}^\mathrm{n}$ *de* $\mathrm{S_r}$ *doit satisfaire à* $\mathrm{n-r-p+1}$ *conditions pour devenir spéciale.*

Remarquons enfin que pour l'existence de courbes γ_p^n spéciales appartenant à des espaces S_r supérieurs à S_{n-p+1} la limite supérieure de r, lorsque les modules sont généraux, est donnée par la condition (3).

---

(10) VERONESE, loc. cit., p. 214.

Usage des surfaces réglées pour l'étude des courbes. — Sur les cônes algébriques.

6. Nous allons nous servir de quelques-uns des résultats qui précèdent pour en retrouver d'autres et pour établir des propositions nouvelles par une méthode féconde plus sinthétique que celle dont nous avons fait usage jusqu'ici.

Cette méthode consiste à employer pour l'étude de la correspondance entre deux courbes algébriques la surface réglée des droites joignant les points correspondants, surface qui, lorsque la correspondance est uniforme, a evidemment pour genre celui des deux courbes et pour ordre la somme des ordres de celles-ci diminuée du nombre des points qui coincident avec leurs correspondants [11]. Cette surface appartient au même espace que l'ensemble des deux courbes.

Soient A et B deux courbes d'ordre n et genre p normales non spéciales appartenant respectivement à deux S_{n-p} que nous nommerons α, β, et supposons qu'il y ait entre les points de ces courbes une correspondance uniforme douée de cette particularité: qu'au groupe de n points de A situés sur un certain S_{n-p-1} corresponde un groupe de n points de B situés de même sur un S_{n-p-1}. Supposons (ce que l'on peut toujours obtenir) que α et β n'aient pas de points communs, de sorte qu'ils appartiendront à un $S_{2n-2p+1}$, et considérons la surface réglée lieu des droites joignant les points correspondants des deux courbes: cette surface sera d'ordre $2n$, genre p et appartiendra à $S_{2n-2p+1}$. Les deux groupes correspondants considérés sur A et B, situés sur deux S_{n-p-1}, donneront n génératrices de cette surface situées sur un $S_{2n-2p-1}$: que l'on même par celui-ci un S_{2n-2p} différent des deux qui le joignent respectivement à α et β. Il coupera encore la surface réglée en une courbe irréductible de l'ordre n et de genre p. Cette courbe ne peut pas appartenir à un espace inférieur à S_{n-p}, car autrement l'espace joignant celui-ci à α contiendrait la surface réglée et par suite aussi β et aurait moins de $2n - 2p + 1$ dimensions. Elle ne peut non plus (lorsque $n \leq 2p - 2$) appartenir à un espace supérieur à S_{n-p}, car autrement elle serait spéciale: or chaque groupe de n points de A

[11] L'idée de se servir de cette surface réglée (dans les recherches relatives à l'espace ordinaire) n'est pas nouvelle. Il suffit de rappeler, par exemple, la démonstration donnée par M. CREMONA dans ses *Preliminari* [Opere, II, p. 328]. de l'égalité des genres de deux courbes planes en correspondance uniforme.

situés sur un S_{n-p-1} donne n génératrices de la surface réglée situées avec β dans un S_{2n-2p} qui couperait cette courbe spéciale en un groupe spécial, et par suite aussi le groupe correspondant de A, c'est-à-dire chaque groupe de A situé sur un S_{n-p-1}, serait spécial, ou, pour parler plus exactement, la série des groupes de n points de A placés sur des S_{n-p-1} serait spéciale, tandis que nous avons supposé que A ne soit pas spéciale. Donc la courbe d'ordre n que nous avons obtenue n'est pas spéciale et appartient à un S_{n-p}, qui ne pourra pas avoir de points communs avec α ou β. Cela posé, comme cet S_{n-p} est rencontré par chaque droite joignant deux points correspondants de A et B, on voit que la correspondance entre ces deux courbes peut être considérée comme provenant d'une projection faite par cet S_{n-p} des deux espaces α, β l'un sur l'autre. Donc :

Si deux courbes normales non spéciales d'ordre n *et genre* p *sont dans une correspondance uniforme telle qu'à un groupe particulier de* n *points de l'une situé sur un* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p-1}}$ *corresponde un groupe semblable de l'autre, ce même fait arrivera pour chaque groupe de* n *points d'un* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-p-1}}$ *de chaque courbe et la correspondance uniforme sera projective.*

7. Pour les courbes spéciales on pourrait établir de la même manière une proposition analogue. Mais nous nous bornerons à appliquer cette méthode pour prouver le cas particulier suivant : *Si entre deux courbes spéciales de genre* p *et ordre* 2p — 2 *appartenant à des espaces de* p — 1 *dimensions il y a une correspondance uniforme, cette correspondance sera projective.*

En effet nommons A, B les deux courbes de genre p et ordre $2p-2$ en correspondance uniforme, et α, β les deux espaces à $p-1$ dimensions auxquels elles appartiennent. Après avoir rendu indépendants ces espaces, considérons la surface réglée F^{4p-4} de genre p engendrée par les deux courbes : elle appartiendra à l'espace S_{2p-1} joignant α et β. Dans α menons par $p-1$ points *indépendants* de A un S_{p-2}, qui rencontrera encore cette courbe en $p-1$ points : par les génératrices qui sortent de ceux-ci et par cet S_{p-2} on pourra mener un S_{2p-2} qui ne contienne ni α ni β : alors cet S_{2p-2} coupera F outre que dans ces $p-1$ génératrices et éventuellement en d'autres, en une courbe (qui ne peut pas être multiple, car si F avait des points multiples, d'où sortiraient plusieurs génératrices, α et β auraient des points communs) irréductible de genre p dont l'ordre, ne pouvant descendre au-dessous de $2p-2$ (car autrement elle engendrerait avec A^{2p-2} une surface réglée d'ordre inférieur à $4p-4$), soit représenté avec $2p-2+x$, où $0 \leq x \leq p-1$. Cette courbe

γ_p^{2p-2+x} s'il était $x > 0$ devrait appartenir à un $S_{p-2+x-i}$ où $i \geq 0$; et comme elle engendre avec A^{2p-2} la F^{4p-4}, elle devrait couper A en x points qui seraient dans le groupe de $p-1$ points indépendants de A dont nous sommes partis, et par suite indépendants entre eux. Mais alors l'$S_{p-2+x-i}$ de cette courbe ayant communs avec α_{p-1} x points indépendants au moins, se trouverait avec celui-ci dans un $S_{(p-1)+(p-2+x-i)+1-x}$, c. à. d. dans un S_{2p-2-i}, et par suite F^{4p-4} n'appartiendrait pas à S_{2p-1}. Donc il faut que $x = 0$, c. à d. que l'S_{2p-2} que nous avions mené par $p-1$ génératrices en contienne encore d'autres $p-1$ et coupe F^{4p-4} en une nouvelle C_p^{2p-2} appartenant à un S_{p-1}. Comme celui-ci sera indépendant de α_{p-1}, β_{p-1} on voit que A^{2p-2} et B^{2p-2} seront projections l'une de l'autre faite par cet S_{p-1}. Ainsi notre proposition est prouvée.

8. Pour la considération des courbes non spéciales et non normales de genre p et ordre n nous partirons de ce fait : qu'elles sont projections de courbes normales de même genre et ordre.

Si une courbe non spéciale γ_p^n *appartenant à un* S_r *où* $r < n - p$ *est la projection de deux courbes normales, la correspondance entre les points de celles-ci qui donnent une même projection sur* γ *sera projective.* En effet (n° 6) elle sera telle que les groupes de n points des deux courbes normales situés sur les S_{n-p-1} passant respectivement par les axes (ou centres) de projection se correspondront.

De là il suit que les groupes de n points de l'une ou de l'autre parmi ces courbes normales situés sur un même S_{n-p-1} donneront comme projection sur γ_p^n une même série linéaire ∞^{n-p} de groupes de n points. Nous nommerons *groupes associés* de γ_p^n ces groupes de n points ; et pour une courbe normale non spéciale de genre p et ordre n nous nommerons ainsi les groupes de n points situés sur des S_{n-p-1}. Donc : *la* ∞^{n-p} *linéaire des groupes associés d'une courbe non spéciale de genre* p *et ordre* n *se projette dans la série des groupes associés de la courbe de même genre et ordre qui est la projection de celle-là dans un espace quelconque.*

Nous rencontrerons plus loin des correspondances uniformes entre deux courbes non spéciales de genre p et ordre n telles qu'à chaque groupe associé de l'une correspond un groupe associé de l'autre. Nous nommerons *singulière* une telle correspondance ; et il suit alors de ce qui précède et du n° 6 que : *Deux courbes non spéciales de genre* p *et ordre* n *qui soient en correspondance singulière sont les projections de deux courbes normales en correspondance projective ; et réciproquement. — Si la correspondance uniforme entre deux* *courbes non spéciales de genre* p *et ordre* n *est telle qu'à un groupe associé de* n *points de l'une corresponde un groupe associé de l'autre, le même fait arrivera toujours et la correspondance sera singulière.*

On peut donner à la définition des groupes associés d'une courbe non spéciale la forme suivante qui s'étend aux courbes spéciales: Un *groupe associé* de n points d'une γ_p^n *quelconque* est un groupe qui avec la série des groupes de n points sections linéaires de la courbe appartienne à une même série linéaire de groupes de n points.

Deux groupes resp. de k et $n-k$ points d'une courbe quelconque d'ordre n seront nommés *résidus* l'un de l'autre, lorsqu'ils forment, pris ensemble, un groupe associé de n points.

9. De la proposition donnée au commencement du nº 8 on tire des résultats précis sur les courbes normales qui donnent pour projection une même γ_p^n non spéciale appartenant à un S_r où $r < n-p$. En effet elle prouve que si γ est la projection d'une certaine courbe normale A_p^n, appartenant à un $S_{n-p}\,\alpha$ qui passe par S_r, faite par un $R_{n-p-r-1}$ comme axe de projection, *toutes* les autres courbes normales qui ont aussi γ pour projection s'obtiendront de la manière suivante. Que l'on prenne dans un $S_{n-p}\,\beta$ passant par S_r (différent ou non de α) un $S_{n-p-r-1}$ ne rencontrant pas S_r, et que l'on détermine entre α et β une homographie dans laquelle se correspondent l'$R_{n-p-r-1}$ et l'$S_{n-p-r-1}$ et en outre les formes ayant ces espaces pour soutiens et qui projettent les mêmes éléments de S_r: chaque telle homographie transformera A_p^n en une courbe normale ayant γ pour projection faite par l'$S_{n-p-r-1}$ donné sur l'S_r. Or une homographie satisfaisant aux dites conditions est parfaitement déterminée en donnant $n-p+1$ couples de points correspondants sur autant de couples de S_{n-p-r} correspondants des deux formes ayant pour soutiens les $R_{n-p-r-1}$, $S_{n-p-r-1}$. Donc nous concluons:

Une γ_p^n *non spéciale de* S_r, *où* $r < n-p$, *est la projection de* $\infty^{(n-p+1)(n-p-r)}$ *courbes normales de même genre et ordre faite par un* $S_{n-p-r-1}$ *donné arbitrairement (ne coupant pas* S_r*). En d'autres termes le* $S_{n-p-r-1}$ — *cône* [12] *qui projette* γ_p^n *de cet* $S_{n-p-r-1}$ *contient une infinité de* C_p^n *normales telle que par* $n-p+1$ *points situés sur au-*

---

[12] M. VERONESE appelle S_i — cône un cône ayant pour *arête* ou *soutien* (ou *sommet*) un S_i, c'est-à-dire engendré par des S_{i+1} (*espaces générateurs*) passant par cet S_i.

tant de S_{n-p-r} *générateurs différents du cône il en passe en général une bien déterminée* (13).

10. Une proposition analogue relative aux cônes dont les courbes section linéaires sont spéciales (cônes que nous nommerons *spéciaux*) peut être obtenue d'une façon tout-à-fait semblable. Mais nous préférons y parvenir en appliquant un nouveau raisonnement qui servirait aussi pour établir le théorème précédent.

Considérons un S_i — cône à $i+2$ dimensions qui appartienne à un S_{i+r+1} et qui soit coupé par un S_r indépendant du soutien S_i en une γ_p^n spéciale: si l'on a $r < n-p+1$, on pourra obtenir ce cône comme projection d'un cône analogue pour lequel $r=n-p+1$, c. à. d. d'un cône appartenant à $S_{n-p+i+2}$. En effet que l'on mène par l' S_{i+r+1} un $S_{n-p+i+2}$ et dans celui-ci par l' S_r un S_{n-p+1}: la γ_p^n sera la projection d'une Γ_p^n appartenant à cet S_{n-p+1} faite par un S_{n-p-r} de celui-ci (n° 5) et par suite aussi par un $S_{n-p-r+i+1}$ de $S_{n-p+i+2}$. Sur l'espace joignant cet $S_{n-p-r+i+1}$ à l' S_i prenons un autre S_i indépendant de l' S_{n-p+1}: le cône qui a cet S_i pour soutien et qui projette la Γ_p^n aura lui-même pour projection faite de l' $S_{n-p-r+i+1}$ sur S_{i+r+1} le premier cône. L'étude de celui-ci se réduit donc à celui de l' S_i — cône appartenant à $S_{n-p+i+2}$.

Or sur ce cône toutes les sections faites avec des S_{n-p+1} seront des Γ_p^n appartenant à ces espaces et on peut donner pour déterminer un S_{n-p+1} $n-p+2$ points. Donc:

Un S_i-*cône de genre* p *et ordre* $n \leq 2p-2$ *spécial* (*c'est-à-dire dont chaque courbe section linéaire soit spéciale*) *appartenant à un* $S_{n-p+i+2}$ *ou à un espace inférieur contient* $\infty^{(i+1)(n-p+2)}$ *courbes de l'ordre* n *en sorte que par* $n-p+2$ *points donnés arbitrairement sur autant de* S_{i+1} *générateurs il en passe en général une bien déterminée. — Toutefois le cône peut être si particulier qu'il contienne un nombre plus grand de ces courbes* (*lorsqu'une courbe de section linéaire a la série de ses groupes associés contenue dans une* g_n^s *où* $s > n-p+1$; *on*

---

(13) Dans le n° 6 de ma Note citée: *Ricerche sulle rigate ellittiche* ce théorème était énoncé incomplètement. J'ajoute, à propos de cette Note, que dans ce même n° 6 à la ligne 13 il faut remplacer S_{n-2} par S_{n-3}, et dans le raisonnement de la 2e partie il faudrait faire quelques modifications. Enfin dans le n° 19, où l'on détermine les courbes elliptiques d'ordre n placées sur une surface réglée elliptique de même ordre, on exclut tacitement celles qui rencontrent chaque génératrice en un seul point: on devrait ajouter que ces courbes forment sur la surface réglée une ∞^n quadratique.

voit alors que par s + 1 *points quelconques du cône il passe en général une courbe d'ordre* n *bien déterminée* [14].

11. Les propositions des n^os précédents nous donnent comme cas particuliers celles qui suivent, relatives aux cônes ordinaires (c. à. d. S_0-cônes) algébriques.

Un cône ordinaire de genre p *et ordre* n *contient une infinité de courbes d'ordre* n *telle que par* n — p + 1 *points quelconques du cône il en passe en général une seule. Cependant lorsque* n ≤ 2p — 2 *si le cône est spécial, c'est-à-dire si le cône projette une courbe spéciale d'ordre* n *(plane ou gauche), toutes ses courbes d'ordre* n *seront spéciales, et par* n — p + 2 *points il en passera en général une seule. Mais si les groupes associés de l'une (et par suite de chacune) des courbes d'ordre* n *du cône forment une* g_n^s *où* s > n — p + 1, *ce qui est un cas particulier, on pourra donner arbitrairement sur le cône* s + 1 *points qui détermineront parfaitement une courbe d'ordre* n *du cône. — En tout cas deux courbes d'ordre* n *du cône se coupent toujours suivant* n *points associés pour toutes les deux.*

12. Pour les cônes ordinaires *non spéciaux* de genre p et ordre n, il est facile de voir qu'ils contiennent une infinité de courbes d'ordre $n+1$ passant par le sommet (qui, comme l'on voit tout de suite, ne pourront pas être spéciales). Il suffit évidemment de considérer ceux *normaux*, c. à. d. appartenant à S_{n-p+1}, car les autres sont des projections de ceux-ci. Or dans S_{n-p+1} les C_p^{n+1} qui passent par un point donné sont $\infty^{(n-p+1)(n-p+3)+4p-3-(n-p)}$: les cônes qui les projettent de ce point sont des cônes de genre p et ordre n ; mais

---

[14] Les résultats des n^os 9 et 10 permettent de retrouver les nombres des γ_p^n situées dans un S_r. En nous bornant au cas des courbes non spéciales nous voyons en posant $r=2$ au n⁰ 9 que chaque γ_p^n d'un plan donné est la projection de $\infty^{(n-p+1)(n-p-2)}$ courbes normales non spéciales faite par un S_{n-p-3} fixe. Mais les γ_p^n du plan sont évidemment ∞^{3n+p-1} : donc les constantes des C_p^n normales de S_{n-p} sont

$$(n-p+1)(n-p-2)+3n+p-1\,.$$

Et le nombre des constantes des γ_p^n de S_r, puisque chacune de celles-ci s'obtient de $\infty^{(n-p+1)(n-p-r)}$ de ces courbes normales, sera égal à celui-là diminué de $(n-p+1)(n-p-r)$, c. à. d.

$$(r-2)(n-p+1)+3n+p-1=(r+1)n-(r-3)(p-1)\,;$$

ce qui est justement le nombre trouvé au n⁰ 3.

comme les cônes de genre p et ordre n ayant ce point pour sommet sont $\infty^{(n-p)(n-p+2)+4p-3}$, il s'ensuit que chacun de ces cônes projette une infinité de C_p^{n+1} donnée par ∞^{n-p+3}.

Cependant pour que ce raisonnement, fondé sur le calcul des constantes, soit parfaitement rigoureux, il faut encore prouver que si un cône quelconque de genre p et ordre n contient une C_p^{n+1} il ne s'ensuit pas qu'il en contienne une infinité supérieure à ∞^{n-p+3}. Or un tel cône ne peut pas contenir plus que ∞^{n-p+3} C_p^{n+1} : car si deux de ses C_p^{n+1} ont une même génératrice pour tangente dans le sommet, la correspondance uniforme entre leurs points placés sur les différentes génératrices sera telle qu'aux $n+1$ points d'intersection de l'une des deux courbes avec un S_{n-p} passant par le sommet correspondront dans l'autre $n+1$ points du même S_{n-p}, et par suite elle sera projective, c. à. d. elle sera une *homologie* quelconque ayant le sommet du cône pour centre. Ces homologies de S_{n-p+1} sont ∞^{n-p+2} et il y aura en conséquence sur le cône ∞^{n-p+2} C_p^{n+1} ayant une même génératrice pour tangente dans le sommet (l'une de ces courbes étant connue, une autre est parfaitement déterminée par $n-p+2$ points quelconques du cône par lesquels elle doive passer, car ces points et leurs correspondants dans la courbe connue détermineront parfaitement l'homologie qui transforme celle-ci dans la courbe cherchée); donc en variant cette génératrice on ne pourra pas obtenir plus de ∞^{n-p+3} C_p^{n+1} sur le cône. En concluant :

Chaque cône ordinaire de genre p , *ordre* n , *non spécial contient* $\infty^{\mathrm{n-p+3}}$ *courbes (non spéciales) d'ordre* n + 1 : *une de ces courbes est parfaitement déterminée si l'on donne la génératrice du cône qui lui est tangente dans le sommet de celui-ci et* n − p + 2 *quelconques de ses points.*

Il faut remarquer que tandis que la ∞^{n-p+1} de courbes d'ordre n du cône est *linéaire* (n° 11), la ∞^{n-p+3} des courbes d'ordre $n+1$ ne l'est pas, si $p>0$, c. à. d. par $n-p+3$ points quelconques du cône il passe un certain nombre >1 de ces courbes d'ordre $n+1$. Pour trouver ce nombre on peut, en projetant le cône normal par $n-p-2$ parmi ces points sur S_3, se réduire à chercher combien de courbes d'ordre $p+3$ placées dans le cône de genre p et ordre $p+2$ de l'espace ordinaire passent par 5 points donnés arbitrairement sur le cône : donc ce nombre ne dépend pas de n, mais seulement de p. Or si $p=0$, on voit tout de suite que ce nombre est 1, car par 5 points quelconques d'un cône quadrique et par le sommet on peut mener une seule cubique, et celle-ci sera contenue dans le cône. Si $p=1$ ou $=2$, remarquons que les courbes gauches de genre p et ordre $p+3$ sont contenues dans des quadriques. Pour $p=1$ on aura sur le cône cubique les courbes biquadratiques cherchées au moyen des quadriques passant par les 5 points donnés et par une génératrice arbitraire du cône. Comme les quadriques passant par ces points et cette génératrice donnée, passent aussi par une cubique déterminée qui rencontre ailleurs le cône en $3 \cdot 3 - 5 - 2 = 2$ points, il s'ensuit qu'il y en aura seulement 2 qui coupent encore le cône en une seconde génératrice et qui par suite donnent en outre des courbes biquadratiques passant par les 5 points donnés. Pour $p=2$ les courbes du 5^e ordre dans le cône du 4^e ordre de genre 2 sont données par des quadriques passant par la génératrice double du cône et par les 5 points donnés, et en conséquence encore par une cubique déterminée qui rencontre ailleurs le cône en $3 \cdot 4 - 5 - 2 \cdot 2 = 3$ points. Il y aura seulement 3 de ces quadriques qui coupent le cône encore en une génératrice et par suite aussi en une courbe du 5^e ordre. Donc: *Par* $\mathrm{n}-\mathrm{p}+3$ *points quelconques d'un cône non spécial de genre* p *et ordre* n *il passe* $\mathrm{p}+1$ *courbes d'ordre* $\mathrm{n}+1$ *contenues dans le cône, lorsque* $\mathrm{p}=0, 1, 2$ (15).

Sur certaines variétés contenant les courbes normales. Courbes hyperelliptiques et autres courbes particulières.

13. Une courbe normale non spéciale C_p^n de S_{n-p} peut-elle avoir un point multiple? En supposant l'existence d'un tel point sur une telle courbe et en la projetant de ce point sur S_{n-p-1} on aurait dans cet espace, si la projection était uniforme, une courbe de genre p et ordre inférieur à $n-1$, qui lui appartiendrait, ce qui est impossible si $n > 2p$. Et si la projection n'était pas uniforme, elle donnerait une courbe d'ordre $\leq (n-2)/2$ qui devrait appartenir à S_{n-p-1}, ce qui est impossible si $n > 2p$, puisque alors cet ordre serait moindre que $n-p-1$. Donc *une courbe normale d'ordre* $\mathrm{n} > 2\mathrm{p}$ *ne peut pas avoir de points multiples.*

Mais *une* $\mathrm{C}_\mathrm{p}^{2\mathrm{p}}$ *de* S_p *peut bien avoir un point double*: comme alors les S_{p-1} passant par celui-ci déterminent sur la courbe sa série g_{2p-2}^{p-1}, on voit qu'il faut pour que la C_p^{2p} ait un point double que la g_{2p}^p de f_p^ν dont elle dérive contienne la g_{2p-2}^{p-1}, en ajoutant à celle-ci

(15) Cette proposition a-t-elle lieu, quel que soit p? [Si veda il n^0 19 della Memoria XI in questo volume (N. d. R.)].

deux points fixes (correspondants du point double de la C_p^{2p}). Une telle g_{2p}^p sur f_p^ν sera donnée par les ∞^p courbes adjointes $\varphi^{\nu-2}$ qui passent par $\nu - 2$ points fixes de f situés sur une droite (les 2 autres points d'intersection de f avec cette droite correspondront au point double) [16].

De même *une* C_p^{2p-1} *de* S_{p-1} *peut avoir un point triple ; une* C_p^{2p-2} (*non spéciale*) *de* S_{p-2} *peut avoir un point quadruple* ; etc. etc. Nous rencontrerons plus loin (n° 23) ces espèces de courbes.

14. S'il y avait sur une courbe normale C_p^n de S_{n-p} un groupe de $i < n - p$ points qui appartenait à un S_k où $k < i - 1$, et si la projection de la courbe faite de cet espace sur un $S_{n-p-k-1}$ était uniforme, on aurait pour projection une courbe d'ordre $n - i$, genre p. Or si $n - i > 2p - 2$, c'est-à-dire si $i < n - 2p + 2$, cette courbe se trouverait sur un S_{n-p-i} et par suite la C_p^n serait sur l'$S_{n-p-i+k+1}$ qui le projetterait et n'appartiendrait pas à S_{n-p}. D'ailleurs, si i satisfait à cette condition, on voit facilement que la projection de la C_p^n est nécéssairement uniforme (par un raisonnement semblable à celui du n⁰ précédent). Donc : *si* $0 < i < n - 2p + 2$, *un groupe quelconque de* i *points de* C_p^n *se compose toujours de points indépendants, c. à d. appartient toujours à un* S_{i-1}. — Un cas particulier de cette proposition se trouve déjà au n° précédent.

15. Considérons sur la C_p^n normale non spéciale une série linéaire simplement infinie de groupes de i points, c'est-à-dire une g_i^1, et supposons que les différents groupes appartiennent en général à des S_{i-1}. Alors ces espaces formeront une variété simplement infinie, c. à. d. une $S_{i-1}—F_i$, qui sera rationnelle puisque la série des groupes est linéaire. On trouve aisément l'ordre de cette variété par un raisonnement qui pourra être appliqué dans plusieurs questions semblables. Rappelons que les $S_{i-1} — F_i^g$ rationnelles d'ordre g appartiennent toujours à S_{g+i-1}, ou à des espaces inférieurs, et que dans ce dernier cas elles sont projections de celles appartenant à S_{g+i-1} [17].

---

[16] M. NÖTHER (*Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen,* Math. Ann., XVII) a déjà remarqué l'invariantivité des groupes de $2p$ points de f déterminés par de telles $\varphi^{\nu-2}$ dans les transformations uniformes rationnelles de f, et comment c'est de cela que dépend l'entrée de ces courbes adjointes dans les intégrales abéliennes de 3e espèce.

[17] Voir pour les propriétés de ces variétés rationnelles dont nous ferons usage ici et dans la suite, le Mémoire cité de M. VERONESE, ma Note aussi citée

Donc comme notre variété appartient à S_{n-p} (puisque C_p^n appartient à cet espace) elle sera au moins de l'ordre $n-p-i+1$; et d'ailleurs elle ne pourra pas être d'un ordre g supérieur à ce nombre, car autrement elle serait la projection d'une $S_{i-1} - F_i^g$ appartenant à un espace supérieur à S_{n-p} et par suite C_p^n serait aussi la projection d'une courbe de même ordre et genre située sur cette $S_{i-1} - F_i^g$ et appartenant par suite aussi a cet espace supérieur. Donc: *les* S_{i-1} *auxquels appartiennent les groupes de* i *points d'une* g_i^1 *d'une courbe non spéciale quelconque de genre* p *et ordre* n *forment une* $\mathrm{S}_{i-1} - \mathrm{F}_i^{n-p-i+1}$ *rationnelle* (18).

16. En considérant encore la C_p^n normale de S_{n-p}, un S_{n-p-1} quelconque mené par l'un des S_{i-1} de notre variété la coupe encore en une $S_{i-2} - F_{i-1}^{n-p-i}$ rationnelle, qui pourra d'ailleurs se décomposer en un certain nombre de S_{i-1} et une $S_{i-2} - F_{i-1}$ irréductible, mais qui appartiendra toujours à un S_{n-p-2} et sera rencontrée par C_p^n en $n-i$ points. Chacun des S_{i-1} rencontrera cette $S_{i-2} - F_{i-1}$ irréductible en un S_{i-2} et sera par suite avec l'S_{n-p-2} dans un S_{n-p-1}. Donc: *Si sur une courbe quelconque non spéciale de genre* p *et ordre* n *il y a une* g_i^1 *dont chaque groupe appartienne en général à un* S_{i-1}, *les* ∞^{n-p-i} *groupes de* $\mathrm{n}-\mathrm{i}$ *points résiduels à l'un quelconque de ces groupes de* i *points sont aussi les groupes résiduels de tous les autres et se trouvent resp. sur des* S_{n-p-2}. Pour deux telles séries de groupes de points, g_i^1 et g_{n-i}^{n-p-i}, on dira que la seconde est *résiduelle* de la première.

17. On construit facilement au moyen du théorème précédent des g_i^1 sur C_p^n si $i \geq p+1$. Une telle série sera déterminée sur la courbe par les S_{n-p-1} d'un faisceau dont le soutien S_{n-p-2} soit mené

---

sur les surfaces réglées rationnelles et enfin mes deux travaux: *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, XIX), *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani* (même Recueil, XXI).

(18) Par le même raisonnement on arrive, *pour les courbes normales,* à cette proposition plus générale: *si sur une courbe normale non spéciale de genre* p *et ordre* n *il y a une* g_i^1 *dont les groupes de* i *points appartiennent en général à des* S_k $(\mathrm{k} < \mathrm{i})$, *le lieu de ces* S_k *est une* $\mathrm{S}_k - \mathrm{F}_{k+1}^{n-p-k}$ *rationnelle normale.*

On verra dans une Note qui sera bientôt publiée une relation beaucoup plus générale entre les ordres et les genres d'une variété quelconque $S_{i-1} - F_i$ et d'une courbe placée sur elle. (Juillet 1887). [V. la Nota IX in questo vol. (N. d. R.)].

par $n - i$ points arbitraires de C_p^n. — Si en outre $i \leq n - p$, on pourra choisir arbitrairement un groupe de la série.

Si $i = n - p$, les S_{n-p-1} contenant les groupes d'une g_{n-p}^1 forment (n° 15) un faisceau dont la base est un S_{n-p-2} passant par p points de la courbe.

Si $i = n - p - 1$, les S_{n-p-2} auxquels appartiennent les groupes de la g_{n-p-1}^1 forment (n° 15) une $S_{n-p-2} - F_{n-p-1}^2$, c'est-à-dire sont les espaces S_{n-p-2} générateurs de l'un système d'un cône quadrique ayant un S_{n-p-4} pour soutien et projetant une quadrique de l'espace ordinaire : les espaces S_{n-p-2} générateurs de l'autre système déterminent sur la courbe une série ∞^1 de groupes de $p + 1$ points qui est justement la g_{p+1}^1 résiduelle de la g_{n-p-1}^1.

Donc si $n - p - 1 \geq p + 1$, c. à d. $n \geq 2p + 2$, on a ainsi *une infinité de* S_{n-p-4} - *cônes quadriques contenant la courbe* C_p^n *normale de* S_{n-p}.

En projetant sur S_3 par le soutien S_{n-p-4} de l'un de ces cônes on voit que C_p^n se projette suivant une courbe d'ordre n, genre p située sur une quadrique ordinaire et rencontrant les génératrices des deux systèmes resp. en $p + 1$ et $n - p - 1$ points. Si avant de faire cette projection on abaisse l'ordre de C_p^n à $2p + 2$ (au moyen d'une projection par $n - 2p - 2$ de ses points sur un S_{p+2}) on arrive ainsi par le simple usage de projections à une *représentation des courbes de genre* p *dans une courbe plane d'ordre* $2\mathrm{p} + 2$ *douée de deux points* $(\mathrm{p} + 1)$ *ples* (*et d'autres* $\mathrm{p}^2 - \mathrm{p}$ *points doubles*) [19].

18. Dans une courbe de genre $p > 1$ *générale*, c'est-à-dire dont les $3p-3$ modules aient des valeurs quelconques, il n'y a pas de séries linéaires simplement infinies de [groupes de] i points, c. à. d. des g_i^1, si $i < E(p + 3)/2$ (comme il suit de la condition (4) du n° 3 en y posant $r = 1$, $n = i$). Ainsi il n'y a pas en général (si $p > 2$) de séries linéaires simplement infinies de couples de points et s'il y en a on nomme la courbe *hyperelliptique.* Si $p > 4$, il faut aussi une particularisation pour que la courbe ait une ∞^1 linéaire de ternes de points;

---

[19] Si par $n - 2p - 2$ points fixes d'une C_p^n normale $(n > 2p + 2)$ on projette les S_p auxquels appartiennent les groupes de $p + 1$ points d'une g_{p+1}^1, c. à. d. la $S_p - F_{p+1}^{n-2p}$ qu'ils forment, on aura une $S_{n-p-2} - F_{n-p-1}^2$ qui sera un S_{n-p-4} - cône, dont le soutien S_{n-p-4} passe par les $n - 2p - 2$ points fixes. En projetant la C_p^n par cet S_{n-p-4} sur S_3 on obtient directement une courbe de genre p et ordre $2p + 2$ placée sur une quadrique ordinaire et rencontrant les génératrices des deux systèmes en $p + 1$ points.

et ainsi de suite. La proposition générale du n⁰ 15 nous donne déjà en posant $i = 2, 3$ et en projetant dans l'espace ordinaire ou sur un plan:

Dans une courbe de genre p *et ordre* n *hyperelliptique les droites joignant les points conjugués forment si la courbe est gauche* ($\mathrm{n} \geq \mathrm{p} + 3$) *une surface réglée rationnelle d'ordre* $\mathrm{n} - \mathrm{p} - 1$, *et si la courbe est plane* ($\mathrm{n} \geq \mathrm{p} + 2$) *elles enveloppent une courbe rationnelle de classe* $\mathrm{n} - \mathrm{p} - 1$ [20].

Lorsqu'une courbe de genre p *et ordre* n *contient une série linéaire simplement infinie de ternes de points, les plans de ces ternes si la courbe est gauche enveloppent une développable rationnelle de classe* $\mathrm{n} - \mathrm{p} - 2$, *et si la courbe est plane il y a* $\mathrm{n} - \mathrm{p} - 2$ *droites contenant chacune une terne.*

Il faut remarquer, quant au premier de ces énoncés, qu'*une courbe hyperelliptique* (*de genre* p *et ordre* n *de* $\mathrm{S_r}$) *ne peut pas être spéciale* (de sorte qu'on a toujours $r \leq n - p$, et que cette courbe est normale si elle appartient à S_{n-p}). En effet si elle était spéciale, elle serait donnée (n⁰ 1) par des courbes adjointes d'ordre $\nu - 3$ de f_p^ν et le système de ces $\varphi^{\nu-3}$ lorsque f est hyperelliptique est tel que chaque courbe passant par un point de f passe aussi par son conjugué (B. N. p. 286), ce qui rend impossible la correspondance uniforme entre la courbe cherchée et f (v. à la fin du n⁰ 1).

Quant au second énoncé de ce n⁰ la supposition qu'on y fait que les ternes de points ne soient pas toutes sur des droites exclut déjà la possibilité que la courbe soit spéciale. En effet on a la proposition plus générale suivante: *Si sur une courbe spéciale quelconque* $\gamma_\mathrm{p}^\mathrm{n}$ *il y a une* $\mathrm{g_i^1}$, *où* $\mathrm{i} \leq \mathrm{p}$, *les* i *points de chaque groupe de cette série ne sont pas indépendants entre eux, car ils se trouvent toujours sur un même* $\mathrm{S_{i-2}}$. Cette proposition est une conséquence du théorème de RIEMANN (v. n⁰ 2), car celui-ci établit que chaque groupe de l'image de notre g_i^1 de γ sur la f_p^ν plane est tel que le passage d'une

---

[20] Cette proposition sur une courbe plane hyperelliptique d'ordre n genre p est connue: voir, p. e. HUMBERT: *Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algebriques* (Journal de Math., (4) II, p. 316). Si dans un faisceau de droites du plan de cette courbe l'on fait correspondre deux droites qui aillent à deux points conjugués on en tire, en appliquant dans ce faisceau le principe de correspondance, l'autre proposition bien connue: *sur une courbe hyperelliptique de genre* p *il y a* $2\mathrm{p} + 2$ *points conjugués chacun à soi-même* (*points de diramation*). — Pour le résultat relatif aux courbes gauches hyperelliptiques voir le n⁰ 48, II du Mémoire de M. DE PAOLIS: *Le trasformazioni doppie dello spazio* (Mem. Acc. Lincei, (4) 1 (1885)).

$\varphi^{\nu-3}$ par $i-1$ de ses points entraine aussi le passage de cette courbe adjointe par le point restant; d'où il suit, en traduisant cela sur γ, (si S_r est l'espace auquel appartient cette courbe) que tous les S_{r-1} qui passent par $i-1$ points d'un groupe de notre g_i^1 de γ passent aussi par le point restant, ce qui prouve évidemment notre proposition.

19. Au moyen du résultat du n^0 15 nous pouvons obtenir une représentation particulière des courbes d'espèces remarquables que nous avons nommées, et plus en général des courbes contenant une g_i^1 où $i \leq n-p$. Commençons, si $n-p = i\,E\,(n-p)/i + k$, où $k < i$, par projeter la C_p^n non spéciale sur un S_{n-p-k} par l'S_{k-1} joignant k points quelconques [de C_p^n]. Nous aurons ainsi une courbe normale de genre p, dont nous nommerons encore n l'ordre (inférieur de k au précédent) qui sera maintenant tel que $n-p$, nombre de dimensions de l'espace auquel la courbe appartient, est divisible par i. Les S_{i-1} joignant les groupes de i points de la g_i^1 forment une $S_{i-1}-F_i^{n-p-i+1}$. Pour avoir une projection uniforme de celle-ci sur un S_i, projetons-la par un $S_{n-p-i-1}$ contenant $(n-p)/i-1$ des S_{i-1} de cette variété. Un S_{n-p-1} projetant un quelconque des S_{i-1} coupera notre variété outre que dans cet S_{i-1} variable en une $S_{i-2}-F_{i-1}^{n-p-i}$ appartenant à un S_{n-p-2} et qui comprend les $(n-p)/i-1$ S_{i-1} fixes, mais contient aussi une partie irréductible rencontrée par tous les S_{i-1}, de sorte que le faisceau des S_{n-p-1} passant par cet S_{n-p-2} se composera des espaces qui projettent les différents S_{i-1} de notre variété. Donc sur S_i ces S_{i-1} se projettent suivant les S_{i-1} d'un faisceau. Notre C_p^n ayant $(n-p)/i-1$ groupes de i points, c. à. d. $n-p-i$ points, sur l'$S_{n-p-i-1}$ qui est axe de projection, et d'autres p encore, comme on voit tout de suite, sur l'S_{n-p-2}, sera projetée suivant une courbe de S_i de l'ordre $p+i$ ayant p points sur l'S_{i-2} axe du faisceau nommé de S_{i-1} et sur ces différents S_{i-1} les groupes de i points de la g_i^1 projection de celle de la C_p^n. Donc:

Les courbes de genre p *contenant une* g_i^1 *peuvent toujours (par voie de projections) être transformées en une courbe de* S_i *d'ordre* $p+i$ *avec un* S_{i-2} *qui la coupe en* p *points de sorte que les* S_{i-1} *passant par cet* S_{i-2} *donnent par leurs intersections variables avec la courbe cette série de groupes.*

En projetant encore cette courbe sur un plan par un S_{i-3} passant par $i-2$ des p points de l'S_{i-2} on a: *Chaque courbe de genre* p *douée d'une* g_i^1 *peut être transformée en une courbe plane d'ordre* $p+2$ *avec un point multiple suivant* $p-i+2$: *la* g_i^1 *étant alors donnée par les droites passant par ce point.* (Voir pour le cas de $i=2$, c. à. d. le cas hyperelliptique, B. N. p. 287).

20. Les propriétés connues des $S_{i-1}-F_i^{n-p-i+1}$ donnent facilement de nouvelles propriétés des courbes contenant une série g_i^1: la classification de ces variétés qui se fait suivant les ordres minima des courbes, surfaces réglées, etc., qu'elles contiennent donnerait, lorsque le nombre de ces g_i^1 est fini, et en particulier lorsque l'existence d'une telle série est une exception, une nouvelle distinction de ces courbes en espèces. Mais nous nous bornerons au cas le plus intéressant, celui de $i=2$, c. à d. des courbes hyperelliptiques.

Soit m l'ordre de la courbe minima dans la surface réglée rationnelle F_2^{n-p-1} des droites contenant les couples de points conjugués de la C_p^n hyperelliptique. Le nombre maximum de génératrices situées dans un S_{n-p-1} sera $n-p-m-1$ et les S_{n-p-1} passant par la C^m (en nombre de $\infty^{n-p-m-1}$ lorsqu'il y a une seule C^m, c. à. d. en exceptant le cas de $m=(n-p-1)/2$ où il y a ∞^1 C^m et par suite ce nombre devient ∞^{n-p-m}) contiennent en effet autant de génératrices, c. à. d. de couples de points conjugués. Donc

$$2(n-p-m-1)\leq n\,,\quad 2m\geq n-2p-2\,.$$

Ainsi, en nous servant aussi d'autres propriétés presque évidentes de la surface réglée :

Les courbes hyperelliptiques d'ordre n *et genre* p *se distinguent en espèces caractérisées par un nombre* m (*qui pour une courbe gauche est l'ordre de la courbe minima de la surface réglée rationnelle d'ordre* $n-p-1$ *du* n⁰ 18) *égal pour l'espèce la plus générale à* $E(n-p-1)/2$, *mais qui peut descendre jusqu'à* $E(n-1)/2-p$. *La propriété caractéristique d'une courbe correspondant à une certaine valeur de* m *est que le nombre maximum de couples de points conjugués qui peuvent entrer dans un groupe associé est* $n-p-m-1$ *et qu'il y a effectivement une infinité de groupes associés contenant chacun* $n-p-m-1$ *couples et* $2m+2p-n+2$ *autres points. — Ces groupes associés forment une* $\infty^{n-p-m-1}$ *et ces derniers points sont fixes, lorsque* $m<(n-p-1)/2$. *Alors* $n-p-m-1$ *couples quelconques de points conjugués appartiennent à un groupe associé bien déterminé ; et chaque groupe associé contenant* $m+1$ *couples en contient encore* $n-p-2m-2$, *c. à. d. est un groupe associé de la série considérée. Lorsque* $m=(n-p-1)/2$ *les groupes associés contenant chacun* $n-p-$

$-\mathrm{m}-1=(\mathrm{n}-\mathrm{p}-1)/2$ *couples sont* $\infty^{\mathrm{n}-\mathrm{p}-\mathrm{m}}$ *et ils se divisent en* ∞^1 *systèmes de* $\infty^{\mathrm{n}-\mathrm{p}-\mathrm{m}-1}$, *dont chacun embrasse des groupes associés comprenant* $(\mathrm{n}-\mathrm{p}-1)/2$ *couples variables et* $\mathrm{p}+1$ *points fixes. Dans ce cas* $(\mathrm{n}-\mathrm{p}-1)/2$ *couples quelconques se trouvent dans* ∞^1 *groupes associés, c. à d. dans un groupe de chacun des* ∞^1 *systèmes nommés* (21).

21. Cherchons maintenant si une courbe normale hyperelliptique peut être obtenue comme l'intersection de la surface réglée rationnelle qui la contient avec une variété quadratique.

Comme une C_p^n de S_{n-p}, où nous supposerons $n>2p-2$, est coupée par une M_{n-p-1}^2, ou, comme nous dirons aussi, par une *quadrique* de cet espace, en $2n$ points dont p sont déterminés en général par les autres, il s'ensuit que les quadriques passant par la C_p^n forment un système linéaire dont l'ordre d'infinité est

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)-(2n-p+1)=\frac{1}{2}[(n-p)^2-n-p-2]$$

pourvu que ce nombre ne soit pas négatif (22). Or ce nombre en effet reste toujours ≥ 0 dans l'hypothèse faite que $n>2p-2$ en excep-

(21) Pour $p=1$, en remarquant que sur une courbe elliptique il y a ∞^1 séries linéaires g_2^1 de couples de points, on retrouve ainsi des propositions connues (v. ma Note sur les courbes elliptiques à p. 296 du t. XXVII de ces Annales). Pour $p=2$, on trouve une distinction des courbes de genre 2 en deux espèces, à laquelle est aussi parvenu d'une façon fort différente M. HUMBERT à la p. 279 du Mémoire déjà cité.

(22) Ce raisonnement ne serait pas tout-à-fait complet; mais on parvient au même résultat, et même à d'autres beaucoup plus généraux sur le nombre des variétés d'un ordre quelconque passant par une courbe quelconque au moyen du même raisonnement, tout-à-fait rigoureux, dont se sert M. NÖTHER (*Raumcurven*, § 7) pour le cas des courbes gauches de l'espace ordinaire.

Pour une courbe spéciale normale Γ_p^{2p-2} de S_{p-1} on sait qu'elle est contenue dans $1/2\,(p-2)(p-3)$ quadriques indépendantes linéairement (on trouve cette proposition successivement dans la Note de M. H. WEBER, à la p. 35 du t. XIII de ces Annales, dans celle de M. KRAUS à p. 245 du t. XVI, et enfin, mais démontrée plus complètement et avec d'autres propositions plus générales, dans celle de M. NÖTHER déjà citée du t. XVII).

En particulier pour $p=5$ on voit que la courbe d'ordre 8 et genre 5 appartenant à S_4 est [en général] l'intersection complète de 3 quadriques. Réciproquement la courbe du 8e ordre qui dans S_4 est l'intersection de 3 quadriques quelconques est du genre 5 (v. WEBER, loc. cit., p. 44; et VERONESE, Mém. cité, p. 204). En considérant la courbe gauche spéciale de l'espace ordinaire d'ordre 8 et genre 5 (v. NÖTHER, *Raumcurven*, p. 97) comme projection de celle appartenant à S_4, c. à. d. de la base d'un réseau ∞^2 de quadriques de S_4 on en trouve immédiatetant toutefois pour $p=1$ le cas de $n=3$; pour $p=2$ celui de $n=4$; pour $p=3$, $n=5$ ou 6; pour $p=4$, $n=7$ (23).

Il nous faut aussi le nombre des quadriques de S_{n-p} passant par une surface réglée rationnelle normale F_2^{n-p-1}. Considérons sur cette surface une courbe minima C^m et l'une des $C^{n-p-m-1}$, qu'elle contient. Une quadrique contenant ces deux courbes coupe encore la surface réglée en général en $n-p-1$ génératrices: si donc on la force à passer par $n-p$ points quelconque de la surface et en conséquence par les $n-p$ génératrices contenant ces points, on la forcera à contenir la surface réglée. Donc par la surface réglée rationnelle normale F_2^{n-p-1} passe un système linéaire de quadriques dont l'ordre d'infinité est

$$\frac{1}{2}(n-p)(n-p+3)-(2m+1)-[2(n-p-m-1)+1]-(n-p)$$
$$=\frac{1}{2}[(n-p)^2-3(n-p)]=\frac{1}{2}(n-p)(n-p-3)\ (24).$$

Or soit dans S_{n-p} une C_p^n hyperelliptique et considérons le système des quadriques qui la contiennent et celui des quadriques qui contiennent la surface réglée F_2^{n-p-1} des droites joignant ses couples

---

ment une foule de propriétés. Ainsi les $\infty^2\, M_2^{2.2}$ suivant lesquelles se coupent mutuellement ces quadriques et parmi lesquelles il y en a une commune à toutes les quadriques du réseau qui passent par le centre de projection donnent: *la* γ_5^8 *spéciale de* S_3 *appartient à une surface cubique déterminée et à* ∞^2 *surfaces du* 4e *ordre à conique double: ces coniques doubles sont les coniques de la surface cubique placées dans les plans qui passent par une droite déterminée de celle-ci (ne rencontrant pas la* γ_5^8*)*.

Et au moyen des cônes circonscrits du centre de projection aux quadriques du réseau on obtient: *il y a* ∞^2 *quadriques tangentes en* 8 *points à la* γ_5^8 *(quadriques inscrites dans les surfaces du* 4e *ordre nommées): par deux points quelconques il en passe* 4; *les* ∞^2 *groupes de* 8 *points de contact forment une* g_8^2 *de groupes associés contenue dans la* g_8^4. — Les ∞^1 cônes du réseau de quadriques de S_4 avec leurs plans générateurs donneraient d'autres propositions, que nous ne nous arrêterons pas à énoncer.

(23) Ces exceptions sont données, comme l'on voit, par quelques courbes planes et par deux courbes gauches de l'espace ordinaire, C_3^6 et C_4^7, que l'on rencontre resp. aux pages 87 (a_3) et 92 (a_4) du Mémoire de M. Nöther.

(24) Ce résultat est contenu dans la proposition suivante: *une variété rationnelle* $S_{i-1}-F_i^m$ *normale, c. à d. appartenant à un* S_{m+i-1}, *est toujours, si* $1\leq i\leq m$, *l'intersection complète d'un système de quadriques de cet espace tel que par une quadrique quelconque d'un* S_{m-2} *il en passe une seule.*

de points conjugués. La différence entre les nombres des dimensions du 1er et du 2e système est, d'après ce qui précède

$$\frac{1}{2}[3(n-p)-(n+p+2)]=n-2p-1\,;$$

elle est positive si

$$n \geq 2p+2\,.$$

Donc: *une courbe hyperelliptique normale* C_p^n *de* S_{n-p} *donnée peut toujours, lorsque* $n \geq 2p+2$, *être obtenue comme l'intersection de la surface réglée rationnelle* F_2^{n-p-1} *qui la contient avec une quadrique (ne contenant pas cette surface) qui la coupe encore en* $n-2p-2$ *génératrices (que l'on peut choisir arbitrairement).*

Inversement, une quadrique de S_{n-p} qui passe par $n-2p-2$ génératrices d'une F_2^{n-p-1} réglée rationnelle normale dont l'ordre m de la courbe minima soit tel que $2m \geq n-2p-2$ (de sorte que la quadrique ne contient pas nécéssairement la C^m) coupe encore la surface en général en une courbe d'ordre n hyperelliptique, dont le genre sera p, puisque les droites joignant les couples de points conjugués forment une surface réglée d'ordre $n-p-1$.

22. Combien de courbes hyperelliptiques de genre p et ordre n y a-t-il sur une surface réglée rationnelle F_2^{n-p-1} donnée? Si cette surface est normale et si $n \geq 2p+2$, en posant $N=1/2\,(n-p)(n-p+3)$, ces courbes seront toutes déterminées par les $\infty^{N-3(n-2p-2)}$ quadriques passant par $n-2p-2$ génératrices choisies arbitrairement sur cette surface: mais par chacune de ces courbes il passe $\infty^{N-(2n-p+1)-(n-2p-2)}$ de ces quadriques. Donc ces courbes seront seulement $\infty^{(2n-p+1)-2(n-2p-2)}$, c. à d. ∞^{3p+5} (25).

Or la variété des F_2^{n-p-1} générales est $\infty^{(n-p)(n-p+2)-6}$; donc le nombre des paramètres dont dépendent les courbes hyperelliptiques normales est

$$(n-p)(n-p+2)-6+(3p+5)=(n-p)(n-p+2)+3p-1$$

---

(25) On trouve ce même résultat, sans la restriction $n \geq 2p+2$, par la représentation plane de F_2^{n-p-1} que l'on obtient en la projetant par k de ses génératrices et $n-p-2k-2$ points: les courbes cherchées seront alors représentées sur le plan par des courbes d'ordre $n-2k$ avec un point donné pour multiple suivant $n-2k-2$ et $n-p-2k-2$ points doubles aussi donnés. Or les paramètres indépendants de ces courbes planes seront justement

$$\frac{1}{2}[(n-2k)(n-2k+3)-(n-2k-2)(n-2k-1)-6(n-2k-p-2)]=3p+5\,.$$

de sorte qu'il est inférieur à celui des C_p^n générales de $p-2$. Donc *il faut* p — 2 *conditions pour qu'une courbe de genre* p *soit hyperelliptique*; ou en d'autres termes les $3p-3$ modules indépendants d'une courbe générale de genre p se réduisent à $2p-1$ pour une courbe hyperelliptique: résultat connu (B. N. p. 302).

23. Des cas remarquables de courbes hyperelliptiques s'obtiennent lorsque la surface réglée rationnelle des droites joignant les points conjugués devient un cône. Alors on a (n^0 20) $m=0$ et par suite $n \leq 2p+2$.

Si $n=2p+2$, la C_p^{2p+2} hyperelliptique normale de S_{p+2} dont il s'agit sera (n^0 21) l'intersection complète d'un cône rationnel normal d'ordre $p+1$ avec une quadrique ne passant pas par le sommet.

Mais si $n<2p+2$, on ne peut plus construire une telle courbe d'une manière analogue. Pour la C_p^{2p+1} de S_{p+1} le cône rationnel d'ordre p devra évidemment avoir le sommet en un point simple de la courbe: pour la C_p^{2p} de S_p le cône rationnel d'ordre $p-1$ aura le sommet en un point double de la courbe; la C_p^{2p-1} de S_{p-1} aura un point triple, sommet du cône rationnel d'ordre $p-2$; et ainsi de suite. On peut obtenir toutes ces courbes en projetant la C_p^{2p+2} de S_{p+2} déjà construite par $1, 2, 3, \ldots$ de ses points sur un S_{p+1}, S_p, $S_{p-1}, \ldots$

La représentation de ces courbes sur une f_p^{p+2} avec un point p-ple (n^0 19) montre aussi leur existence: que l'on considère en effet les $2p+1$ intersections variables de f avec le système ∞^{p+1} des courbes d'ordre $p+1$ ayant le même point p-ple et passant par $p+1$ des points d'intersection de f avec une droite donnée. Cette série g_{2p+1}^{p+1} de groupes de points de f donnera, comme on voit tout de suite, une C_p^{2p+1} de S_{p+1} de l'espèce cherchée; et si on assujettit encore les courbes d'ordre $p+1$ à passer par $1, 2, \ldots$ nouveaux points quelconques de f on aura les C_p^{2p} de S_p, les C_p^{2p-1} de $S_{p-1}, \ldots$, nommées.

24. On pourrait étudier, par nos méthodes et en partant de la proposition donnée dans la note à la fin du n^0 15, les courbes présentant cette particularité de contenir une g_i^1 dont les groupes de i points appartiennent à des S_k où $k<i-1$, au lieu qu'à des S_{i-1}. Mais nous nous bornerons au cas de $i=3$, $k=1$, c. à. d. au cas où il y a une surface réglée rationnelle de droites trisécantes de la courbe. En supposant que celle-ci soit une C_p^n normale non spéciale de S_{n-p}, il suit de la proposition citée que la surface réglée sera

normale, c. à. d. de l'ordre $n-p-1$. En outre il suit du n⁰ 14 qu'on devra avoir $n \leq 2p+1$.

Dans la projection de la surface réglée F_2^{n-p-1} sur un plan faite par k ($< m$, si m est l'ordre des courbes minimae de la surface) génératrices et $n-p-2k-2$ points, la C_p^n se projettera suivant une courbe γ_p^{n-3k} ayant un point $(n-3k-3)$-ple et $n-p-2k-2$ point triples et en outre des points doubles au nombre de

$$\frac{1}{2}\{(n-3k-1)(n-3k-2)-(n-3k-3)(n-3k-4)\}-3(n-p-2k-2)-p$$
$$=2p+1-n \text{ (26)}.$$

Et inversement toutes les courbes d'ordre $n-3k$ du plan ayant les dites singularités seront les images de C_p^n de la surface réglée rencontrant trois fois chaque génératrice. Or le nombre des paramètres de ces courbes est

$$\frac{1}{2}\{(n-3k)(n-3k+3)-(n-3k-3)(n-3k-2)\}-6(n-p-2k-2)$$
$$-(2p+1-n)=4p+8-n.$$

Nous concluons: *Une courbe non spéciale de genre* p *et ordre* n $\leq$ 2p + 1 *peut être sur une surface réglée rationnelle d'ordre* n—p—1 *de trisécantes. En général une surface réglée rationnelle de cet ordre* $\leq$ p *contient un système de* ∞^{4p+8-n} *courbes de genre* p *et ordre* n *rencontrant trois fois chaque génératrice* (27).

De cela et du nombre des surfaces réglées rationnelles normales de S_{n-p} on tire que pour une C_p^n, où $n \leq 2p+1$, il faut $n-5$ conditions pour qu'elle ait une ∞^1 linéaire de trisécantes (28).

Turin, Janvier 1887.

---

(26) Ce résultat prouve de nouveau que pour qu'une C_p^n puisse avoir une surface réglée rationnelle de trisécantes il faut que $n \leq 2p+1$. Ajoutons que ces points doubles de γ seront les images de $2p+1-n$ points doubles, qu'aura dans ce cas la C_p^n. — Le raisonnement qui suit ci-dessus est seulement esquissé, mais il peut être complété au moyen du théorème contenu à la fin du n⁰ 19.

(27) On voit facilement que, si m est l'ordre de la courbe minima de la surface réglée, on doit avoir: $3m \geq 2n-3p-3$.

(28) La 2e Partie de ce travail, relative aux surfaces réglées, paraitra plus tard.