Corrado Segre

Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **36** (1900-01), p. 645–651

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 433–439

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_433>

XXI.

UN'OSSERVAZIONE RELATIVA ALLA RIDUCIBILITA' DELLE TRASFORMAZIONI CREMONIANE E DEI SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE PER MEZZO DI TRASFORMAZIONI QUADRATICHE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXXVI, 1900-1901, pp. 377-383.

Nei lavori, a cui mi dovrò riferire, che trattano i problemi di riduzione per trasformazioni quadratiche, occorre il concetto di composizione d'un punto singolare di una curva piana mediante *punti multipli infinitamente vicini*, quale è stato introdotto specialmente dal sig. NÖTHER [1]. È quindi opportuno che io qui cominci col ricordare con precisione in che cosa esso consista [2].

Si abbia nel piano una curva γ col punto s-plo A. Una trasformazione quadratica generale $\mathcal{T}$ con un punto fondamentale in A muti γ in γ'. Essa farà corrispondere a tutto l'intorno di A su γ gl'intorni su γ' di uno o più punti distinti $A'_1, A'_2, \ldots$: tracce sulla retta fondamentale a', corrispondente ad A, delle rette che la $\mathcal{T}$ fa corrispondere alle diverse tangenti $\tau_1, \tau_2, \ldots$ di γ in A. Indichiamo con $s_1, s_2, \ldots$ le moltiplicità che γ' avrà risp. in $A'_1, A'_2, \ldots$ — Similmente una seconda trasformazione quadratica generale $\mathcal{T}'$ con un punto fondamentale in A'_i muti γ' in γ'', ed il punto A'_i di γ' in uno o più punti distinti $A''_{i1}, A''_{i2}, \ldots$ di γ'' (sulla retta fondamentale a'' che $\mathcal{T}'$ fa corrispondere ad A'_i), multipli risp. secondo $s_{i1}, s_{i2}, \ldots$ — E così si continui, applicando successive trasformazioni quadratiche. — Si dice allora che A è per γ un punto s-plo, al quale sono infinitamente vicini, in diverse direzioni $\tau_1 \tau_2 \ldots$,

(1) *Ueber die algebraischen Functionen*, Note 2., Götting. Nachrichten, 1871; *Ueber die sing. Werthsysteme einer alg. Function und die sing. Punkte einer alg. Curve*, Math. Ann., IX, 1875-6.

(2) Cfr. anche la mia Memoria: *Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche*, Ann. mat., (2) 25, 1896-7 [V. p. 327 di questo volume].

(costituendo l'intorno di 1.° ordine di A su γ), punti colle moltiplicità s_1, s_2, ...; ciascuno di questi, per esempio s_i (*), avendo poi per punti infinitamente vicini (intorni di 2.° ordine di A) dei punti colle moltiplicità s_{i1}, s_{i2}, ...; e ognun di questi, per es° s_{ik}, a sua volta i punti colle moltiplicità s_{ik1}, s_{ik2}, ... (intorni del 3.° ordine di A); e così via. Si conviene pure di dire che i punti indicati con s_i, s_{ik}, s_{ikl}, ... (per dati valori degl'indici) *succedono* al punto A in questo loro ordine, sopra la curva γ; che ognuno è *successivo* al precedente.

Se poi si considera nel piano un'altra curva δ passante per A, si dice che essa contiene anche, oltre a questo, i punti infinitamente vicini di γ indicati con s_i, s_{ik}, ..., se le successive trasformazioni quadratiche $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, ... la mutano in curve δ', δ'', ... passanti rispettivamente pel punto A'_i di γ', A''_{ik} di γ'', ...

Ciò premesso, rileviamo questo fatto: che una successione di tre o più punti infinitamente vicini di γ, cioè $s\, s_i\, s_{ik}$ ..., può esser tale che *ogni* curva δ passante per essi ne abbia sempre uno o più come punti multipli; cosicchè per quella successione di punti non passi alcuna curva avente A come punto *semplice*. Così, se nella curva γ' il punto A'_i s_i-plo ha il successivo s_{ik} giacente sulla retta a' (il che significa che il punto A''_{ik} di γ'' è sull'intersezione di a'' colla omologa di a' per $\mathcal{T}'$), δ' risulta costretta a toccare a' in A'_i, e quindi δ avrà in A almeno un punto doppio. Tre punti successivi $s\, s_i\, s_{ik}$ possono dunque presentare due casi distinti rispetto ai rami (rami completi o cicli) di curva algebrica che li contengono: o per essi passano rami lineari, oppure passan solo rami superlineari (d'ordine ≥ 2). In particolare si ha che nel 1.° caso, purchè i tre punti successivi non siano allineati, si posson condurre per essi infinite coniche irriducibili; mentre nel 2.° caso per i tre punti non passano coniche irriducibili, e quindi — rileviamolo pel seguito — *essi non si posson prendere come punti base, infinitamente vicini, di una trasformazione quadratica!* ([3]). — Similmente 4 punti successivi

(*) Qui ed in seguito, un punto e la relativa moltiplicità vengono denotati con il medesimo simbolo (N. d. R.).

([3]) Si vede pure subito, dalle trasformazioni quadratiche, che i rami di curva passanti pei 3 punti hanno nel 1.° caso l'ordine uguale o minore della classe (poichè la $\mathcal{T}$ li trasforma in rami uscenti da A'_i i quali non toccano a'), e nel 2.° caso invece l'ordine maggiore della classe. E d'altra parte è evidente, anche senza ricorrere alle trasformazioni, che se un elemento differenziale di curva determinato da tre punti successivi ha curvatura finita e non nulla (e quindi sta su coniche irriducibili), ogni ramo che lo contiene avrà l'ordine uguale alla classe!

$s\, s_i\, s_{ik}\, s_{ikl}$ possono stare su rami lineari, oppure solo su rami d'ordine ≥ 2, oppure solo su rami di ordine e classe ≥ 2, o infine solo su rami d'ordine ≥ 3 : ciò dipende dalle posizioni che i loro omologhi su γ' e γ'' hanno rispetto ad a' e ad a''. — E in generale, prendendo una successione di un numero finito qualunque di punti di γ, si ha da fare una ovvia ma lunga distinzione dei casi che essi posson presentare rispetto alla natura dei rami di curva algebrica che li contengono (4).

Veniamo ora al problema della risoluzione di una trasformazione Cremoniana piana in un prodotto di trasformazioni quadratiche. Com'è noto, la possibilità di questa risoluzione fu asserita, quasi nello stesso tempo e indipendentemente l'uno dall'altro, da CLIFFORD (5), NÖTHER (6) e ROSANES (7). CLIFFORD si limitò ad effettuarla per le trasformazioni d'ordine ≤ 8, con punti fondamentali ordinari in posizione generica. Invece gli altri due scienziati dedussero dalle due relazioni di CREMONA tra le moltiplicità dei punti fondamentali di una rete omaloidica il fatto che la somma delle 3 moltiplicità più elevate supera l'ordine della rete. Allora prendendo quei 3 punti come punti base per una trasformazione quadratica, questa muterà la rete in una d'ordine inferiore. Pel caso che la data rete abbia punti fondamentali infinitamente vicini, ROSANES si limitò ad aggiungere (p. 109) che le trasformazioni quadratiche da adoperare posson essere di quelle che hanno 2 o 3 punti base coincidenti. NÖTHER invece dedicò a questo caso un altro breve lavoro (8). Egli osservò che la trasformazione quadratica coi punti base nei 3 punti fondamentali più elevati (j, i_1, i_2) di una rete omaloidica d'ordine n potrebbe mancare, *perchè all'uno di essi fossero infinitamente vicini gli altri due in* ***diverse*** *direzioni.* Sia j la moltiplicità più alta; siano infinitamente vicini a questo punto, in

(4) Cfr. il n.º 6 della mia Mem. citata.

(5) Nei §§ 68 e seg.i della Mem.a di CAYLEY, *On the Rational Transformation between Two Spaces*, Proc. Lond. math. Soc., III, 1869-1871 (= Collect. math. Papers di CAYLEY, t. 7º). Cfr. anche CLIFFORD, Math. Papers, p. 538.

(6) *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Math. Ann., III, 1870-71 : v. a p. 167.

(7) *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*, Journal für Math., 73, 1870-71.

(8) *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Math. Ann., V, 1872.

diverse direzioni, i punti multipli secondo $i_1\, i_2 \ldots i_m$, ove

$$i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_m, \quad \Sigma\, i_\varrho \leq j;$$

ed esistano poi dei punti fondamentali h_λ, ove

$$i_2 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots,$$

i quali posson anche essere infinitamente vicini ai precedenti. NÖTHER dimostra che in tale ipotesi, se h_1 è successivo per esempio a i_ϱ, si ha anche $j + i_\varrho + h_1 > n$; e per conseguenza applicando, invece della suddetta trasformazione $(j\, i_1\, i_2)$ ora mancante, la trasformazione quadratica avente per punti base $j\, i_\varrho\, h_1$, si abbasserà ancora l'ordine della rete. *Sarebbe dunque, secondo* NÖTHER, *possibile in tutti i casi l'abbassamento di quest'ordine mediante* ***una*** *trasformazione quadratica.*

Ora a questo ragionamento si posson muovere due obbiezioni. 1⁰) Non è soltanto nel caso rilevato e trattato da NÖTHER che viene a mancare la trasformazione quadratica coi punti base nei 3 punti fondamentali più elevati $j\, i_1\, i_2$ della rete; ma anche quando questi 3 punti, essendo *nella* ***stessa*** *direzione*, cioè su uno stesso ramo di curva, non stanno però su alcun ramo lineare. Sarebbe questo un nuovo caso da esaminare [9]. 2⁰) Pur restando nel caso a cui NÖTHER si limita, potrebbe accadere che i 3 punti infinitamente vicini $j\, i_\varrho\, h_1$ ai quali allora si ricorre in sostituzione dei 3 punti di maggior moltiplicità, non stessero a loro volta su alcun ramo lineare di curva, e quindi non potessero servire come punti base di una trasformazione quadratica.

Effettivamente si posson formare senza difficoltà, in base a queste obbiezioni, delle reti omaloidiche il cui ordine non si abbassa *con una sola* trasformazione quadratica. Il più semplice esempio è dato dalle cubiche aventi comune una cuspide, con la tangente, e

---

[9] Quantunque NÖTHER, come gli altri Autori che citerò tosto, dicano sempre esplicitamente che basta limitarsi all'esame del caso che i_1, i_2 siano infinitamente vicine a j in *diverse* direzioni, si potrebbe nei loro calcoli includere anche l'altro caso che ora ho detto: ammettendo che le $i_1\, i_2 \ldots i_m$ significhino tutte le moltiplicità, *distinte od infinitamente vicine*, che da una trasformazione quadratica generale con punto base in j vengono a prodursi sulla retta fondamentale corrispondente a questo punto. — Forse anzi è questo il concetto che avevano in mente il NÖTHER e qualche altro Autore: sicchè per essi questa 1ª obbiezione non sarebbe sostanziale. *Ma essenziale invece rimane, in ogni modo, la 2ª.*

con 8 intersezioni coincidenti. Esso è incluso per $n=3$ nell'esempio fornito dalla seguente equazione:

$$\lambda\,(y^{n-1}+\varphi_n)+\mu\,xy^{n-1}+\nu y^n=0\,,$$

in cui φ_n indica una forma d'ordine n di x, y. Qualunque sia n, quest'equazione rappresenta una rete omaloidica — caso particolare di quelle di DE JONQUIÈRES — di curve d'ordine n aventi comune nell'origine un punto $(n-1)$-plo e poi, su rami d'ordine $n-1$ uscenti da questo, $2n-2$ punti semplici successivi. Per queste reti non solo non basta, se $n>2$, una trasformazione quadratica per abbassarne l'ordine: ma nemmeno basta una trasformazione di un ordine $<n$.

Il procedimento adoperato dal NÖTHER per la riduzione delle reti omaloidiche con punti fondamentali qualunque fu poi applicato successivamente da varî scienziati per ridurre con trasformazioni quadratiche all'ordine minimo altre specie di sistemi lineari di curve piane. BERTINI (10) da una tale estensione del metodo di NÖTHER dedusse i fasci e talune reti di genere $p=1$, e certi sistemi tripli [di genere] $p=2$. GUCCIA (11) trattò i sistemi lineari comunque infiniti di curve razionali, e poi anche (12) quelli di curve ellittiche. MARTINETTI si occupò di questi ultimi (13) e dei sistemi sovrabbondanti di genere 2 (14). JUNG trattò in generale dei sistemi di genere p, con applicazione ai primi valori di p (15). Più recentemente DE FRANCHIS de-

---

(10) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano,* Ann. mat., (2) 8, 1877.

(11) *Generalizzazione di un teorema di* NÖTHER, Rend. Palermo, 1, 1886.

(12) *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche* ecc., Ibid., 1887.

(13) *Sopra i sistemi lineari di curve piane algebriche di genere uno,* Rend. Ist. Lomb., (2) 20, 1887.

(14) *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due,* Rend. Palermo, 1, 1887. — Cfr. anche NÖTHER, *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung,* Math. Ann., XXXIII, 1888-89; ove si cita appunto questo lavoro del MARTINETTI per le reti sovrabbondanti di genere due che occorrono nella ricerca di quelle superficie.

(15) In vari lavori del 1887 e 1888, fra i quali va citato qui specialmente: *Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque* ecc. (Mem. II), Ann. mat., (2) 16, 1888-89.

terminò i fasci $p = 2$ (16), e i sistemi $p = 3$ di dimensione > 1 (17). Orbene in tutte queste trattazioni, appunto perchè procedono parallelamente a quella di NÖTHER, vi è luogo alle stesse obbiezioni che ad essa ho fatto: perchè nessuno di quegli Autori ha avvertito che la trasformazione quadratica da essi adoperata potrebbe mancare pel fatto che i tre punti multipli infinitamente vicini, che ne sarebbero i punti base, cioè $j\, i_1\, i_2$, oppure $j\, i_\varrho\, h_1$, pur essendo nella stessa direzione o successivi, non stessero su coniche irriducibili (18).

Agli esempi già addotti di sistemi con $p = 0$ se ne possono aggiungere quanti si vogliano, per ogni valore di p. Basti citare ancora le sestiche

$$(x^3 + y^2)^2 + y\,(x^3 + y^2)\,\varphi_2 + y^2\,\psi_4 = 0\,,$$

ove φ_2 e ψ_4 indicano forme di x, y, di 2.° e 4.° ordine, a coefficienti indeterminati. Esse costituiscono un sistema lineare del genere 1, avendo in comune un punto quadruplo e 3 punti doppi che son successivi a quello su rami di 2.° ordine. *Con una sola* trasformazione quadratica non si può abbassarne l'ordine, mentre secondo i lavori citati relativi a $p = 1$ dovrebbe esser possibile.

Si può osservare che in questi esempi l'abbassamento dell'ordine che non si raggiunge *con una* trasformazione quadratica si può ottenere invece *con più* trasformazioni quadratiche. Ma non è dimostrato che lo stesso accadrà sempre!

In conclusione:

Non è ancora completamente dimostrato che ogni trasformazione Cremoniana si possa risolvere in un prodotto di trasformazioni quadratiche.

---

(16) *Riduzione dei fasci di curve piane di genere* 2, Rend. Palermo, 13, 1898-99. — A questa si può collegare la breve Nota: *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere* 2, pubblicata dal DE FRANCHIS nel 1899 nel medesimo vol^{e}, e diretta a completare la determinazione di queste reti fatta dal MARTINETTI.

(17) *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere* 3, *per* $k > 1$, Rend. Palermo, 13, 1898-99.

(18) Vedansi nei lavori citati i passi seguenti: BERTINI n.° 9. — GUCCIA pp. 148, 151; e poi pp. 175, 177. — MARTINETTI n.° 3 della 1ª Nota; e il n.° 2 della 2ª. — JUNG pp. 302 e seg. — DE FRANCHIS pp. 3, 4, 8, 9; e poi 142, 146, ecc.

Non è completamente dimostrato che quei sistemi lineari di genere 0, 1, 2, 3,... *che gli Autori citati vollero determinare si possan tutti ridurre, con trasformazioni quadratiche successive, o con trasformazioni Cremoniane, ai tipi che gli Autori stessi hanno ottenuti* ([19]).

([19]) Nella mia Nota: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere* p (Rend. Palermo, 1, 1887) io ho proposto un altro metodo per ottenere i varî tipi di sistemi lineari di dato genere, dal punto di vista delle trasformazioni Cremoniane: ricorrendo cioè alle superficie (dei varî spazi) rappresentate da tali sistemi. Cfr. anche, pel genere uno, la Nota di DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'*n^{mo} *ordine immerse nello* S_n, pubblicata nello stesso vol^e; e pei sistemi iperellittici CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, nel t. 4^0 degli stessi Rend^i (con una mia nota a piè delle pp. 86-88); ecc. — Naturalmente però quel metodo non esaurisce la questione, perchè si applica solo ai sistemi di dimensione > 2.