Corrado Segre

Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **21** (1885-86), p. 868–891

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 56–77

IV.

RICERCHE SULLE RIGATE ELLITTICHE DI QUALUNQUE ORDINE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXI, 1885-86, pp. 628-651.

Le rigate razionali d'ordine n di uno spazio qualunque si possono tutte ottenere come proiezioni di quelle *appartenenti* ad S_{n+1}; da questa proposizione, che si dimostra facilmente, io dedussi in altro lavoro (1) una teoria di quelle rigate ed in particolare, per quelle appartenenti allo spazio ordinario, alcuni risultati del Clebsch relativi alla loro classificazione ed alla loro rappresentazione piana. Ora nasce la questione se un metodo analogo si possa usare per le rigate di genere p qualunque. Nella 1ª parte di questo scritto dimostro che ciò accade infatti per le rigate di genere $p = 1$ e 2, le quali si possono tutte ottenere come proiezioni di quelle appartenenti risp. ad S_{n-1} e S_{n-2} (*) (e non già di quelle appartenenti ad S_n e S_{n-1}, come l'analogia potrebbe far credere; poichè queste ultime sono coni); mentre per $p > 2$ (e $\leq n/2$) non solo le rigate appartenenti ad S_{n-p+1} sono coni, ma neppure quelle appartenenti ad S_{n-p} (od $S_{n-p-1}, \ldots$) non possono dare come proiezioni tutte le rigate d'ordine n e genere p degli spazi inferiori.

Passo poi ad applicare il risultato ottenuto sulle rigate ellittiche allo studio di esse come proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-1}. Ne trovo così una distinzione in specie a seconda dell'ordine minimo delle curve (semplici) in esse contenute, ordine che è sempre $\leq (n+1)/2$, e dimostro varie proprietà di ciascuna specie relative sovratutto alle curve dei vari ordini $\leq n$ contenute nelle rigate. Mediante una proiezione conveniente di una rigata di S_{n-1} sullo spazio ordinario quella si trasforma in un cono cubico e così ottengo varie rappresentazioni

(1) *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti di questa R. Acc., XIX).

(*) V. la nota (*) a p. 61.

di tutte le rigate ellittiche sul cono cubico ordinario (che è la superficie d'ordine minimo su cui esse si possano rappresentare univocamente).

Tutti i risultati sulle rigate ottenuti in questo lavoro sembrano nuovi; per brevità non mi fermerò nè ad applicarli a rigate d'ordini particolari, nè a dedurre da quelli relativi alle rigate ellittiche altre proposizioni che si presenterebbero facilmente come conseguenze di essi.

Generalità sulle rigate di genere qualunque e specialmente su quelle ellittiche.

1. Cominciamo con qualche osservazione assai semplice, ma che ci occorrerà in seguito, relativa alla generazione delle superficie rigate mediante curve punteggiate univocamente.

Abbiasi in uno spazio S_r una rigata qualunque d'ordine n (²). Conducendo spazi S_{r-1} per delle generatrici (in numero ≥ 0) si possono ottenere sulla rigata delle curve (³) semplici d'ordine $\leq n$. Considerando due curve γ^μ, γ^ν di ordini μ, ν così ottenute, è chiaro che esse si tagliano in $\mu + \nu - n$ punti, poichè l'S_{r-1} con cui si ottenne γ^μ e che contiene inoltre $n - \mu$ generatrici taglia γ^ν in ν punti di cui $n - \mu$ stanno su quelle e i rimanenti saranno precisamente i punti comuni a γ^μ, γ^ν. Le generatrici della rigata punteggiano univocamente queste due curve, in modo che quei punti comuni corrispondono a se stessi, cioè sono punti uniti.

Viceversa due curve γ^μ, γ^ν di S_r, le quali siano punteggiate univocamente ed abbiano $\mu + \nu - n$ punti uniti (⁴), generano una rigata del loro stesso genere e d'ordine n. Di qui segue in particolare che su una rigata d'ordine n non possono esservi due curve semplici incontrate da ogni generatrice in un punto solo ed i cui ordini diano una somma minore di n.

(²) Intorno alle rigate che considero in questo lavoro supporrò sempre che non si scindano in altre rigate e di più (quando non dirò il contrario) che non siano coni.

(³) Per *curva* di una rigata intenderò sempre una curva che non sia composta di sole generatrici, ma sia incontrata da tutte le generatrici (*direttrice*).

(⁴) Quando genereremo una rigata mediante due curve punteggiate univocamente, supporrò sempre che gli spazi cui queste appartengono non abbiano comune uno spazio di maggior numero di dimensioni che quello risultante dalle condizioni esplicitamente imposte alle curve.

2. Consideriamo una rigata d'ordine n e di genere $p \geq 1$ e $< n/2$ (5), la quale *appartenga* ad un S_r. Un S_{r-1} di questo la taglierà in una curva d'ordine n e genere p appartenente ad esso: sarà quindi, per una ben nota proposizione, $r-1 \leq n-p$. Dunque il massimo numero di dimensioni di uno spazio a cui appartenga una rigata d'ordine n e genere p è $n-p+1$. Orbene dico che *se una rigata d'ordine* n *e genere* p *appartiene ad un* S_{n-p+1}, *essa sarà un cono.* Invero in tal caso, se la rigata non fosse un cono, un S_{n-p} condotto convenientemente per una sua generatrice taglierebbe ancora la rigata in una curva C^{n-1} corrispondente univocamente alla serie delle generatrici e quindi anch'essa di genere p. Quella curva starebbe perciò, in virtù d'una proposizione dianzi ricordata, in un S_{n-p-1}; e quindi o gli S_{n-p} passanti per questo taglierebbero ancora la rigata in una generatrice variabile, sicchè la rigata sarebbe razionale, oppure uno di quegli S_{n-p} la conterrebbe tutta, sicchè essa non apparterrebbe all'S_{n-p+1}: assurdo in ambi i casi.

Le rigate d'ordine n e genere p appartenenti ad S_{n-p+1} sono dunque i coni che proiettano le C^n di genere p *normali*, cioè appartenenti ad S_{n-p}, da punti esterni a questi. Il loro studio riducendosi perciò (almeno per certe proprietà) allo studio di quelle curve, una vera teoria delle rigate d'ordine n e genere p potrà cominciarsi con quelle appartenenti ad S_{n-p}.

3. Dal risultato ora ottenuto si trae una proposizione notevole intorno alle curve normali. Supponiamo che tra due curve normali A^n e B^n d'ordine n e genere p appartenenti risp. a due spazi U_{n-p} e V_{n-p} vi sia una corrispondenza univoca tale che esistano due gruppi corrispondenti di n punti di esse i quali stiano in due S_{n-p-1} e siano proiettivi. Si potrà allora con un'omografia trasformare V_{n-p}, e quindi B^n, in modo che gli n punti considerati di B^n vadano a coincidere coi corrispondenti di A^n, e V_{n-p} vada a stare in uno stesso S_{n-p+1} con U_{n-p} senza però coincidere con questo. A^n e la B^n trasformata verranno ad essere in corrispondenza univoca con n punti uniti (nell'S_{n-p-1} d'intersezione dei loro spazi U_{n-p}, V_{n-p}): le rette congiungenti i punti corrispondenti genereranno perciò (n. 1) una rigata d'ordine n e genere p appartenente all'S_{n-p+1}, la quale sarà quindi (n. 2) un cono. La corrispondenza tra A^n e B^n era dunque proiettiva, vale a dire: *La condizione necessaria e sufficiente*

(5) Supporrò sempre nel seguito che il numero p considerato soddisfi a queste due condizioni.

perchè una corrispondenza univoca tra due curve normali d'ordine n *e genere* $p < n/2$ *di due* S_{n-p} *sia proiettiva è che esistano risp. in esse due gruppi corrispondenti di* n *punti situati in due* S_{n-p-1} *e proiettivi.*

In particolare ponendo $p=1$ e notando che due gruppi di n punti situati in due S_{n-2} sono sempre (in generale) proiettivi, abbiamo che *se due curve normali ellittiche d'ordine* n *sono in tale corrispondenza univoca che vi siano due gruppi corrispondenti di* n *punti appartenenti rispettivamente a due* S_{n-2}, *quella corrispondenza sarà proiettiva* (6).

4. Proponiamoci ora di dimostrare che *tutte le rigate ellittiche d'ordine* n, *le quali non siano coni e quindi* (n. 2) *appartengano a spazi di meno che* n *dimensioni,* [*o appartengono ad* S_{n-1}, *oppure*] *sono proiezioni di rigate d'ordine* n *appartenenti ad* S_{n-1}. A tal fine stabiliremo anzitutto la seguente proposizione:

In S_{n-2} *il cono ad* $n-r$ *dimensioni che proietta da un* S_{n-r-2} *una curva ellittica qualunque* γ^{n-1} *d'ordine* $n-1$ *appartenente ad un* S_{r-1} (*che non incontra l'* S_{n-r-2}) *contiene* $\infty^{(n-1)(n-r-1)}$ *curve ellittiche normali d'ordine* $n-1$, *sì che per* $n-1$ *punti del cono posti su altrettanti* S_{n-r-1} *generatori diversi e non situati in uno stesso* S_{n-3} *ne passa una determinata.*

Per questo supporrò solo noto che la γ^{n-1} considerata di S_{r-1} è la proiezione di una certa curva normale A^{n-1} di un R_{n-2} (passante per quello) fatta da un O_{n-r-2} (non incontrante S_{r-1}), ossia è sezione di un secondo cono il quale proietta da O_{n-r-2} la A^{n-1}. Ora se nel primo cono vi è realmente una curva ellittica normale C^{n-1} e facciamo corrispondere in A^{n-1} e C^{n-1} due punti che siano proiettati nello stesso punto di γ^{n-1}, agli $n-1$ punti di A^{n-1} posti in un S_{n-3} passante per O_{n-r-2} corrisponderanno evidentemente in C^{n-1} $n-1$ punti posti in un S_{n-3} passante per l'S_{n-r-2}; il che prova (n. 3, alla fine) che la corrispondenza considerata tra A^{n-1} e

(6) Alla fine della mia Nota *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes* (Math. Ann., XXVII, pp. 296-314), procedendo in ordine inverso a quello ora tenuto, stabilii direttamente questa proposizione relativa alle curve ellittiche (mediante la loro rappresentazione parametrica) e ne trassi l'altra che le rigate ellittiche d'ordine n appartenenti ad S_n sono coni. — Rimanderò a quel lavoro per alcuni risultati sulle curve ellittiche di cui ci serviremo e per le citazioni relative (alle quali citazioni sono però da aggiungere, per quanto riguarda le trasformazioni univoche delle curve ellittiche normali di 3° e 4° ordine in se stesse, quelle dei noti lavori del sig. SCHUR pubblicati nei *Math. Ann.*, XVIII, p. 1, e XX, p. 254).

C^{n-1} farà parte di un'omografia tra R_{n-2} ed S_{n-2}, da essa individuata, e in cui O_{n-r-2} e l'S_{n-r-2} saranno corrispondenti e sostegni di forme in cui si corrispondono due S_{n-r-1} proiettanti uno stesso punto qualunque di S_{r-1}. Viceversa un'omografia tra R_{n-2} ed S_{n-2} in cui O_{n-r-2} e l'S_{n-r-2} si corrispondano in quel modo farà corrispondere ad A^{n-1} una C^{n-1} del primo cono. Ma un'omografia qualunque tra R_{n-2} ed S_{n-2} è determinata da $n(n-2)$ condizioni: dal corrispondersi degli O_{n-r-2}, S_{n-r-2} e delle forme che li hanno per sostegni se ne hanno già $r(n-r-1)+(r+1)(r-1)$, sicchè l'omografia considerata resta determinata da $(n-1)(n-r-1)$ nuove condizioni; ed altrettante appunto si avranno se per $n-1$ punti di A^{n-1} si fissano i corrispondenti ad arbitrio sugli S_{n-r-1} del primo cono corrispondenti a quelli del secondo che passano per quei punti. E si vede anche facilmente che tutte quelle condizioni che così si hanno sono indipendenti, cioè che esiste una determinata omografia soddisfaciente a tutte, purchè gli $n-1$ punti scelti in ciascun cono non stiano in un S_{n-3}. Da ciò segue pel primo cono la proposizione enunciata.

5. Abbiasi ora una rigata ellittica qualunque d'ordine n appartenente ad un S_r, dove $r < n-1$. Scelto ad arbitrio un S_{n-r-2} che non abbia alcun punto comune con questo, dico che all'S_{n-1} che li congiunge appartiene una rigata ellittica d'ordine n avente per proiezione su S_r fatta da quell'S_{n-r-2} la rigata data. Invero conduciamo in S_r per una generatrice di questa due S_{r-1} i quali la taglino ancora in due curve ellittiche γ^{n-1} d'ordine $n-1$: queste avranno comuni (n. 1) $n-2$ punti appartenenti ad un S_{r-2}. I due coni che proiettano quelle due γ^{n-1} dall'S_{n-r-2} appartengono risp. ai due S_{n-2} che proiettano da questo i due S_{r-1} considerati; essi hanno comuni gli $n-2$ S_{n-r-1} proiettanti quegli $n-2$ punti: orbene prendiamo su quegli S_{n-r-1} risp. $n-2$ punti qualunque *indipendenti*, cioè appartenenti all'S_{n-3} d'intersezione dei due S_{n-2}. In ciascuno dei due coni per quegli $n-2$ punti (ed un altro punto arbitrario del cono, posto fuori di quell'S_{n-3}) si conduca una C^{n-1} ellittica normale (n. 4). Le due C^{n-1} saranno punteggiate univocamente alle due γ^{n-1}, le quali sono punteggiate univocamente tra loro dalle generatrici della rigata data; dunque anche le due C^{n-1} saranno tra loro punteggiate univocamente con $n-2$ punti uniti. Esse genereranno (n. 1) una rigata ellittica d'ordine n appartenente ad S_{n-1} ed avente per proiezione su S_r la rigata data. — Il teorema propostoci al principio del n. 4 è dunque dimostrato.

6. Se si volesse applicare un ragionamento analogo al precedente per vedere se le rigate d'ordine n e genere p (non coni) si possano tutte ottenere con proiezioni da quelle appartenenti ad S_{n-p}, si troverebbe anzitutto in modo simile a quello tenuto al n. 4 che in S_{n-p-1} il cono che proietta una curva d'ordine $n-1$ e genere p di uno spazio qualunque S_{r-1} da un $S_{n-p-r-1}$ contiene *almeno* (e non più, come prima per $p=1$, *esattamente*) $\infty^{(n-p)(n-p-r)}$ curve normali d'ordine $n-1$ e genere p, sì che per $n-p$ punti non posti in un S_{n-p-2} e giacenti su S_{n-p-r} generatori diversi ne passa *almeno* una. Ma non sarebbe più possibile valersi di ciò come al n. 5 tranne che (per $p=1$, caso già considerato, e) per $p=2$. Adunque *tutte le rigate d'ordine* n *e genere* 2 *sono proiezioni di quelle appartenenti ad* S_{n-2}; il che fornisce un modo di studiare tutte quelle rigate analogo a quello di cui ci serviremo per le rigate ellittiche.

Il fatto che per $p>2$ il ragionamento dei n. 4, 5 non si può più estendere si spiega con ciò che appunto allora le rigate d'ordine n e genere p *non sono* più tutte proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-p}; anzi possiamo dimostrare più in generale, estendendo il ragionamento fatto al n. 2, che: *le rigate d'ordine* n *e genere* p, >2 *e* $<$ n/2, *appartenenti ad* S_{n-p-i}, *dove* i *è* ≥ 0 *e minore di un certo numero* (che risulterà dal ragionamento), *non danno come proiezioni le rigate più generali d'ordine* n *e genere* p. Invero, se una tal rigata appartiene ad S_{n-p-i}, si potrà, supposto $2(i+2) \leq n-p-i$, cioè $i < I(n-p-1)/3$, per $i+2$ sue generatrici condurre un $S_{n-p-i-1}$, il quale taglierà ancora la rigata in generale secondo una curva d'ordine $n-i-2$ e genere p, che sarà semplice nel caso più generale (oppure se i è minore di un nuovo limite dipendente dalle particolarità della rigata), e starà, se $n-i-2 \geq 2p$, cioè $i < n-2p-1$, in un $S_{n-p-i-2}$. Il fascio degli $S_{n-p-i-1}$ passanti per questo taglierà la rigata in una serie lineare di gruppi di $i+2$ generatrici variabili. L'esistenza di una tal serie prova che il sistema delle generatrici della rigata non è generale tra i sistemi algebrici semplicemente infiniti di genere p, se $i+2 < I(p+3)/2$ (7); donde segue appunto l'asserto. — Si vede che i deve essere minore dei numeri $I(n-p-1)/3$, $n-2p-1$, $I(p-1)/2$ (*).

---

(7) V. Riemann, *Theorie der Abel'schen Functionen*, § 5 (Crelle's J., 54, [p. 115]; Ges. Math. Werke, p. 101), ed inoltre Brill u. Nöther, *Ueber die algebraischen Functionen* u. s. w., Math. Ann., VII, p. 293.

(*) I risultati di questo n. 6, così come altri del presente lavoro (v. nota (11) a p. 66), vanno modificati com'è detto dall'A. nella nota in fondo a p. 77 e nella nota (13) apposta alla Memoria VI di questo volume (N. d. R.).

In particolare per $i = 0$ otteniamo che *le rigate d'ordine* n *e genere* $p \geq 2$ *e* $\leq n/2 - 1$ *appartenenti ad* S_{n-p} *sono iperellittiche* (cioè contengono serie lineari di coppie di generatrici) ([8]).

Sulle curve ellittiche.

7. Facciamo una nuova applicazione della proposizione dimostrata al n. 4 a determinare in un modo assai semplice il numero delle costanti da cui dipendono le curve ellittiche d'ordine n di uno spazio qualunque.

A tal fine notiamo anzitutto che le curve ellittiche normali d'ordine n, o, come d'or innanzi diremo per brevità, le C^n di S_{n-1}, sono ∞^{n^2}. Invero è noto che, se due tali curve hanno lo stesso *modulo* (invariante assoluto), esse sono proiettive (in un numero finito di modi): dunque corrispondentemente alle ∞^{n^2-1} omografie di S_{n-1} e agli ∞^1 valori che può assumere il modulo si hanno appunto ∞^{n^2} C^n. Ora ogni curva ellittica d'ordine n dello spazio S_r si può ottenere (n. 4, dove n ed r si aumentino di 1) come proiezione fatta da un S_{n-r-2} fisso di $\infty^{n(n-r-1)}$ tra le ∞^{n^2} C^n dell'S_{n-1} congiungente quei due spazi. Dunque *le curve ellittiche d'ordine* n *appartenenti ad* S_r *sono* $\infty^{(r+1)n}$. — In particolare per le curve ellittiche di ordine n dello spazio ordinario si trova così che esse sono ∞^{4n}, proposizione nota.

8. In ogni C^n di S_{n-1} gli S_{n-2} di questo determinano ∞^{n-1} gruppi di n punti tali che dati $n - 1$ punti di un gruppo è individuato il rimanente: li diremo *gruppi di* n *punti associati* o semplicemente *gruppi associati* della C^n.

Consideriamo ora in generale una curva ellittica d'ordine n, γ^n, appartenente ad uno spazio qualunque S_r, dove $r < n - 1$. Essa si può considerare in infiniti modi come proiezione di C^n appartenenti a spazi S_{n-1} passanti per S_r fatta da S_{n-r-2} contenuti in quelli;

([8]) Qui si presenterebbero alcune questioni importanti. Le rigate d'ordine n e genere $p \leq n/2 - 1$ iperellittiche appartenenti a spazi di meno che $n - p$ dimensioni sono esse tutte proiezioni di quelle appartenenti ad S_{n-p}? Le rigate d'ordine n e genere $p < n/2$ appartenenti ad S_{n-p-i} dànno esse, quando i supera il limite superiore sopra trovato per i (o qual altro limite?), colle loro proiezioni tutte quelle appartenenti a spazi inferiori? Ma di queste questioni non mi occupo nel presente lavoro.

e nel ragionamento fatto al n. 4 abbiamo visto che se in due qualunque di quelle C^n si considerano come corrispondenti due punti proiettati nello stesso punto di γ^n, la corrispondenza tra le due C^n è proiettiva, cioè tale che a gruppi di n punti associati dell'una corrisponderanno gruppi associati nell'altra. Ne segue che su γ^n la serie ∞^{n-1} dei gruppi di n punti proiezioni dei gruppi associati di una qualunque delle infinite C^n di cui γ^n è proiezione non muta cambiando quella C^n, vale a dire dipende unicamente da γ^n: la diremo pure la serie dei *gruppi associati* di n punti di γ^n. Essa è pure *lineare*, cioè tale che dati $n-1$ punti di un gruppo è individuato il rimanente. — Due gruppi qualunque di punti di γ^n i quali presi insieme costituiscano un gruppo di n punti associati li diremo *residuali*.

Comunque si trasformi una curva ellittica d'ordine n mediante proiezioni in spazi inferiori in un'altra tal curva, è chiaro che i gruppi di n punti associati si muteranno sempre in gruppi di n punti associati (9).

9. Se tra due curve ellittiche di ordini qualunque si può stabilire una corrispondenza univoca (vale a dire se esse hanno lo stesso modulo), se ne potranno stabilire infinite formanti due sistemi di ∞^1; poichè è noto che una curva ellittica normale, e quindi anche una curva ellittica qualunque, ammette ∞^1 trasformazioni univoche in se stessa formanti due sistemi. E come ognuna di queste ultime trasformazioni è caratterizzata dal valore di una costante, così si può dire che le ∞^1 corrispondenze univoche tra due curve ellittiche aventi lo stesso modulo corrispondono ai valori di una quantità, che chiameremo l'*invariante* delle corrispondenze.

Consideriamo due curve ellittiche γ^n dello stesso ordine n appartenenti a due spazi qualunque: risulta dalla proposizione vista alla fine del n. 3 che, se tra esse vi è una corrispondenza univoca tale che ad un particolare gruppo di n punti associati dell'una cor-

(9) In generale in questo lavoro evito, come si vede, la rappresentazione con funzioni ellittiche (o con funzioni algebriche) nello studio delle curve e delle rigate ellittiche, poichè il metodo sintetico si adatta benissimo a quest'oggetto. Osserverò tuttavia che quelli che ho chiamato *gruppi associati* di n punti di γ^n sono caratterizzati dal fatto che in una conveniente rappresentazione parametrica di questa la somma dei parametri degli n punti di un tal gruppo è un periodo. Se γ^n è piana, quegli n punti sono i punti d'intersezione variabili di γ^n con una delle sue ∞^{n-1} curve *aggiunte* d'ordine $n-2$.

risponda nell'altra un gruppo pure associato, ciò accadrà sempre, vale a dire ad ogni gruppo di n punti associati di ognuna corrisponderà nell'altra un gruppo di n punti associati. Una tale corrispondenza tra le due γ^n si dirà una corrispondenza univoca *speciale*. Come tra due C^n aventi lo stesso modulo si possono stabilire $2n^2$ corrispondenze proiettive, così più in generale fra le ∞^1 corrispondenze univoche che possono determinarsi tra due curve ellittiche qualunque d'ordine n aventi lo stesso modulo vi saranno $2n^2$ corrispondenze speciali.

Le varie specie di rigate ellittiche.

10. D'or innanzi ci occuperemo dello studio di una rigata ellittica d'ordine n appartenente ad S_{n-1}, che chiameremo sempre F; e dalle proprietà che ne otterremo potremo sempre dedurre immediatamente (colla proiezione) enunciati relativi a rigate ellittiche d'ordine n di qualunque spazio S_r, ed in particolare dello spazio ordinario.

Ogni curva semplice di F d'ordine $< n$ è intersezione parziale di F con un S_{n-2} ed è quindi ellittica. Possiamo anzi vedere facilmente che *una curva qualunque di* F, *semplice o composta, d'ordine* $\nu <$ n *appartiene ad un* $S_{\nu-1}$; giacchè essa non appartiene certo ad un S_ν, altrimenti (essa [eventualmente liberata da generatrici componenti] e quindi) F sarebbe razionale; e non sta in un $S_{\nu-2}$, altrimenti per questo ed $n - \nu - 1$ punti di F si potrebbe condurre un S_{n-3} contenente quella curva e le generatrici passanti per quei punti, cioè una curva composta d'ordine $n - 1$ e allora gli S_{n-2} passanti per quell'S_{n-3} taglierebbero F in una generatrice variabile e quindi ancora F sarebbe razionale. — Supponendo in particolare che la curva considerata sia semplice avremo: *ogni curva semplice di* F *d'ordine* $<$ n *è una curva ellittica normale.*

Anche le curve semplici d'ordine n contenute in F, siano esse sezioni di F con degli S_{n-2}, ovvero appartengano ad S_{n-1}, sono ellittiche. Dunque: *le curve di qualunque rigata ellittica d'ordine* n *(appartenente a qualunque spazio) i cui ordini non superano* n *sono ellittiche; quelle di ordini* $<$ n *incontrano ogni generatrice in un sol punto.*

11. L'ipotesi che su F esista un punto doppio da cui partano due generatrici conduce facilmente a conchiudere l'esistenza di una

linea doppia: vediamo dunque come possa F avere una tal linea. In ogni S_{n-2} non potrà esservi più di un punto doppio di F, poichè altrimenti la curva d'intersezione con questa sarebbe razionale: quindi se F ha una linea doppia, questa sarà una retta. Ora se una retta doppia di F non fosse direttrice, cioè incontrata da tutte le generatrici, conducendo un S_{n-2} per una di queste si otterrebbe come intersezione residua con F una C^{n-1} con punto doppio, il che è impossibile. E se poi quella retta doppia fosse nello stesso tempo direttrice e generatrice, allora per ogni suo punto passerebbe una sola generatrice variabile, sicchè F sarebbe razionale. Dunque *se* F *ha punti doppi, essa ha una retta direttrice doppia, per ogni punto della quale passano due generatrici variabili.*

Una tal rigata F non contiene alcuna C^{ν} dove $\nu < n - 2$, poichè altrimenti per l'$S_{\nu-1}$ di questa e la retta doppia passerebbe un $S_{\nu+1}$ contenente F. Essa contiene invece infinite C^{n-2}, le quali si ottengono tutte come intersezioni residue della rigata cogli S_{n-2} che passano per una coppia fissa di generatrici uscenti da uno stesso punto della retta doppia (senza passare per questa), e sono perciò ∞^{n-4}. Da ciò si deduce una costruzione di una rigata di questa specie, cioè mediante le rette congiungenti i punti corrispondenti di una C^{n-2} e di una retta doppia (non incontrante l'S_{n-3} cui quella appartiene) punteggiate univocamente.

Altre proprietà si hanno notando che in tal caso F sta in un cono a 3 dimensioni ellittico d'ordine $n - 2$ che proietta dalla retta doppia tutte quelle infinite C^{n-2}: se in queste (come sempre nelle curve poste sulle rigate che consideriamo) diciamo *corrispondenti* i punti posti su una stessa generatrice, segue che tutte quelle C^{n-2} sono tra di loro in corrispondenza non solo univoca ma proiettiva. In ognuna delle C^{n-2} si ha poi una corrispondenza univoca involutoria determinata dalle coppie di generatrici uscenti dai punti della retta doppia: l'invariante di questa corrispondenza ed il modulo delle C^{n-2}, cioè di F, (vale a dire il rapporto anarmonico dei 4 punti della retta doppia da cui escono generatrici coincidenti) sono i due soli invarianti (assoluti) di una tal rigata, come si vede subito dalla sua costruzione.

Una prima specie di rigate ellittiche d'ordine n (*di uno spazio qualunque*) *si compone di rigate aventi una retta direttrice doppia. Ogni rigata di tale specie contiene* (*come curve d'ordine più basso dopo quella retta*) *una serie lineare di* ∞^{n-4} *curve ellittiche d'ordine* $n - 2$, *di cui due qualunque si tagliano in* $n - 4$ *punti per cui ne passa un fascio. Tutte quelle curve sono tra loro in corrispondenza univoca spe-*

ciale. Ogni tal rigata si genera mediante una curva ellittica d'ordine n — 2 *ed una retta doppia le quali siano in corrispondenza univoca* (*).

12. Escluderemo d'or innanzi, se non diremo appunto il contrario, il caso ora esaminato in cui F ha una linea doppia: su F non potrà dunque più esservi alcuna retta direttrice (come non vi è mai alcuna conica) (10).

Conduciamo un S_{n-2} per $I(n-1)/2$ generatrici di F, cosa sempre possibile: esso taglierà ancora F in una curva d'ordine $In/2+1$, la quale può in particolare scindersi in un certo numero di generatrici ed una curva semplice d'ordine inferiore. Però se n è pari si trova facilmente su F una curva d'ordine $n/2$ o minore. Infatti, supposto n pari, $n/2-1$ generatrici fissate ad arbitrio staranno certo in un S_{n-3} e gli S_{n-2} passanti per questo tagliano ancora F in $C^{n/2+1}$ aventi comuni i 2 punti in cui incontrano quell' S_{n-3} fuori delle $n/2-1$ generatrici: tra quegli S_{n-2} i due che passano risp. per le generatrici uscenti da quei 2 punti contengono curve semplici di F d'ordine $n/2$ o minore. Adunque indicando con m l'ordine minimo delle curve di F, sicchè C^m indicherà una di quelle curve *minime*, sarà $2 < m \leq I(n+1)/2$. Vedremo che esistono effettivamente rigate ellittiche F per cui m ha tutti i valori compresi tra quei limiti, e vedremo ciò deducendo dallo studio delle loro proprietà la loro costruzione (11).

13. Sia anzitutto $m \leq I(n-1)/2$. In tal caso F ha evidentemente una sola curva minima C^m e nessun'altra curva d'ordine $< n-m$: orbene dimostriamo che essa conterrà allora infinite C^{n-m}. Se esiste su F una C^{n-m}, un S_{n-2} per essa taglia ancora F in m generatrici incontranti la C^m nei suoi m punti d'intersezione con

---

(*) Per $n=4$ si ha la rigata quartica di S_3 con due rette doppie, sulla quale l'unica C^{n-2} è una delle rette doppie (N. d. R.).

(10) Benchè F non abbia linee doppie, le sue proiezioni potranno averne (quelle dello spazio ordinario ne avranno certamente). Orbene nell'applicare i nostri risultati relativi alle rigate proiezioni di F ogni curva d'ordine μ multipla secondo k, e quindi proiezione di una curva d'ordine $k\mu$ di F, si dovrà sempre considerare come costituente una curva dello stesso ordine $k\mu$ (ed ellittica se quella curva di F è tale).

(11) In modo affatto analogo si giunge al risultato seguente: *ogni rigata d'ordine* n *e genere* 2 *(di uno spazio qualunque) contiene almeno una curva il cui ordine è* $\leq \mathrm{I}\,\mathrm{n}/2+1$, *sicchè per tali rigate l'ordine delle curve minime semplici varia dal valore* 4 *a quel limite superiore.*

quell'S_{n-2}, cioè in m punti associati; e viceversa, fissate ad arbitrio m generatrici incontranti la C^m in un gruppo di punti associati, qualunque C^{n-m} di F starà con quelle in un S_{n-2}. Quelle m generatrici fisse passando per m punti di un S_{m-2} staranno in un S_{2m-2}; e gli apparterranno (giacchè se stessero in un S_{2m-3}, per questo e la C^m passerebbe un S_{2m-2} contenente una curva composta d'ordine $2m$, il che è impossibile (n. 10)). Per quell'S_{2m-2} e per $n - 2m$ punti di F scelti fuori della C^m su altrettante generatrici diverse dalle m fisse si conduca un S_{n-2}: esso taglierà F oltre che in queste m generatrici in una curva d'ordine $n - m$ passante per quegli $n - 2m$ punti e che non si scinderà se le $n - 2m$ generatrici su cui si scelsero quei punti non soddisfano ad una certa condizione. Notisi infatti che se quella curva fosse composta, si scinderebbe nella C^m e quelle $n - 2m$ generatrici, cioè vi sarebbe un S_{n-2} passante per la C^m, per le m generatrici fisse e per queste $n - 2m$; ma per la C^m, le m generatrici fisse e $n - 2m - 1$ di queste (insieme d'ordine $n-1$) passa un S_{n-2} determinato (n. 10) il quale taglia ancora F in una certa generatrice che viene in tal modo determinata da quelle $n - - 2m - 1$. Le generatrici di F dànno così una serie lineare ∞^{n-2m-1} di gruppi di $n - 2m$ generatrici provenienti dall'intersezione residua di F cogli S_{n-2} passanti per l'S_{2m-1} che congiunge le m generatrici fisse alla C^m; e segue dal nostro ragionamento che se gli $n - 2m$ punti testè considerati di F sono scelti ad arbitrio purchè non stiano su $n - 2m$ generatrici di un tal gruppo, per essi passerà una C^{n-m} non degenere. Dal fatto poi che tutte le C^{n-m} sono determinate su F dagli S_{n-2} passanti per l'S_{2m-2} delle m generatrici fisse segue che esse sono ∞^{n-2m} e formano una serie lineare tale che le ∞^1 C^{n-m} passanti per $n - 2m - 1$ punti dati di F hanno ancora comune uno stesso punto (n. 1), cioè formano *fascio*. Otteniamo così dei gruppi speciali di $n - 2m$ punti su F che non individuano una C^{n-m}, ma un fascio; le $n - 2m$ generatrici passanti per tali $n - 2m$ punti stanno in un S_{n-2} passante per l'S_{2m-2} considerato, cioè formano appunto un gruppo della serie lineare ∞^{n-2m-1} considerata.

Quegli ∞^{n-2m-1} gruppi di $n - 2m$ generatrici costituenti colla C^m delle C^{n-m} degeneri e provenienti, come s'è visto, dagli S_{n-2} condotti per la C^m e le m generatrici fisse, si possono anche definire mediante una C^{n-m} dicendo che essi sono i gruppi delle generatrici incontranti una C^{n-m} di F nei gruppi di $n - 2m$ punti residuali al gruppo dei punti della C^{n-m} posti sulle generatrici che escono da un gruppo qualunque di m punti associati della C^m ([12]).

Notiamo infine che tutte le C^{n-m} sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici della rigata, poichè gli S_{n-2} passanti per la C^m tagliano ancora la rigata in gruppi di $n-m$ generatrici che incontrano le C^{n-m} in gruppi di $n-m$ punti associati. Da ciò e dalla costruzione di F mediante la C^m ed una C^{n-m} si trae facilmente che essa ha due soli invarianti (assoluti), cioè il suo modulo e l'invariante della corrispondenza tra la C^m ed una qualunque delle C^{n-m}.

14. Proiettando otteniamo dal n. precedente i risultati seguenti.

Ogni rigata ellittica d'ordine n *con una curva minima d'ordine* $\mathrm{m} \leq (\mathrm{n}-1)/2$ *si può generare mediante due curve ellittiche di ordini* m, $\mathrm{n}-\mathrm{m}$ *in corrispondenza univoca. Essa contiene* $\infty^{\mathrm{n}-2\mathrm{m}}$ *curve d'ordine* $\mathrm{n}-\mathrm{m}$ *formanti una serie lineare sì che per* $\mathrm{n}-2\mathrm{m}$ *punti qualunque della rigata ne passa una sola (e pegli* $\mathrm{n}-2\mathrm{m}$ *punti d'intersezione di due tali curve ne passa un fascio). Due qualunque di quelle curve sono in corrispondenza univoca speciale. I gruppi di* m *punti di una tal curva d'ordine* $\mathrm{n}-\mathrm{m}$ *corrispondenti ai gruppi di* m *punti associati della curva minima hanno per gruppi residuali la serie lineare degli* $\infty^{\mathrm{n}-2\mathrm{m}-1}$ *gruppi di* $\mathrm{n}-2\mathrm{m}$ *punti in cui la prima curva è incontrata dalle altre curve d'ordine* $\mathrm{n}-\mathrm{m}$ *ed in particolare dagli* $\infty^{\mathrm{n}-2\mathrm{m}-1}$ *gruppi di* $\mathrm{n}-2\mathrm{m}$ *generatrici che con la curva minima costituiscono le curve degeneri della serie di curve d'ordine* $\mathrm{n}-\mathrm{m}$.

In particolare nel caso estremo notevole in cui $m=(n-1)/2$ avremo:

Su una rigata ellittica d'ordine impari n *dotata di una curva minima d'ordine* $(\mathrm{n}-1)/2$ *vi sono* ∞^1 *curve d'ordine* $(\mathrm{n}+1)/2$, *le quali hanno comune un punto fisso; per ogni altro punto della rigata ne passa una sola, che però se esso sta sulla generatrice uscente dal punto fisso degenera nella generatrice stessa e nella curva minima.*

([12]) Si noti che qui non solo non facciamo uso del *Restsatz*, ma che anzi esso viene dimostrato dal nostro ragionamento per le due serie di gruppi di m ed $n-2m$ punti della C^{n-m} che qui compaiono come residuali l'una dell'altra. Ed anche per la corrispondenza univoca tra la C^m e la C^{n-m} otteniamo la proposizione che ai gruppi associati della C^m corrispondono nella C^{n-m} i gruppi di una serie lineare residuale di un'altra; ecc. Si ha qui nella considerazione delle rigate generate da curve punteggiate univocamente un metodo fecondo per trovare con procedimento affatto sintetico le proposizioni relative alla geometria sulle curve ellittiche (e probabilmente anche sulle curve di qualunque genere).

Nella corrispondenza tra la curva minima ed una qualunque delle curve d'ordine (n + 1)/2 *ai gruppi associati di* (n — 1)/2 *punti della prima corrispondono nella seconda i gruppi residuali del punto fisso.*

15. $m = n/2$. Cerchiamo se su F in tal caso oltre alla C^m supposta, che dirò A^m, ve ne può essere un'altra. Perciò si osservi che quanto dicevamo al principio del n. 13 intorno ad una C^{n-m} vale ancora, cioè per m generatrici fisse incontranti A^m in m punti associati arbitrari di questa si può condurre un S_{n-2} contenente anche quell'altra C^m. Ora nel caso presente quelle m generatrici non possono stare in un S_{n-4} (altrimenti per esse ed A^m passerebbe un S_{n-3} contenente una curva composta d'ordine n di F); quindi o per esse passa un solo S_{n-2} o ne passa un fascio. Ogni tale S_{n-2} taglia F oltre che nelle m generatrici fisse in una C^m, la quale però potrebbe in particolare coincidere con A^m. Dunque se $m = n/2$, F ha in generale due curve minime C^m, distinte o coincidenti; e può anche avere una serie lineare di ∞^1 C^m sì che per ogni punto (senza eccezione) ne passa una sola. Nel primo caso le due C^m non sono punteggiate proiettivamente; nel secondo invece due qualunque delle C^m sono punteggiate proiettivamente e le generatrici formano gruppi di m situate in S_{n-3} e incontranti tutte le C^m in gruppi di punti associati.

Da questo risultato segue subito l'esistenza e la costruzione di F quando ha due C^m distinte e quando ne ha infinite. Per vederne la costruzione nel caso in cui abbia una sola curva minima A^m ricordiamo che allora deve accadere che per m generatrici di F incontranti A^m in m punti associati passi un solo S_{n-2} e che questo contenga anche A^m. Ora si vede subito (conducendo S_{n-2} per $m - 1$ generatrici) che in questo caso F conterrà infinite C^{m+1}; una di queste ha comune con A^m un punto ed è tagliata dall'S_{n-2} considerato passante per A^m in altri m punti associati con quello ed ai quali corrispondono m punti associati di A^m. Orbene viceversa prendansi una C^m ed una C^{m+1} aventi un punto comune ed in corrispondenza univoca tale che quel punto sia unito e che ad un gruppo di m punti della C^{m+1} residuale di questo corrisponda sulla C^m un gruppo di punti associati: la rigata d'ordine n generata dalle due curve sarà appunto della specie voluta, cioè avrà per unica curva minima la C^m.

F avrà due invarianti se ha due sole curve minime distinte o coincidenti, cioè il suo modulo e l'invariante della corrispondenza trà queste curve; mentre ha unicamente per invariante il proprio modulo se contiene infinite curve minime.

In uno spazio qualunque avremo: *Una rigata ellittica d'ordine pari* n *con curva minima d'ordine* $n/2$ *può presentare due casi:* 1⁰ *avere due sole tali curve, distinte od infinitamente vicine, ed allora la corrispondenza univoca tra queste non è speciale (è questa la specie più generale di rigate ellittiche d'ordine pari* n*);* 2⁰ *contenere infinite tali curve sì che per ogni punto senz'eccezione ne passi una sola ed allora la corrispondenza univoca tra due qualunque di esse è speciale. A seconda adunque che per generare la rigata si prenderanno due curve ellittiche d'ordine* n/2 *in corrispondenza univoca generale o speciale, si presenterà il* 1⁰ *od il* 2⁰ *caso. Per generare poi la rigata nel* 1⁰ *caso sì che abbia le due curve minime infinitamente vicine si può far uso di due curve ellittiche di ordini* n/2 *e* n/2 + 1 *punteggiate univocamente con un punto unito e in modo che ai gruppi associati di* n/2 *punti della prima corrispondano nella seconda i gruppi residuali del punto unito.*

16. $m = (n + 1)/2$. In questo caso $(n - 1)/2 = m - 1$ generatrici qualunque di F appartengono ad un S_{n-2}, poichè se stessero in un S_{n-3}, questo taglierebbe ancora le C^m intersezioni residue di F cogli S_{n-2} passanti per quello in un punto fisso e l'S_{n-2} congiungente quell'S_{n-3} alla generatrice passante per questo punto taglierebbe ancora F in una C^{m-1}. Ogni S_{n-2} che così viene individuato da uno qualunque degli ∞^{m-1} gruppi di $m - 1$ generatrici determina su F come intersezione residua una C^m; viceversa gli ∞^{m-2} S_{n-2} passanti per una C^m di F determinano su questa una serie lineare ∞^{m-2} di gruppi di $m - 1$ generatrici. Ne segue che nel caso presente F avrà ∞^1 curve minime C^m: vedremo poi, come caso particolare di un'altra proposizione (n. 18), che per ogni punto di F ne passano in generale due. Notiamo inoltre che la corrispondenza tra due qualunque C^m di F non può essere proiettiva, poichè altrimenti si vedrebbe subito l'esistenza di un S_{n-3} contenente $m - 1$ generatrici e quindi, come dianzi s'è visto, di una C^{m-1} su F; viceversa la rigata generata da due C^m in corrispondenza univoca non proiettiva aventi un punto unito non può contenere una C^{m-1}, e quindi appartiene alla specie che ora esaminiamo.

Da ciò si può dedurre che F ha in questo caso un solo invariante, cioè il modulo.

Proiettando avremo:

Una rigata ellittica qualunque d'ordine impari n, *appartenente alla specie più generale, cioè a quella per cui le curve minime sono* *d'ordine* $(n+1)/2$, *contiene* ∞^1 *tali curve sì che per ogni punto della rigata ne passano due. Ad ognuna di esse corrisponde una serie lineare* $\infty^{(n-3)/2}$ *di gruppi di* $(n-1)/2$ *generatrici, sì che ogni altra è incontrata da quella curva e da uno qualunque di questi gruppi in* $(n+1)/2$ *punti associati; in particolare la prima curva è incontrata da quei gruppi di generatrici nei gruppi di* $(n-1)/2$ *punti residuali al suo punto di contatto colla curva inviluppata da tutte le curve minime. La corrispondenza tra due qualunque di queste non è speciale, e la rigata si genera appunto mediante due curve ellittiche d'ordine* $(n+1)/2$ *in corrispondenza univoca non speciale con un punto unito* [13].

Alcune proprietà.

17. È importante veder bene, qualunque sia la specie di F, a quali condizioni deve soddisfare un numero k affinchè k generatrici di F siano indipendenti, cioè appartengano ad un S_{2k-1}. Indicando sempre con m l'ordine delle curve minime, e supponendolo anzitutto $\leq (n-1)/2$, è chiaro che la C^m e k generatrici appartengono ad un S_{m+k-1} se $k < n-m$, cosicchè se inoltre $k > m$ le k generatrici non sono indipendenti; esse apparterranno allora appunto ad un S_{m+k-1} contenente la C^m. Se $k = m$ e le m generatrici incontrano la C^m in m punti associati, esse non saranno indipendenti, ma apparterranno ad un S_{2m-2} (v. n. 13). Se poi $k \leq m$ e, ove fosse precisamente $k=m$, se i punti d'incontro delle k generatrici con la C^m non sono associati, le k generatrici sono indipendenti, poichè se stessero in un S_{2k-2}, siccome i k punti comuni a questo ed alla C^m sarebbero indipendenti, vi sarebbe un S_{m+k-2} contenente la C^m e le k generatrici, il che è impossibile (n. 10). — Nel caso di $m = n/2$ (v. n. 15) m generatrici qualunque sono indipendenti, tranne se incontrano una C^m in punti associati, chè allora, secondo che si ha la 1ª o la 2ª delle due specie di F considerate in quel caso, quelle generatrici appartengono ad un S_{n-2} o ad un S_{n-3}; quindi, per $k < m$, k generatrici sono sempre indipendenti. — Quest'ultimo fatto vale anche nel caso di $m = (n+1)/2$ (v. il principio del n. 16). — Concludendo:

---

(13) Dalle rigate corrispondenti ad $m = (n+1)/2$ e $m = n/2$ si potrebbero dedurre come casi particolari quelle corrispondenti a valori inferiori di m; ma mi parve preferibile l'esaminare anche queste direttamente. — Si osservi inoltre che dalle costruzioni date delle rigate delle varie specie in qualunque spazio si trae immediatamente il numero dei parametri da cui esse dipendono.

Se $k < m$, k *generatrici di* F *sono sempre indipendenti, cioè appartengono ad un* S_{2k-1}. *Se* $k = m$, *esse sono ancora indipendenti in generale per* $m \leq n/2$ *ed appartengono ad un* S_{2k-1} *passante per la curva minima; però se esse incontrano una curva minima in punti associati esse appartengono ad un* S_{2m-2}, *e solo se in questa stessa ipotesi si ha la* 2ª *delle specie corrispondenti ad* $m = n/2$ *esse appartengono ad un* S_{2m-3}. *Se* $k > m$ *le* k *generatrici non sono più indipendenti ed appartengono ad uno spazio contenente ogni curva minima.*

Da ciò segue quest'altra proposizione: *Un* S_{n-3} *passante per* k *generatrici di* F *incontra ancora questa in generale in* $n - 2k$ *punti isolati, se* $k < m$, *ed anche se* $k = m$ *purchè* ($m \leq (n-1)/2$ *e*) *quelle generatrici incontrino la* C^m *in punti associati*. In fatti allora lo spazio a cui appartengono le k generatrici non conterrà alcuna curva di F e un S_{n-2} condotto ad arbitrio per l'S_{n-3} considerato darà come intersezione con F oltre alle k generatrici una curva d'ordine $n - k$ incontrante l'S_{n-3} oltre che in k punti di quelle in altri $n - 2k$ punti isolati.

18. Possiamo vedere facilmente quali curve d'ordine $< n$ contenga F a seconda della sua specie, oltre a quelle già considerate. Se è $m = 2$, cioè se vi è una retta doppia, quelle curve sono, oltre alle ∞^{n-4} C^{n-2} trovate, le ∞^{n-2} C^{n-1} che si ottengono segando F con S_{n-2} passanti per una generatrice variabile.

Sia poi $m > 2$, e indichiamo con μ un numero qualunque minore di n ma maggiore di $n - m$. Una C^μ di F appartenendo ad un $S_{\mu-1}$ starà con $n - \mu - 1$ generatrici fisse in un S_{n-2} determinato, il quale taglierà ancora F in una certa generatrice. Adunque per avere tutte le C^μ di F basta condurre tutti gli S_{n-2} passanti per quelle $n - \mu - 1$ generatrici fisse ed una variabile. Siccome $n - \mu$ generatrici sono indipendenti e ogni S_{n-2} condotto per esse non contiene più in generale altre generatrici, tranne quando lo spazio a cui quelle appartengono contiene ancora un'altra generatrice, il che si verifica solo per $m = n/2$, 2ª specie, se $\mu = m + 1$, così escludendo questo caso, ogni gruppo costituito dalle $n - \mu - 1$ generatrici fisse e da un'altra generatrice ci dà realmente $\infty^{2\mu-n-1}$ C^μ e quindi in totale vediamo che, se μ soddisfa alle dette condizioni, vi sono su F $\infty^{2\mu-n}$ C^μ.

Per $2\mu - n$ punti qualunque di F passano in generale due C^μ, le quali si costruiscono così. Conducasi un S_{n-3} per le $n - \mu - 1$ generatrici fisse e per quei punti: esso taglierà ancora F (n. 17) in 2 punti; i due S_{n-2} passanti per quell'S_{n-3} e rispettivamente per le generatrici uscenti da questi 2 punti taglieranno ancora F secondo le due C^μ cercate. — Considerando anche le curve d'ordine n sezioni di F cogli S_{n-2} e proiettando abbiamo:

Una rigata ellittica qualunque d'ordine n *dotata di curve minime d'ordine* m *contiene, oltre alle curve già considerate nei* n[i] 14, 15, 16, *una serie quadratica di* $\infty^{2\mu-\mathrm{n}}$ *curve ellittiche d'ordine* μ *per ogni valore di* μ *minore di* n *e maggiore di* n — m, *escludendo però nel caso delle rigate aventi infinite curve minime d'ordine* n/2 *il valore* $\mu = = \mathrm{n}/2 + 1$. *In tal modo si hanno tutte le curve d'ordine* $<$ n *della rigata. Vi sono poi inoltre su questa* $\infty^{\mathrm{n}-1}$ *curve ellittiche d'ordine* n *incontranti ogni generatrice in un sol punto e formanti una serie lineare, sì che per* n — 1 *punti qualunque della rigata ne passa in generale una sola, mentre due qualunque di esse si tagliano in* n *punti pei quali ne passa un fascio. Ogni curva d'ordine* $<$ n *della rigata è tagliata da tutte quelle curve d'ordine* n *nella serie dei suoi gruppi di punti associati.*

19. Per conoscere tutte le curve d'ordine $\leq n$ situate sulle rigate ellittiche d'ordine n ci resta da cercare se su F oltre alle curve d'ordine n già considerate, sezioni di F cogli S_{n-2}, non vi siano anche curve d'ordine n appartenenti ad S_{n-1}, cioè ellittiche normali, vale a dire delle C^n. Si vede anzitutto facilmente (valendosi ad esempio della proposizione nota che ogni C^n è l'intersezione completa di infinite M^2_{n-2}) che, se vi è su F una C^n, questa dovrà essere incontrata da ogni generatrice di F in due punti (*), sicchè su essa le generatrici di F determineranno una corrispondenza univoca. Ora (14) in una C^n le rette congiungenti punti che si corrispondano in una corrispondenza univoca formano una rigata ellittica d'ordine n nel solo caso in cui la corrispondenza univoca sia una *corrispondenza di* 2ª *specie* (involutoria, cioè) *principale* e la rigata ellittica che in tal caso si ottiene ha per curve minime, se n è pari, due $C^{n/2}$ distinte punteggiate *non* proiettivamente dalle generatrici, e se n è impari (non potendo contenere una curva d'ordine $\leq (n-1)/2$, poichè altrimenti sulle generatrici poste in un S_{n-2} passante per questa si avrebbe un numero $\geq (n+1)/2$ di coppie di punti della C^n) infinite $C^{(n+1)/2}$; essa ha poi sempre un solo invariante, cioè quello della C^n.

(*) In questo punto vengono tacitamente escluse le C^n ellittiche normali *unisecanti* le generatrici di F; v. la nota (13) della Memoria VI di questo volume (N. d. R.).

(14) Veggasi il mio lavoro sulle curve ellittiche già citato.

Supponiamo anzitutto n pari. Noi vediamo che allora F non contiene in generale alcuna C^n, e solo quando F appartiene alla specie più generale, cioè ha due sole curve minime distinte d'ordine $n/2$, essa, ove i suoi invarianti soddisfino ad una certa condizione, viene a contenere una C^n. Essa ne contiene anzi in tal caso una serie lineare ∞^1, la quale si ottiene da una delle C^n stesse trasformandola colle ∞^1 omografie aventi per *assi* (di punti doppi ed S_{n-2} doppi) gli $S_{n/2-1}$ cui appartengono le due $C^{n/2}$ (15). Da tutto ciò si è condotti alla proposizione seguente:

Le rigate ellittiche d'ordine pari n *non contengono in generale altre curve ellittiche d'ordine* n *che le* ∞^{n-1} *già considerate; solo se una tal rigata ha due sole curve minime distinte d'ordine* n/2 *essa può particolarizzandosi venir a contenere una curva ellittica d'ordine* n *incontrante in due punti ogni generatrice. Allora essa contiene* ∞^1 *tali curve d'ordine* n (*tra cui si possono anche considerare le due curve minime contate doppiamente*) *sì che per ogni punto della rigata ne passa una sola e che sulle varie generatrici le coppie di punti d'intersezione con quelle curve costituiscono varie involuzioni proiettive* (*coi punti doppi sulle curve minime*).

Poniamo ora che n sia impari e che F appartenga alla specie più generale. Le ∞^1 curve minime d'ordine $(n+1)/2$ che F conterrà in tal caso formeranno evidentemente una serie ellittica (poichè corrispondono univocamente ai punti in cui incontrano una qualunque di esse). Facendo corrispondere in questa serie due curve qualunque che s'incontrino su una generatrice fissa di F si ha una corrispondenza di 1ª specie, e così le ∞^1 generatrici dànno le ∞^1 corrispondenze di 1ª specie. Invece considerando nella stessa serie di curve una corrispondenza di 2ª specie principale e ricordando che questa, pure essendo involutoria come tutte le corrispondenze di 1ª specie, non ha elementi doppi (mentre ciascuna di quelle ne ha 4), si vede che il luogo dei punti d'intersezione delle curve corrispondenti sarà una curva semplice incontrata da ognuna delle curve minime in un sol punto e da ogni generatrice in due punti (cioè nei due punti doppi della corrispondenza (2, 2) che su quella retta è determinata dalle intersezioni colle coppie di curve corrispondenti), e per conse-

(15) Ciò si accorda col fatto che tanto una C^n (n. 7) quanto la rigata F più generale dipendono da n^2 parametri; sicchè, se n è pari, F deve soddisfare ad una condizione affine di contenere una C^n, appunto perchè se ne contiene una ne contiene infinite.

guenza, come se ne deduce facilmente, una C^n. Viceversa si scorge pure subito che facendo corrispondere due curve minime che variino incontrandosi sempre su una C^n di F, si ha una corrispondenza di 2ª specie principale nella serie ellittica delle curve minime. Dunque su F esistono tre sole C^n, le quali sono prodotte dalle tre corrispondenze di 2ª specie principali. Proiettando:

Le rigate ellittiche d'ordine impari n *contengono oltre alle* ∞^{n-1} *già considerate altre curve ellittiche d'ordine* n, *solo quando appartengono alla specie più generale, cioè hanno per curve minime infinite curve d'ordine* $(n+1)/2$. *Una tal rigata contiene allora tre (sole) curve ellittiche d'ordine* n *incontranti in due punti ogni generatrice ed in un sol punto ogni curva minima; ciascuna di quelle tre curve è il luogo dei punti d'intersezione delle curve minime corrispondenti in una delle tre corrispondenze di 2ª specie principali della serie ellittica costituita dalle curve minime* (16).

Rappresentazione delle rigate ellittiche sul cono cubico.

20. Fissiamo su F k generatrici g qualunque, essendo k un numero soggetto alle condizioni che s'incontreranno; e conduciamo un S_{n-2} per esse e per altre 3 generatrici (donde una prima condizione, cioè che $k+3$ generatrici stiano in un S_{n-2}). Esso taglierà ancora F in una curva d'ordine $n-k-3$, semplice o composta, che indicherò con A^{n-k-3} e che con le g apparterrà ad uno spazio R_{n-4}. Conduciamo entro questo uno spazio O_{n-5} passante per le g: taglierà ancora A^{n-k-3} in $n-2k-3$ punti P posti fuori di quelle. Orbene dico che proiettando F da O_{n-5} su uno spazio ordinario R'_3, la proiezione sarà generalmente univoca, vale a dire un S_{n-4} proiettante un punto di F posto fuori di R_{n-4} non conterrà in generale un altro tal punto. Supponiamo in fatti che un S_{n-4} passante per O_{n-5} e diverso da R_{n-4} contenga due punti di F posti fuori di O_{n-5}. L'S_{n-3} congiungente quell'S_{n-4} ad R_{n-4} non può contenere di F una curva composta d'ordine $> n-2$; ma esso contiene A^{n-k-3} e le k generatrici g, e dovrebbe inoltre contenere le generatrici passanti pei due punti considerati di F: dunque questi staranno su una stessa

(16) Aggiungiamo ancora riguardo a quella rigata che *l'inviluppo delle infinite curve minime è una curva ellittica d'ordine* 2n *incontrata da tutte le generatrici della rigata in quaterne di punti aventi per rapporto anarmonico il modulo della rigata (o della curva).*

generatrice, giacente nell'S_{n-4} ed incontrante perciò A^{n-k-3} in un punto di O_{n-5}, vale a dire in uno dei punti P. Dunque effettivamente la proiezione che così si ottiene di F su R'_3 è univoca, fatta solo eccezione per le $n-2k-3$ generatrici p di F passanti pei punti P, ciascuna delle quali è proiettata in un sol punto P'.

Ora un S_{n-3} condotto ad arbitrio per O_{n-5} taglia F oltre che nelle k generatrici g in $n-2k$ punti (purchè k soddisfi ad una certa condizione; v. n. 17): di questi $n-2k-3$ sono nei punti fissi P, e solo i rimanenti 3 sono variabili. Di più le generatrici di F incontrando tutte A^{n-k-3}, e quindi R_{n-4}, sono tutte proiettate su R'_3 secondo rette passanti pel punto A' intersezione di R'_3 con R_{n-4}. Dunque *la rigata* F *viene così proiettata univocamente su un cono cubico, al cui vertice* A′ *corrisponde sulla rigata la curva* A^{n-k-3}.

Le condizioni a cui deve soddisfare k (cioè di non superare un certo limite, dipendente dalla specie di F) risulterebbero subito da questo ragionamento, valendosi dei risultati del n. 17; così per la specie più generale di F corrispondente ad n dispari, cioè per $m = (n+1)/2$, il massimo valore che possa raggiungere k è $(n-7)/2$, mentre per la specie più generale corrispondente ad n pari e quindi $m = n/2$ il massimo di k è $n/2 - 3$.

21. Considerando ogni rigata ellittica d'ordine n di qualunque spazio come proiezione di F, noi ne abbiamo in tal modo varie rappresentazioni univoche sul cono cubico ordinario, e possiamo trovare immediatamente le loro proprietà. Così: *Sulla rigata vi sono* (come su F) $\mathrm{n-2k-3}$ *punti fondamentali* P *a cui corrispondono sul cono cubico altrettante generatrici* p′, *mentre su queste vi sono* $\mathrm{n-2k-3}$ *punti fondamentali* P′ *del cono ai quali corrispondono sulla rigata le generatrici* p *passanti pei punti* P; *inoltre è fondamentale per la rappresentazione il vertice del cono poichè gli corrisponde sulla rigata una curva d'ordine* $\mathrm{n-k-3}$.

La rappresentazione è d'ordine $\mathrm{n-k}$. Più precisamente: alle cubiche sezioni piane del cono corrispondono in F le C^{n-k} intersezioni residue cogli S_{n-2} passanti per O_{n-5} e quindi più in generale in qualunque rigata ellittica d'ordine n delle curve d'ordine $n-k$ passanti pegli $n-2k-3$ punti fondamentali P. Alle ∞^{n-1} curve d'ordine n della rigata incontranti ogni generatrice una volta sola (cioè (*) alle sezioni di F con S_{n-2}) corrispondono nel cono curve

(*) V. la nota (*) al n. 19 (N. d. R.).

d'ordine $n-k$ passanti pegli $n-2k-3$ punti fondamentali P' ed aventi nel vertice del cono un punto multiplo secondo $n-k-3$: queste curve ellittiche formano un sistema tale che per $n-1$ altri punti del cono ne passa in generale una sola. In particolare, se si considera la rappresentazione di una rigata ellittica dello spazio ordinario, le sue sezioni piane saranno rappresentate da un sistema lineare ∞^3 di quelle curve d'ordine $n-k$ del cono cubico.

Si scorge poi subito come si rappresentano le curve d'ordine $< n$ della rigata sul cono cubico, e in generale dalle proprietà già dimostrate della rappresentazione si trarrà facilmente quali curve sulla rigata o sul cono cubico corrispondano a curve date del cono cubico o della rigata, ed inoltre quali particolarità si presentano in certe rappresentazioni d'ordine minimo (corrispondenti al valor massimo di k), ecc., ecc.

Torino, Maggio 1886.

NOTA. — In un prossimo lavoro mostrerò come si estendano vari risultati di questo alle curve ed alle rigate di genere qualunque. Da esso si vedrà che al n. 6, lin. 6 e 10 in luogo di *almeno* ci voleva ancora *esattamente*, e alla lin. 13 in luogo di S_{n-2} ci voleva S_{n-3}; per conseguenza nella nota alla fine del n. 12 in luogo di $I\,n/2+1$, leggasi $I\,(n+1)/2+1$. Infine anche nella 2ª parte del n. 6 occorrerebbe qualche modificazione. (Luglio 1886).