Corrado Segre

Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche

Annali Mat. pura ed applicata, Vol. **25** (1897), p. 2–54

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 327–379

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_327>

XVIII.

SULLA SCOMPOSIZIONE DEI PUNTI SINGOLARI DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie II, tomo XXV, 1897, pp. 1-54.

Nello studio delle singolarità delle curve piane algebriche un punto di vista molto importante è, come si sa, quello — dovuto principalmente al sig. NOETHER (¹) ed al quale si giunge eseguendo una successione di trasformazioni (ordinariamente quadratiche) col punto singolare come punto fondamentale, — secondo cui la singolarità viene a riguardarsi come composta di un numero finito di punti multipli infinitamente vicini fra loro. L'analogo concetto nelle ricerche sulle singolarità delle superficie algebriche non è stato ancora introdotto, almeno con una certa ampiezza: sebbene possa riuscire anche qui sommamente fecondo, ed in certi casi appaja assolutamente essenziale. Ad esso io mi propongo in questo lavoro di portare qualche contributo; facendone alcune applicazioni: tra cui rileverò quelle contenute nell'ultima parte, dirette a dimostrare l'utilità della scomposizione delle singolarità superficiali nella trattazione dell'importante problema di ridurre per trasformazioni birazionali una data superficie algebrica ad una superficie dello spazio ordinario con sole singolarità ordinarie o ad una superficie iperspaziale priva di punti multipli.

Torino, Ottobre 1896.

(¹) V. la 2.ª Nota: *Ueber die algebraischen Functionen einer und zweier Variabeln* (Götting. Nachrichten, 1871, p. 267); e poi il lavoro più completo: *Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve* (Math. Ann., IX, 1875). — Per altre citazioni intorno alle singolarità delle curve piane algebriche veggasi l'ottima opera dei sig.ⁱ BRILL e NOETHER, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, III Bd., 1892-93).

Scomposizione di un punto multiplo qualunque.

1. Indichiamo con F una superficie algebrica qualunque, e con O un suo punto di multiplicità s. Applichiamo una trasformazione quadratica spaziale, la quale abbia come elementi fondamentali del 1.º spazio il punto O ed una conica q, riducibile o no, non passante per O; diciamo A' e q' il punto e la conica fondamentali del 2.º spazio, ω il piano di q, ω' il piano di q'. Si sa che in questa trasformazione ai punti (del 1.º spazio) infinitamente vicini ad O nelle varie direzioni uscenti da questo corrispondono i punti (del 2.º spazio) situati su ω': corrispondenza collineare fra quelle direzioni e questi punti. Ne segue che sulla superficie F' (d'ordine $2n - s$ in generale, se n è l'ordine di F) trasformata di F il punto O non avrà per imagine un sol punto, ma bensì tutta una linea c' giacente su ω' e collineare al cono tangente in O ad F; si può cioè dire che un punto qualunque O' della linea c' è l'imagine su F' di un punto di F infinitamente vicino ad O sulla corrispondente generatrice t di quel cono; ossia che se un punto su F si avvicina indefinitamente ad O in modo che la retta che lo congiunge ad O tenda al limite t, il punto che gli corrisponde su F' avrà per limite O'.

Volendo considerare in modo speciale una tangente t di F in O converrà supporre (come si può) che la conica fondamentale q del 1.º spazio non la incontri; cosicchè il punto O' non starà su q'. Allora la multiplicità s' del punto O' per la superficie F' si potrà riguardare come un carattere spettante a quella tangente t di F in O: potremo dire per brevità, seguendo l'uso, che s' è *la multiplicità di quel punto di* F *che è infinitamente vicino (successivo) ad* O *nella direzione* t. Da quanto diremo poi (n.º 4) quest'espressione apparirà giustificata (²). — Poichè la multiplicità di O' per F' non può superare quella che ha O' per l'intersezione di F' con ω', cioè quella di O' per la linea c' (che con la conica q' costituisce quell'intersezione), avremo che *il carattere* s′ *di* t *non può superare la multiplicità di* t *pel cono tangente in* O *ad* F. Sarà dunque anche

(²) Intanto un modo ben noto per darne una prima spiegazione è il seguente. S'imagini che la superficie F' venga spostata infinitamente poco in modo che il suo punto s'-plo O' esca dal piano fondamentale ω'; la superficie corrispondente nel 1.º spazio sarà infinitamente prossima ad F ed avrà, corrispondentemente alla nuova posizione di O', un punto s'-plo infinitamente vicino ad O nella direzione t.

$s' \leq s$; ed il caso $s' = s$ non potrà presentarsi se non quando quel cono tangente, d'ordine s, si spezzi in s piani (distinti o no) passanti per t.

Mutando la tangente t in O ad F potrà mutare s'. Per ognuna delle singole componenti irriducibili del cono tangente in O (ossia delle curve componenti la c' di F') avremo un valore di s' corrispondente ad una sua generatrice t *generica* (questo valore sarà la multiplicità della componente di c' per F'); e poi potremo avere altri valori di s' (superiori) corrispondenti a posizioni *eccezionali* di t. Complessivamente avremo un numero finito di valori per s', che (quando occorra) distingueremo con $s'_1, s'_2, s'_3, \ldots$: gli uni spettanti ad infinite tangenti t, gli altri solo a tangenti staccate. — Diremo *per convenzione* che *i punti di* F *infinitamente vicini (successivi) ad* O *formano una o più linee irriducibili infinitesime, infinitamente vicine ad* O, *degli stessi ordini* (3) *e con le stesse multiplicità* che hanno per F' le singole componenti irriducibili di c'. Su una tal linea infinitamente vicina ad O possono poi esservi dei punti eccezionali (infinitamente vicini ad O) aventi per F multiplicità maggiore che quella della linea.

2. Fissiamo di nuovo una posizione di t, a cui corrisponda il punto O' su F'; e facciamo per questo punto una scomposizione analoga a quella che abbiam fatto pel punto O di F. Assumiamo dunque una seconda trasformazione quadratica che abbia (nel 1.° spazio) come punto fondamentale O' ed una conica fondamentale che non incontri una tangente t' di F' in O' scelta ad arbitrio. Il punto s'-plo O' di F' avrà per imagini sulla superficie F'', trasformata di F', gl'infiniti punti di una linea piana c''. Consideriamo fra questi punti quello O'' che corrisponde alla direzione t'; sia s'' la sua multiplicità per F'': sarà $s'' \leq s'$. Variando t' e quindi O'' potrà mutare questo carattere s''; potremo cioè avere dei valori generici di s'' e dei valori eccezionali. Diremo, per un'ulteriore convenzione, che essi sono le multiplicità di linee infinitesime e di punti di F, infinitamente vicini (successivi) a quel punto s'-plo di F che è successivo ad O sulla tangente t. — Facciamo ora variare t: e per ogni sua posizione avremo un gruppo di valori per s''.

---

(3) L'*ordine* di una tal linea infinitesima è dunque quello del cono (di tangenti ad F) che la projetta da O. — In base a quella convenzione potremo parlare in seguito di *rette infinitesime*, ecc.

Vi saranno gruppi di valori che spettano ad infinite posizioni di t, e gruppi che spettano invece a posizioni eccezionali di t. Complessivamente avremo un numero finito di valori per s''. Se il carattere s' spettante ad una t si è indicato con s'_i, distingueremo i valori di s'' spettanti a quella t con $s''_{i1}, s''_{i2}, s''_{i3}, \ldots$; e varrà sempre la relazione $s''_{ik} \leq s'_i$.

Si faccia una nuova trasformazione quadratica prendendo come punto fondamentale il punto O'' che è s''-plo per F'', e sulla superficie F''' in cui questa si trasforma si considerino le multiplicità s''' delle linee, e dei punti eccezionali, che vengono a corrispondere ad O'' di F''. E così si continuino le trasformazioni quadratiche, fermandosi solo ad un punto O', od O'', od O''', ..., generico od eccezionale, quando la sua multiplicità s', od s'', od s''', ..., sia $= 1$. Diremo che *il punto singolare* O *di* F *consta di un punto* s*-plo, a cui sono successivi* (*nelle varie direzioni uscenti da* O) *punti con le multiplicità* $\mathrm{s}'_1, \mathrm{s}'_2, \ldots$, *i quali costituiscono una o più linee infinitesime; ognun di questi punti, e sia di multiplicità* s'_i, *avendo per successivi punti di multiplicità* $\mathrm{s}''_\mathrm{i1}, \mathrm{s}''_\mathrm{i2}, \ldots$, *costituenti una o più linee infinitesime; ciascun di questi ultimi punti, ad esempio corrispondente ad* s''_ik, *avendo per successivi punti di multiplicità* $\mathrm{s}'''_\mathrm{ik1}$, $\mathrm{s}'''_\mathrm{ik2}, \ldots$; *e così via* (4).

3. *Questa scomposizione avrà termine*, cioè in ogni serie di caratteri $(s, s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots)$ si arriverà sempre ad un carattere che è $= 1$ ed a cui per conseguenza bisognerà fermarsi: tolto, s'intende, il caso che il punto O stia su una *linea multipla* o su una *parte multipla* di F (e quindi abbia, si può dire, infiniti punti multipli *successivi*). Se si tien conto che $s \geq s'_i \geq s''_{ik} \geq s'''_{ikl}, \ldots$, si vede che affinchè questa serie si proseguisse indefinitamente dovrebbe accadere che da un certo carattere in poi tutti quanti fossero uguali fra loro. Ora, se si suppone ad esempio che i primi h caratteri della serie siano uguali ad s, si può dimostrare che h è inferiore ad un determinato limite finito.

---

(4) Non occorre dire che con ciò non si hanno ancora *tutti* i caratteri che sono da studiare nei punti singolari delle superficie algebriche! Così le singolarità del cono tangente in O ad F (cioè della curva piana c' di F') potranno spesso fornire dei nuovi caratteri; ecc. Anche pei punti singolari delle curve piane si sa che oltre ai caratteri $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$, vi son da considerare le *diramazioni*; pei punti singolari delle superficie vi son cose analoghe. — Ciò apparirà anche dal seguito.

Ciò appare intuitivo, quando si considerino quei caratteri come multiplicità di punti successivi della superficie F e si profitti di quanto vedremo in seguito sui rami di curva passanti per tali punti. Invero se vi fossero infiniti caratteri uguali ad s si avrebbero su F infiniti punti s-pli infinitamente vicini ad O e succedentisi sopra un ramo di curva algebrica (ordinaria, s'intende: non infinitesima); il che non è possibile se non quando O (con quei punti) stia su una linea s-pla di F. Ma una dimostrazione più completa e rigorosa di quel fatto si può trovare in una Memoria del sig. KOBB, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (5). In base ad essa noi possiamo ritenere come assodata la proposizione enunciata.

Incontri della superficie con un ramo di curva algebrica.

4. I caratteri che abbiam definiti per il punto singolare O della superficie algebrica F servono ad esprimere il numero delle intersezioni coincidenti in O di quella superficie con una curva algebrica che sia obbligata a passare per O, a *toccare* F in O, ad *osculare* F in O, ecc. Con ciò, oltre all'utilità immediata dei risultati che si ottengono per tali questioni di contatti, si raggiunge pure il vantaggio di una nuova interpretazione dei suddetti caratteri, indipendente dalle trasformazioni quadratiche con cui da prima li abbiamo definiti, e tale da giustificare meglio le locuzioni relative a punti multipli infinitamente vicini, o successivi, di F.

Il numero delle intersezioni (o la multiplicità d'intersezione) in O della superficie F con una curva algebrica passante comunque per O è, come si sa, la somma delle multiplicità d'intersezione in O di F coi diversi *rami* (sottint. *completi*), o *cicli*, di quella curva passanti per O (aventi l'origine in O (6)). Ne segue che per la que-

(5) Journal de math., (4) 8, 1892. Ivi si rappresenta il *campo* della superficie F che circonda il punto singolare O sui campi di un numero finito di superficie algebriche che circondano certi punti semplici (in numero finito) di queste. A tal fine si applicano ad F successive trasformazioni quadratiche speciali per abbassare la multiplicità del punto O. E si dimostra che un abbassamento, dopo un conveniente numero di trasformazioni, dovrà sempre verificarsi, mediante un calcolo simile a quello che per la corrispondente questione sulle curve piane usava il sig. WEIERSTRASS nelle sue lezioni.

(6) Ricordo (WEIERSTRASS, HALPHEN, ecc.) che un *ramo* completo, o ciclo, di una curva algebrica è l'insieme dei punti (complessi) di questa costituenti un tale intorno di uno O di essi (origine) che mediante una trasformazione birazio-

stione di cui ora si tratta basterà studiare gl'incontri in O di F con *un ramo* di curva uscente da O.

Abbiasi dunque su una curva algebrica un ramo uscente da O: e sia un ramo di 1.° ordine, o *lineare.* Lo indicheremo per brevità con lo stesso simbolo γ che ci servirà ad indicare la curva. In generale il numero delle sue intersezioni con F (s'intende, in O) è uguale alla multiplicità s di O per F. Eccezione si ha solo quando la tangente al ramo (in O) sia pur tangente in O ad F. Per indagare di quanto s'aumenta allora la multiplicità dell'intersezione si ritorni alla trasformazione quadratica del n.° 1. Consideriamo la curva γ' che mediante essa corrisponde a γ; al ramo lineare suddetto di γ corrisponderà un ramo lineare di γ' che taglia (non *tocca*) il piano ω' nel punto di questo che corrisponde alla direzione della tangente in O al ramo γ. Alle intersezioni della curva γ con F fuori di O corrispondono le intersezioni della curva γ' con F' fuori del piano ω'. Se il ramo γ viene ad avere per tangente la retta t tangente in O ad F, il corrispondente ramo γ' verrà a passare pel punto O' s'-plo per F' (n.° 1): e quindi in O' verranno a cadere s' intersezioni della curva γ' e di F' che prima cadevano fuori di ω'; donde segue che in O verranno a cadere s' fra le intersezioni della curva γ con F che prima cadevano fuori di O. Giungiamo così alla seguente proposizione: *se ad una tangente* t *di* F *in* O *spetta, nel senso del n.° 1, il carattere* s', *ogni ramo lineare di*

---

nale si possano far corrispondere ad un conveniente intorno di un punto *semplice* di un'altra curva algebrica. L'*ordine* di un ramo è il numero delle sue intersezioni con un piano che passi abbastanza vicino all'origine del ramo, pur facendo un angolo finito con la tangente (se poi quest'angolo è inferiore ad un certo limite quel numero subisce un incremento uguale al *rango* del ramo; ed un ulteriore aumento uguale alla *classe* del ramo subisce se il piano è abbastanza prossimo al piano osculatore). La multiplicità d'intersezione in O del ramo con una superficie passante per O è il numero delle intersezioni del ramo con la superficie stessa dopo uno spostamento infinitesimo (generico) di questa in seguito a cui essa non passi più per O. — Si sa che per rappresentare analiticamente il ramo si posson esprimere le coordinate dei suoi punti come serie di potenze intere positive di un parametro t per modo che l'origine O del ramo corrisponda a $t = 0$ ed ogni punto del ramo corrisponda ad un sol valore di t, di modulo abbastanza piccolo. Allora l'ordine del ramo sarà dato dal minimo esponente non nullo di t che compaja nelle dette serie; e più in generale la multiplicità d'intersezione in O del ramo con una superficie $F(x\,y\,z) = 0$ sarà il minimo esponente di t che comparirà in F quando in luogo delle coordinate si pongano quelle loro espressioni in serie di t.

curva algebrica passante per O *e tangente ivi a* t *incontra la superficie* F *in* O $s + s'$ *volte, in generale.*

5. Questa multiplicità d'intersezione $s + s'$ è quella che deriva dalle *due condizioni* pel ramo γ di passare per O e di esser *tangente* ad F e più precisamente alla t. Con una *terza condizione*, di *osculazione*, si otterrà una maggior multiplicità d'intersezione. Per questo fine si ricordi che l'eccesso su s della multiplicità d'intersezione in O del ramo γ con F è uguale alla multiplicità d'intersezione in O' del ramo γ' con F'; e d'altra parte per avere quest'ultima multiplicità si applichi la proposizione ottenuta dianzi cambiando F, γ, O in F', γ', O'. Perchè la multiplicità d'intersezione di F col ramo γ tangente a t sia diversa e quindi maggiore di $s + s'$ occorrerà e basterà che il ramo γ' tocchi in O' la superficie F': se il contatto avviene secondo una tangente t', *esterna ad* ω', cui corrisponda, nel senso del n.⁰ 2, un carattere s'', la multiplicità d'intersezione di F' col ramo γ' sarà in generale $s' + s''$, e per conseguenza la multiplicità d'intersezione di F col ramo γ sarà, in generale, $s + s' + s''$. — Alla tangente t' di F' in O' corrisponde per la trasformazione quadratica nel 1.⁰ spazio una conica (*cerchio* rispetto a q come assoluto) osculatrice a F in O: a questa si potrebbe riferire il carattere s'' di t'; e si avrebbe allora che un ramo lineare γ tangente in O a t viene ad incontrare F in O più che $s + s'$ volte quando diventi osculatore ad una tal conica, nel qual caso la multiplicità d'intersezione diventa in generale $s + s' + s''$, se s'' è il carattere spettante a quella conica.

Applicando di nuovo questo risultato con la sostituzione di F' ed O' ad F ed O, e così continuando indefinitamente, si ottiene la proposizione seguente:

Un ramo lineare che sia obbligato a toccare la superficie F *nel punto* s*-plo* O *avrà ivi con essa in generale un incontro* $(s + s'_i)$*-punto, essendo* s'_i *il carattere di quella tangente di* F *in* O *che il ramo verrà a toccare. — Perchè la multiplicità dell'intersezione venga a superare* $s + s'_i$ *senza che muti quella tangente basterà una condizione: e la multiplicità diverrà in generale* $s + s'_i + s''_{ik}$ *(per un certo* k*). Tutti i rami lineari osculatori, cioè a contatto tripunto, con uno siffatto daranno quella stessa multiplicità d'intersezione con* F*, in generale. — Se poi si vuole che uno di questi rami abbia una maggior multiplicità d'intersezione, s'imporrà con ciò una nuova condizione, e si troverà in generale la multiplicità* $s + s'_i + s''_{ik} + s'''_{ikl}$ *(per un certo* l*); e la stessa si avrà per tutti i rami lineari che hanno con quello un contatto* *quadripunto. — E così via; finchè si arrivi ai caratteri che sono* $=1$: *allora occorre sempre una nuova condizione per aumentare solo di* 1 *la multiplicità d'intersezione del ramo con* F.

Appare ora evidente che, riguardo alla multiplicità dell'intersezione coi rami lineari passanti per O, la superficie F si comporta esattamente come se avesse per successivi al punto s-plo O, sulle varie tangenti, dei punti con le multiplicità rispettive s'_i, e poi come successivi a questi dei punti con le multiplicità s''_{ik}, ecc. ecc.: appunto come già avevamo convenuto di dire alla fine del n.^{0} 2. E si vede pure come si possano assegnare dei rami di curva — lineari nei casi finora considerati — sui quali si può dire che stanno e son successivi il punto s-plo O, un punto s'_i-plo, un punto s''_{ik}-plo, ..., di F.

6. A quanto abbiam detto nel precedente num.^{0} occorre in certi casi una modificazione, proveniente da ciò che i rami γ ivi considerati, per le condizioni a cui vengono assoggettati in relazione alla superficie F, cessano necessariamente di essere lineari.

Per bene intender ciò convien da prima osservare in qual modo si trasformi per successive trasformazioni quadratiche un ramo qualunque di curva algebrica. Sia γ questo ramo, O la sua origine, ν il suo ordine. Nella 1.^{a} trasformazione quadratica a γ corrisponderà un ramo γ' uscente dal punto O' che corrisponde sul piano ω' alla direzione della tangente t di γ in O. Si vede subito che ω' avrà in O' con γ' un incontro multiplo secondo ν (cioè che ν saranno le intersezioni di γ' con un piano abbastanza prossimo ad ω'). Ne segue che il ramo γ' sarà d'ordine $\nu' \leq \nu$. Per una convenzione, che si giustifica in modo già visto, diremo che sul ramo γ, infinitamente vicino (successivo) al punto O multiplo secondo ν, vi è un punto multiplo secondo ν'. Sarà $\nu' < \nu$ solo quando il piano ω' sia tangente a γ', cioè ne contenga la tangente t'. Considerando le intersezioni di γ coi piani passanti per O e vicinissimi a t, alle quali corrispondono nel 2.^{0} spazio le intersezioni di γ' coi piani passanti pel punto fondamentale A' esterno ad ω' e vicinissimi ad O', si vede che il numero ν' si può anche interpretare come il *rango* del ramo γ (cioè che la tangente t ha con γ un incontro multiplo secondo $\nu + \nu'$); tranne il caso che t' passi pel detto punto fondamentale A', il che esige che sia $\nu' = \nu$ e che il rango di γ superi l'ordine. — In ogni caso, se trasformando γ' con una nuova trasformazione quadratica avente un punto fondamentale in O' si ottiene un ramo γ'' d'ordine ν''; e trasformando ancora questo in modo analogo otteniamo un ramo d'ordine ν'''; e così via: noi diremo che sul ramo primitivo γ, successivi al punto ν-plo O, vi sono punti di multiplicità $\nu', \nu'', \nu''', \ldots$ Si sa (e risulta subito colla projezione da una proposizione nota sui rami di curve piane) che queste multiplicità da un punto in poi sono tutte $=1$.

Ciò premesso, ritorniamo alle considerazioni del n.º 5, e supponiamo che quella tangente t' nel punto s'_i-plo O' della superficie F' che noi vogliamo considerare, ed alla quale si riferisce il carattere s''_{ik}, non sia più esterna al piano ω', come ivi si era supposto, ma invece vi giaccia. Allora volendo che il ramo lineare γ', che pel semplice passare per O' vi avrebbe incontro s'_i-punto con F', venga ad avere per tangente la t' e così un incontro con F' multiplo secondo $s'_i + s''_{ik}$, bisognerà che il ramo γ cessi di esser lineare, diventi invece di 2.º ordine (almeno). Non è più possibile dunque, coll'aggiunta di due nuove condizioni, di contatto con t e di una certa osculazione, corrispondenti ai caratteri s'_i e s''_{ik}, ottenere una serie di rami lineari passanti per O ed aventi ivi l'intersezione con F multipla secondo $s + s'_i + s''_{ik}$. Per avere qualcosa di analogo bisogna ricorrere a rami di 2.º ordine (almeno). Mentre un ramo di 2.º ordine uscente da O v'incontra F in generale con multiplicità $2s$, i rami di 2.º ordine che han per tangente t dànno la multiplicità d'intersezione $2s + s'_i$, e quelli che hanno quella certa osculazione che stiamo considerando dànno la multiplicità d'intersezione $2s + s'_i + s''_{ik}$. Si può dire (badando ai corrispondenti rami γ') che tutti questi rami di 2.º ordine hanno comuni oltre al punto O altri due punti successivi. E considerando F diciamo che i caratteri s'_i, s''_{ik} sono le multiplicità per F di due punti successivi ad O tali che per O e per essi non passano rami lineari di curve algebriche (ad esempio non passa un cerchio), mentre passano infiniti rami di 2.º ordine.

Se sulla F' sono successivi su rami lineari γ' il punto O' s'_i-plo, un punto multiplo secondo s''_{ik} nella tangente t' giacente in ω', e poi ancora altri punti di multiplicità $s'''_{ikl}, \ldots$, potremo dire in generale che su F sono successivi su rami di 2.º ordine il punto O e poi punti di multiplicità $s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$ — Però se più di due, successivi, dei punti nominati di F', ad esempio ν successivi di essi, giacciono in ω', sicchè i rami lineari γ' che li contengono hanno in O' incontro ν-punto con questo piano, i corrispondenti rami γ del 1.º spazio verranno ad essere non più del 2.º ordine, ma d'ordine ν. Su F il punto s-plo O ed i punti di multiplicità $s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$ (questi in numero di ν almeno) si potranno considerare come successivi su rami di ordine ν (almeno), e non su rami d'ordine minore.

Supponiamo ora invece che su F' il punto O' s'_i-plo e poi dei punti successivi multipli secondo $s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$, non stiano su rami lineari, ma invece su rami γ' del 2.^{0} ordine; e sia anzitutto la tangente t' di questi rami esterna al piano ω'. Allora i rami γ corrispondenti del 1.^{0} spazio saranno in generale di 2.^{0} ordine e di 2.^{0} rango; si potrà dire che su F si hanno, come successivi al punto O, dei punti multipli secondo $s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$, su rami che non possono essere nè lineari, nè del 2.^{0} ordine e 1.^{0} rango, ma sono in generale di ordine e rango 2, cioè hanno due punti doppi successivi in O e nel punto s'_i-plo. — Se invece la tangente t' dei suddetti rami del 2.^{0} ordine γ' giace in ω', i rami γ saranno in generale del 3.^{0} ordine e di 2.^{0} rango: sicchè il punto O ed i punti multipli successivi secondo $s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$, non si potranno più considerare come situati nè su rami lineari, nè su rami del 2.^{0} ordine; ma invece su rami del 3.^{0} ordine (almeno) che oltre ad avere in O il punto triplo hanno nel successivo un punto doppio.

Questi esempi bastano per far vedere come qualunque serie di caratteri $s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$, relativa al punto s-plo O di F, ottenuta mediante le successive trasformazioni quadratiche dei n.^{i} 1 e 2, si possa veramente considerare come serie di multiplicità di punti successivi di F situati su convenienti rami di curve algebriche: con l'avvertenza che questi rami possono per il solo fatto del passare per quei punti venire di conseguenza ad avere in essi certe multiplicità $\nu, \nu', \nu'', \nu''', \ldots$ (almeno). — Quanto alla multiplicità d'intersezione in O di F con tali rami, essa si esprime come se quei punti fossero punti multipli distinti, cioè con la formola:

$$\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \nu''' s'''_{ikl} + \ldots$$

Ciò si dimostra subito ammettendo vera la proposizione quando vi è un punto di meno. Se il ramo $\gamma(\nu, \nu', \nu'', \ldots)$ uscente da O non è tangente ad F la multiplicità della sua intersezione con F è solo νs. Ma se esso si muove in modo che i suoi punti successivi ad O vengano nei punti successivi considerati di F, vale a dire che il corrispondente ramo $\gamma'(\nu', \nu'', \ldots)$ venga a passare per O' e pei punti successivi considerati di F', $\nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \ldots$ intersezioni di γ' e di F' verranno a cadere in O', e quindi in O cadranno $\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \ldots$ intersezioni di γ e di F.

Scomposizione di alcuni punti singolari.

7. Volendo trattare alcuni esempi di scomposizione di punti singolari, conviene da prima ricordare, per quel che riguarda il carattere s' di una tangente t ad F nel punto s-plo O, cioè la multiplicità s' del punto di F che è successivo ad O su t, che (n.° 1) s' non può superare la multiplicità di t pel cono tangente in O ad F; mentre d'altra parte è evidente dalle cose precedenti che s' non può superare l'eccesso su s della multiplicità d'intersezione di F con t. Dunque: *possono contenere punti multipli di* F *infinitamente vicini al punto* s*-plo* O *solo quelle generatrici del cono d'ordine* s *tangente ad* F *in* O *che sono multiple per questo cono e che in* O *hanno con* F *un incontro più che* (s + 1)*-punto.*

Viceversa se la t è almeno doppia per quel cono tangente, e delle sue intersezioni con F almeno $s+2$ cadono in O, il punto O' di F' a cui essa dà origine (secondo il n.° 1) sarà almeno doppio per la linea c' cioè per la sezione di F' col piano ω' e conterà almeno 2 volte fra le intersezioni di F' con la retta $A'O'$ (esterna ad ω'): e però O' sarà almeno doppio per F'. *Sulla superficie* F *con punto* s*-plo* O *vi è un punto doppio infinitamente vicino a questo su ogni retta che sia doppia pel cono tangente in* O *ad* F *ed abbia con questa in* O *un incontro* (s + 2)*-punto.* — Se l'equazione della superficie, in coordinate non omogenee, riferita ad O come origine, è:

$$\varphi_s + \varphi_{s+1} + \varphi_{s+2} + \ldots = 0 ,$$

dove le φ sono forme degli ordini indicati dai loro indici, le rette che contengono i punti doppi di F infinitamente vicini (successivi) ad O saranno quegli elementi doppi di $\varphi_s = 0$ che verificano l'equazione $\varphi_{s+1} = 0$ [7].

---

(7) Cfr. il n.° 10 ed una nota che vi è annessa.

Nel seguito, per assegnare le singolarità delle sezioni piane di F passanti per la tangente t in O, ci serviremo spesso del fatto che quelle curve han per corrispondenti nella trasformazione quadratica spaziale le sezioni piane di F' passanti per la retta $A'O'$. Così, per mostrar subito un'applicazione di ciò, poniamo che il punto singolare O di F consti di un punto s-plo a cui sia infinitamente vicino un punto doppio nella direzione t, senz'altra particolarità; cosicchè il punto O' sarà per F' un punto doppio ordinario. Allora fra le sezioni piane di F' passanti per $A'O'$, le quali avranno in generale in O' un nodo, si considerino quelle che passano rispettivamente per le due rette tangenti in O' alla linea c', ed anche quelle che hanno in O' una cuspide e che son date dai due piani tan-

8. Applicando ciò ai *punti doppi*, abbiamo: perchè ad un punto doppio O di F sia infinitamente vicino nella direzione t un altro punto doppio di F occorre e basta che il cono quadrico tangente in O si spezzi in due piani (distinti o no) passanti per t, e che inoltre questa retta abbia incontro quadripunto con F. Dunque l'insieme di due punti doppi successivi ($s = 2$; $s' = 2$), senz'altra particolarità, è dato dal *punto biplanare il cui asse sia tangente quadripunta.*

Perchè poi infinitamente vicini al punto doppio O di F, in due direzioni distinte t_1, t_2, vi siano altri punti doppi sarà necessario e sufficiente che il cono quadrico tangente in O si riduca al piano di $t_1 t_2$ contato due volte, e che inoltre queste due rette siano tangenti quadripunte. Ora in un punto uniplanare esistono in generale 3 tangenti quadripunte. Dunque: *Un punto uniplanare si può considerare come un punto doppio a cui sono infinitamente vicini in direzioni diverse 3 altri punti doppi* ($s = 2$; $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 2$). *Quando ad un punto doppio siano infinitamente vicini in direzioni distinte altri due punti doppi, ve ne sarà ancora in generale un terzo, e si avrà il punto uniplanare* (8).

Quest'ultima proposizione è il più semplice esempio di un fatto notevole, cioè che dall'essere su una superficie F infinitamente vicini ad un punto s-plo O alcuni punti multipli può venir di conseguenza l'esistenza su F di altri punti multipli infinitamente vicini ad O. Così dall'esistere sul cono φ_{s+1} (n.° 7) alcune rette doppie del cono φ_s può seguire l'esistenza di altre. Un esempio nuovo è quello di un punto quadruplo di F a cui siano infinitamente vicini su altrettante direzioni indipendenti fra loro 5 punti doppi: allora il cono tangente ad F dovrà ridursi al cono quadrico contenente

---

genti ad F' in O' passanti per A'. Mediante la trasformazione quadratica si ottiene quanto segue. *Le sezioni di* F *con piani generici condotti per la tangente singolare* t *passano per* O *con* s *rami lineari, due dei quali son tangenti a* t; *però per ognuno dei due piani tangenti lungo* t *al cono tangente ad* F *in* O *sono tangenti a* t *un ramo lineare ed un ramo di 2.° ordine (ordinario); e per ciascuno di altri due piani in luogo di due rami lineari tangenti a* t *si ha un ramo di 2.° ordine e 2.ª classe* (la *classe* intesa nel senso della teoria dei rami di *curve piane*, cioè il *rango* se la curva si considera *nello spazio*).

(8) Applicando, ad esempio, al punto doppio uniplanare l'osservazione contenuta nella nota precedente, abbiamo che, mentre le sezioni piane generiche della superficie condotte per una delle tre tangenti quadripunte hanno in O un tacnodo, vi sono in generale due piani (diversi dal piano tangente) i quali dànno sezioni aventi in O un regresso di 2.ª specie.

quelle 5 direzioni, contato due volte; e questo conterrà altre 5 tangenti sipunte, sulle quali dunque staranno 5 nuovi punti doppi di F infinitamente vicini al punto quadruplo.

9. Per rappresentare e studiare analiticamente specie particolari di punti singolari convien ricorrere ad una speciale trasformazione quadratica; nella quale, indicando con $(x\,y\,z)$, $(x'\,y'\,z')$ due punti corrispondenti, si ha:

(1) $$x = x'z', \qquad y = y'z', \qquad z = z' \text{ (9)}.$$

Nel 1.° spazio il punto fondamentale O è nell'origine, il piano ω e la conica fondamentale q giacente in esso sono il piano all'infinito e la retta all'infinito di $z = 0$ contata due volte. Nel 2.° spazio il punto fondamentale A' è il punto all'infinito dell'asse delle z', il piano ω' e la conica fondamentale q' sono il piano $z' = 0$ e la sua retta all'infinito contata due volte. Così ai punti infinitamente vicini ad O nelle varie direzioni corrispondono nel 2.° spazio i punti del piano $z' = 0$; in particolare alle direzioni uscenti da O nel piano $z = 0$ corrispondono i punti all'infinito di $z' = 0$, mentre alla direzione dell'asse Oz corrisponde l'origine O'.

Eseguendo la trasformazione (1) sulla superficie F con punto s-plo in O:

(2) $$F \equiv \varphi_s(x\,y\,z) + \varphi_{s+1}(x\,y\,z) + \varphi_{s+2}(x\,y\,z) + \ldots = 0,$$

viene, tolto il fattore z'^s:

(3) $$F' \equiv \varphi_s(x'\,y'\,1) + z'\varphi_{s+1}(x'\,y'\,1) + z'^2\varphi_{s+2}(x'\,y'\,1) + \ldots = 0.$$

I punti di F infinitamente vicini ad O fuori del piano $z = 0$ corrispondono ai punti al finito di F' situati sul piano $z' = 0$, e quindi sulla curva $\varphi_s(x'\,y'\,1) = 0$. Se l'asse delle z è tangente in O ad F, il punto di F successivo ad O su di esso corrisponderà al punto O' di F'; sarà allora $\varphi_s(0\;0\;1) = 0$. Il carattere s', cioè la multiplicità per F di quel punto successivo ad O, o la multiplicità di O' per F', si riconoscerà subito sull'equazione (3) di F': si vede così che: *affinchè la superficie* F *data dall'equazione* (2) *abbia, infinitamente vicino al punto* s*-plo* O, *un punto multiplo secondo* s′ *nella direzione dell'asse delle* z, *occorre e basta che nelle forme* $\varphi_s, \varphi_{s+1}, \ldots$,

(9) È analoga alla trasformazione quadratica speciale del piano che serve utilmente nell'analisi delle singolarità delle curve piane. — Anche il sig. Kobb nella Memoria citata al n.° 3 ricorre a trasformazioni del tipo della (1).

$\varphi_{s+s'-1}$ *tutti i termini contengano* x y *(complessivamente) almeno ai gradi rispettivi* s', s' — 1, ..., 1 (10).

10. Ad esempio, perchè su F, nella direzione dell'asse delle z, infinitamente prossimo al punto s-plo O, vi sia un punto doppio, devono essere φ_s solo di grado $s-2$ (al più) e φ_{s+1} solo di grado s (al più) rispetto alla z. Questo risultato equivale a quello del n.º 7 (11).

Applicandolo ripetutamente, cioè esprimendo per mezzo di esso che sulla superficie F' data da (3) vi è infinitamente vicino al punto doppio O', in una direzione assegnata, un nuovo punto doppio, e così continuando, si ottengono le equazioni di F in casi di singolarità O sempre più complicate. Così: mantenendo le condizioni

---

(10) La superficie F con un'equazione siffatta è pure considerata dal sig. NOETHER in una Nota citata in principio (Götting. Nachrichten, 1871, p. 272, caso b); ove, alla fine della pagina, in luogo di $\nu - 1$ si deve leggere $\nu - i$). Ivi si trova pure applicata una trasformazione quadratica spaziale a quella superficie (e ad altre); ciò allo scopo di determinare l'influenza del punto singolare O sul *genere superficiale.*

(11) Partiamo dall'ipotesi che F abbia un punto s-plo in O ed un punto doppio in un punto dell'asse delle z, cioè in $(0\ 0\ \varepsilon)$. Sarà, ordinando le forme φ della (2) secondo le potenze discendenti di z:

$$F \equiv (az^s + a_1 xz^{s-1} + a_2 yz^{s-1} + \ldots) + (bz^{s+1} + b_1 xz^s + b_2 yz^s + \ldots) + \\ + (cz^{s+2} + c_1 xz^{s+1} + c_2 yz^{s+1} + \ldots) + \ldots = 0 ;$$

e le condizioni relative al punto doppio $(0\ 0\ \varepsilon)$, ossia che in questo punto si annullino F e le sue tre prime derivate, daranno:

$$\begin{aligned} a\ \varepsilon^s + b\ \varepsilon^{s+1} + c\ \varepsilon^{s+2} + \ldots &= 0 \\ a_1 \varepsilon^{s-1} + b_1 \varepsilon^s + c_1 \varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0 \\ a_2 \varepsilon^{s-1} + b_2 \varepsilon^s + c_2 \varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0 \\ sa\ \varepsilon^{s-1} + (s+1)\, b\ \varepsilon^s + (s+2)\, c\ \varepsilon^{s+1} + \ldots &= 0 , \end{aligned}$$

ossia (combinando la 1.ª con la 4.ª, e dividendo per potenze di ε):

$$\begin{aligned} b + 2c\,\varepsilon + \ldots &= 0 \\ a_1 + b_1 \varepsilon + \ldots &= 0 \\ a_2 + b_2 \varepsilon + \ldots &= 0 \\ sa + (s+1)\, b\,\varepsilon + \ldots &= 0 . \end{aligned}$$

Facciamo ora avvicinare indefinitamente il punto doppio al punto s-plo O, cioè facciamo tendere ε a zero: al limite avremo le condizioni:

$$a = a_1 = a_2 = b = 0 ,$$

cioè ritroviamo ancora il risultato di sopra.

precedenti, in seguito a cui O' è punto doppio per F', imponiamo ad F' di avere infinitamente vicino ad O' sull'asse delle y' un nuovo punto doppio. Ciò equivarrà a dire che nell'equazione di F' l'insieme dei termini di 2.° grado (cioè l'analogo della forma φ_s relativa ad F) non contiene y', mentre l'insieme dei termini di 3.° grado (analogo di φ_{s+1}) manca del termine in y'^3. Dalle condizioni precedenti per l'equazione (2) e da queste nuove per la (3) segue subito che F sarà del tipo seguente:

$$(4)\quad \begin{cases} F \equiv [\alpha_0 x^2 z^{s-2} + xz^{s-3}\alpha_2 + z^{s-4}\alpha_4 + z^{s-5}\alpha_5 + \ldots] + \\ + [\beta_0 xz^s + z^{s-1}\beta_2 + z^{s-2}\beta_3 + \ldots] + \varphi_{s+2} + \varphi_{s+3} + \ldots = 0, \end{cases}$$

dove le α e le β sono forme binarie in $x\,y$ degli ordini indicati dai loro indici. Osservando che l'asse delle y' su cui abbiam posto il secondo punto doppio di F' sta nell'attuale piano ω' (cioè $z' = 0$), si vede che il caso in cui ora ci troviamo rientra fra quelli considerati al n.° 6: *la superficie* (4) *ha in* O *un punto singolare composto di un punto* s*-plo a cui sono infinitamente vicini due punti doppi, per modo che questi tre punti son successivi su rami di 2.° ordine di curve algebriche e non su rami lineari.* Si vede subito o geometricamente oppure con l'equazione (4) che quella singolarità si può anche caratterizzare dicendo che O è un punto s-plo tale che il cono tangente in esso (φ_s) ha una generatrice tacnodale (Oz) lungo cui è toccato dal cono φ_{s+1}. Considerando una tal generatrice come equivalente a due generatrici doppie infinitamente vicine per le quali passi φ_{s+1}, si rende evidente come la singolarità di F in O si possa riguardare come proveniente da un punto s-plo a cui sono infinitamente vicini due punti doppi in direzioni diverse le quali però si avvicinino indefinitamente: con che diventa pure intuitivo il fatto che non esistono rami lineari passanti per quei tre punti.

11. Come altro esempio consideriamo il caso che al punto s-plo O di F siano infinitamente vicini in diverse direzioni *infiniti* punti doppi. Chiamando $\tau_h = 0$ il cono costituito da quelle direzioni, risulta da quanto s'è visto che φ_s conterrà il fattore τ_h^2 e φ_{s+1} conterrà il fattore τ_h: onde l'equazione della superficie F sarà del tipo:

$$(5)\quad F \equiv \tau_h^2(x\,y\,z)\cdot\psi_{s-2h}(x\,y\,z) + \tau_h(x\,y\,z)\cdot\psi_{s-h+1}(x\,y\,z) + \\ + \varphi_{s+2}(x\,y\,z) + \ldots = 0.$$

Con la trasformazione quadratica speciale del n.° 9 la superficie trasformata F' sarà:

$$F' \equiv \tau_h^2(x'y'1) \cdot \psi_{s-2h}(x'y'1) + z'\tau_h(x'y'1) \cdot \psi_{s-h+1}(x'y'1) + \\ + z'^2\varphi_{s+2}(x'y'1) + \ldots = 0\,,$$

ed avrà, in corrispondenza ai punti doppi di F successivi ad O, la linea doppia:

$$z' = 0\,, \qquad \tau_h(x'y'1) = 0\,.$$

I punti notevoli per F' su questa linea sono i punti *cuspidali* (cfr. n.⁰ 13); i quali, come subito si vede, son determinati sulla linea dall'equazione:

$$\psi_{s-h+1}^2(x'y'1) - 4\psi_{s-2h}(x'y'1) \cdot \varphi_{s+2}(x'y'1) = 0\,,$$

e però sono in numero di $2h(s-h+1)$. Ognuno di essi ha (come vedremo, n.⁰ cit.) infinitamente vicino, fuori della linea doppia, *un* punto doppio di F'. Dunque risalendo alla F concludiamo: *se la superficie* F *ha un punto singolare composto di un punto* s*-plo a cui è infinitamente vicina una linea doppia infinitesima d'ordine* h (*sicchè l'equazione di* F *sia del tipo* (5)), *essa avrà poi ulteriormente, infinitamente vicini a questa, altri* 2h(s — h + 1) *punti doppi.*

Le direzioni di questi punti doppi di F sarebbero date da:

$$\tau_h = 0\,, \qquad \psi_{s-h+1}^2 - 4\psi_{s-2h} \cdot \varphi_{s+2} = 0\,.$$

Scomparirebbero quando tra le forme che entrano nell'equazione (5) avesse luogo un'identità del tipo:

$$\psi_{s-h+1}^2 - 4\psi_{s-2h} \cdot \varphi_{s+2} = \tau_h \cdot \psi_{2s-3h+2}\,.$$

Allora sulla superficie F' la linea doppia considerata diverrebbe una linea cuspidale; i suoi punti generici non avrebbero per successivi nuovi punti doppi di F': ciò accadrebbe solo per certi punti singolari di cui ci occuperemo fra poco (*punti chiusi*, n.⁰ 17).

Applicazioni a varie specie di punti doppi.

12. Esaminiamo ora in particolare alcuni casi speciali di punti doppi.

Per quanto riguarda la composizione dei *punti biplanari* non aggiungeremo nulla a quanto già s'è accennato al n.⁰ 8. Osserveremo solo che quando, per effetto di una 1.ª trasformazione quadratica, si passa dal punto biplanare O di F ad un punto doppio O' di F', questo dovrà essere necessariamente nell'incrocio delle due rette distinte che costituiscono in questo caso la linea c'; e se pure su F' vi è un punto doppio successivo ad O', la sua direzione sarà certo esterna al piano ω'. Facendo una 2.ª trasformazione quadratica per O' di F', e così via, vediamo che *un punto biplanare può risultare composto di un numero qualunque* k *di punti doppi, i quali però si potranno sempre congiungere con un ramo lineare di curva algebrica* (nè potranno essere uniplanari, tacnodi, ecc.) ([12]).

Prendiamo in esame i *punti uniplanari*, pei quali s'è già vista al n.^{0} 8 la composizione che hanno in generale. Partiamo dall'equazione di una superficie F avente in O un punto uniplanare, col piano tangente $x=0$ e coll'asse delle z per una delle 3 tangenti quadripunte che vi sono in generale; sicchè su quest'asse stia un punto doppio di F successivo ad O. Sarà:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F \equiv a x^2 &+ [(a_1 x + a_2 y) z^2 + (a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2) z + \alpha_3] + \\ &+ [bz^4 + (b_1 x + b_2 y) z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4] + \\ &+ [cz^5 + \gamma_1 z^4 + \gamma_2 z^3 + \dots] + \varphi_6 (x y z) + \dots = 0 , \end{aligned}\right.$$

dove le α, β, γ sono forme binarie in xy degli ordini indicati dai loro indici. Con la trasformazione quadratica speciale (n.^{0} 9) otteniamo:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F' \equiv a x'^2 &+ z' [a_1 x' + a_2 y' + a_3 x'^2 + a_4 x'y' + a_5 y'^2 + \alpha'_3] + \\ &+ z'^2[b + b_1 x' + b_2 y' + \beta'_2 + \beta'_3 + \beta'_4] + \\ &+ z'^3[c + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \dots] + z'^4 \varphi_6 (x' y' 1) + \dots = 0 , \end{aligned}\right.$$

dove α'_3 sta per $\alpha_3 (x'y')$, ecc. Una prima particolarità si può introdurre rendendo biplanare il punto doppio O' di F'. Si vede subito sull'equazione (2) (tenendo conto che essenzialmente è $a \neq 0$) che la condizione perchè ciò accada è

$$(3)\qquad a_2 = 0 ;$$

e questa equivale a dire, come si vede sulla (1), che nell'asse delle z coincidono due delle 3 tangenti quadripunte di F in O. La coppia

---

([12]) Cfr. ROHN, *Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte*, Math. Ann., XXII, 1883. In questo lavoro vengono anche considerati i punti biplanari ed uniplanari superiori come equivalenti a più punti doppi infinitamente vicini; non però con l'applicazione di trasformazioni quadratiche, ma invece mediante la considerazione delle singolarità che quei punti producono nel cono circoscritto alla superficie da un punto generico (v. nel seguito del presente scritto il n.^{0} 23), ecc.

di piani tangenti ad F' nel punto biplanare O' è data da:

$$ax'^2 + a_1 x'z' + bz'^2 = 0\,, \tag{4}$$

ed ha per asse l'asse delle y', il quale giace su F': ne segue che F' ha su questa retta un secondo punto doppio infinitamente vicino ad O'. Abbiamo così che: *quando per un punto uniplanare* O *di* F *due delle 3 tangenti quadripunte coincidono (e solo allora), due dei 3 punti doppi che in generale son successivi ad* O *in direzioni diverse (n.° 8) vengono ad essere successivi l'uno all'altro in una stessa direzione, essendo congiunti ad* O *mediante rami di 2.° ordine; la composizione di* O *diventa:*

$$(s = 2\,; \qquad s_1' = s_2' = 2\,; \qquad s_1'' = 2)\,.$$

Come si vede, questo caso si ottiene per $s = 2$ dal caso che nel n.° 10 era rappresentato dall'equazione (4).

13. Se su una superficie F vi è una linea doppia (nodale), e s'indica con O un *punto cuspidale (pinch-point; point pince)* di F appartenente a quella linea, cioè un punto di questa pel quale i due piani tangenti ad F coincidano, si vede subito che il punto O come punto uniplanare presenterà la particolarità del caso precedente. Invero nel piano tangente ad F in O la curva sezione di F avrà in O un punto triplo con due tangenti coincidenti nella tangente alla linea doppia, e quindi rimarrà oltre a quella solo una tangente quadripunta ([13]). La stessa cosa si vedrebbe pure con la trasformazione quadratica, perchè questa porta ad un punto O' di F' che è in generale biplanare, perchè sta su una linea doppia di F'. Dunque: *un ordinario punto cuspidale di una superficie, su una linea doppia di questa, ha infinitamente vicino, oltre ai punti di questa linea, un punto doppio della superficie (in direzione diversa da quella della linea doppia).*

14. Ritornando al caso del n.° 12, se supponiamo che non solo due ma tutte 3 le tangenti quadripunte di F in O coincidano nell'asse delle z, il che equivale a porre, oltre la condizione (3), la:

$$a_5 = 0\,, \tag{5}$$

avremo che il punto O' di F' si comporrà di tre punti doppi successivi situati sull'asse delle y'. *Quando per un punto uniplanare le*

([13]) Cfr., ad esempio, ZEUTHEN, *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques,* Math. Ann., X, 1876, p. 468 e seg.

tre tangenti quadripunte coincidono in una, al punto stesso sono infinitamente vicini altri 3 punti doppi della superficie (successivi) situati con quello su rami del 3.° ordine (e di 2.ª classe); la composizione del punto uniplanare diventa:

$$(s = 2 \,; \qquad s' = 2 \,; \qquad s'' = 2 \,; \qquad s''' = 2) \,.$$

15. Otteniamo un altro caso più particolare di quello del n.° 12 imponendo ad O' di essere uniplanare per F'. Ritornando alla equazione (4) della coppia di piani tangenti ad F' nel punto biplanare O', avremo che essi coincidono nel piano:

$$z' - \lambda x' = 0 \,, \tag{6}$$

se si ha:

$$a = b\lambda^2, \qquad a_1 = -2b\lambda \,. \tag{7}$$

In tali ipotesi e conservando sempre, s'intende, la condizione (3), si trova che l'intersezione di F' col piano (6) si spezza nell'asse delle y' ed una linea con punto doppio in O' e con le tangenti soddisfacenti all'equazione:

$$(a_3 + b_1\lambda + c\lambda^2)\, x'^2 + (a_4 + b_2\lambda)\, x' y' + a_5\, y'^2 = 0 \,. \tag{8}$$

Di qui si vede che il punto uniplanare O' di F' avrà in generale 3 tangenti quadripunte distinte, e quindi su F' vi saranno 3 punti doppi infinitamente vicini ad O' in 3 direzioni diverse, una delle quali è l'asse delle y'. Dunque la composizione del punto uniplanare O di F nel caso particolare attuale è espressa da:

$$(s = 2 \,; \qquad s_1' = s_2' = 2 \,; \qquad s_{11}'' = s_{12}'' = s_{13}'' = 2) \,;$$

e precisamente: su una tangente quadripunta si ha un punto doppio successivo ad O $(s_2' = 2)$; sull'altra (che conta doppiamente) se ne ha un altro $(s_1' = 2)$, il quale a sua volta ne ha altri 3 per successivi su 3 sistemi diversi di rami osculatori fra loro, tangenti a quella retta: 2 di quei sistemi essendo lineari ed uno di rami del 2.° ordine. L'equazione di F in questo caso, tenendo conto delle condizioni (3) e (7) che lo caratterizzano, prende la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} F \equiv b\,(z^2 - \lambda x)^2 &+ [\alpha_2 z + \alpha_3] + [\beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \ldots] + \\ &+ \varphi_5\,(x\,y\,z) + \varphi_6\,(x\,y\,z) + \ldots = 0 \,. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Se però si annullasse la costante a_5, cioè (n.° 14) se coincidessero tutte 3 le tangenti quadripunte in O, si vedrebbe — ricorrendo all'equazione di F' ed applicando al punto O' di questa quanto ora s'è fatto per la F e pel suo punto O — che F' ha (nella direzione dell'asse delle y' in cui coincidono due delle 3 tangenti quadripunte ad F' in O') infinitamente vicino ad O' un ulteriore punto uniplanare (a tangenti quadripunte distinte). Per conseguenza la composizione del punto singolare O di F sarebbe data allora da questi altri caratteri:

$$(s=2\,; \quad s'=2\,; \quad s_1''=s_2''=2\,; \quad s_{11}'''=s_{12}'''=s_{13}'''=2)\,.$$

Ecc. ecc.

Seguito. Tacnodi e punti doppi superiori.

16. Nei casi precedenti avevamo sempre un numero finito di punti doppi infinitamente vicini al punto doppio O. Esaminiamo ora alcuni casi in cui se ne abbiano *infiniti*.

Se essi sono *in direzioni diverse*, le sezioni piane generiche di F passanti per O avranno in questo punto un tacnodo (od una singolarità superiore): il punto O sarà per F un *punto di contatto di due falde*, o più brevemente un *tacnodo*. Sulla superficie F' saranno imagini di O gl'infiniti punti di una *retta doppia*. Siamo insomma in quel caso particolare del n.⁰ 11 che corrisponde ad $s=2$, $h=1$; e possiamo quindi applicare quanto ivi s'è detto. L'equazione di F sarà del tipo:

$$F \equiv x^2 + x\psi_2 + \varphi_4 + \varphi_5 + \ldots = 0\,, \tag{1}$$

essendo $x=0$ il piano tangente, ψ_2 una forma quadratica, ecc. *Il tacnodo si compone di un punto doppio a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, la quale poi ha ancora per successivi 4 nuovi punti doppi.* Le direzioni di questi ultimi son date dalle 4 *tangenti singolari*:

$$x=0\,, \qquad \psi_2^2 - 4\varphi_4 = 0\,, \tag{2}$$

(le quali non van confuse con le 4 *tangenti quipunte*:

$$x=0\,, \qquad \varphi_4 = 0)\,.$$

La composizione del tacnodo è dunque espressa in generale da:

$$(s=2\,; \quad \textit{retta} \quad s'=2\,; \quad s_1''=s_2''=s_3''=s_4''=2)$$ [14].

[14] Qui e nel seguito, quando si scrive simbolicamente la composizione di un punto multiplo, si indicano quali caratteri s rappresentino multiplicità di *linee infinitesime*, e per gli altri caratteri si sottintende che si riferiscono a *punti*.

Le sezioni piane di F per O ed in particolare per una tangente singolare corrispondono a sezioni piane di F' (per A'), in particolare per un punto cuspidale (n.° 11). Tenendo conto che questo ha infinitamente vicino, fuori della retta doppia, un altro punto doppio di F' (n.° 13) si conchiude quanto segue. Le sezioni piane generiche della superficie F pel punto O hanno ivi un tacnodo; quelle condotte per una tangente singolare hanno un regresso di 2.ª specie; infine per ogni tangente singolare passa un piano che dà una sezione dotata di oscnodo (contatto tripunto di due rami lineari): è il piano osculatore comune ai rami lineari che contengono O, un punto della retta doppia e poi uno dei 4 punti doppi successivi a questa [15].

17. Un caso particolare di tacnodo, che va subito segnalato, è il così detto *punto chiuso (close-point; point-clos) su una linea cuspidale* [16]. È questo un punto della linea cuspidale tale che la sezione della superficie col piano tangente in esso vi ha un punto quadruplo, o, ciò che è lo stesso, tale che le sezioni piane generiche per esso vi hanno un tacnodo anzi che una cuspide. Rientra dunque veramente nella classe dei tacnodi di superficie. Però quando si cercano le tangenti singolari in esso (nel senso sopra definito) si trova che 3 di esse vengono a coincidere nella tangente alla linea cuspidale, sicchè rimane una sola distinta da quella. Dunque: *un punto chiuso di una superficie, su una linea cuspidale di questa, ha infinitamente vicini, oltre ai punti di questa, una retta doppia infinitesima, e poi, come successivo a questa, ancora un punto doppio.*

18. Una singolarità superiore al tacnodo si ha in un *punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un regresso di 2.ª specie.* È chiaro che si otterrà dal tacnodo rendendo indeterminate le tangenti singolari (le quali fornivano appunto le sezioni piane con regressi di 2.ª specie, ed eran date dalle equazioni (2)). Dunque:

$$\psi_2^2 - 4\varphi_4 \equiv x\psi_3;$$

e sostituendo nella (1), diventa (con lievi cambiamenti di notazione):

$$F \equiv (x + \psi_2)^2 + x\psi_3 + \varphi_5 + \varphi_6 + \dots = 0 . \tag{3}$$

---

(15) Cfr. pei punti doppi di superficie del tipo (1) il lavoro del sig. ZEUTHEN, Math. Ann., IX, 1876, p. 321.

(16) Cfr., ad esempio, ZEUTHEN, Math. Ann., X, p. 479 e seg.i

Per veder bene la composizione di questa singolarità applichiamo ad F la trasformazione quadratica speciale. Verrà:

$$F' \equiv (x' + z'\psi_2')^2 + x'z'^2\psi_3' + z'^3\varphi_5' + z'^4\varphi_6' + \ldots = 0\,,$$

scrivendo per brevità ψ_2' in luogo di $\psi_2(x'y'1)$, ecc. La superficie F' ha l'asse delle y' per retta cuspidale. Segandola col piano:

$$z' = \lambda x'$$

si ha come sezione quella retta, contata due volte, e poi la linea:

$$(4) \qquad (1 + \lambda\psi_2')^2 + \lambda^2 x'\psi_3' + \lambda^3 x'\varphi_5' + \lambda^4 x'^2\varphi_6' + \ldots = 0\,,$$

la quale tocca la retta stessa nei due punti:

$$(5) \qquad x' = z' = 0\,, \qquad 1 + \lambda\psi_2' = 0\,.$$

Ne segue che quel piano è il piano tangente ad F' in ciascuno di questi due punti; e che un punto generico della retta cuspidale è un punto uniplanare a cui non sono infinitamente vicini altri punti doppi di F' che quelli della retta cuspidale (fatto che vale per tutte le ordinarie linee cuspidali). Volendo avere i punti eccezionali, vale a dire i *punti chiusi* di quella retta (n.^{0} 17), basterà scrivere che uno dei punti (5) è doppio per la linea (4); il che nel caso attuale si riduce a derivare la (4) rispetto ad x'. Si ha così, tenendo conto delle (5):

$$(6) \qquad \psi_3' + \lambda\varphi_5' = 0\,;$$

ed eliminando λ:

$$(7) \qquad x' = z' = 0\,, \qquad \varphi_5' = \psi_2'\psi_3'\,;$$

sicchè sono 5 questi punti chiusi. Applicando ora quanto sappiamo sulla composizione dei punti chiusi, e poi ritornando alla superficie F, concludiamo: *Un punto di una superficie, il quale sulle sezioni piane generiche passanti per esso sia un regresso di 2.^{a} specie, vale a dire un punto rappresentato dall'equazione* (3), *si compone in generale di un punto doppio, a cui è infinitamente vicina una retta doppia infinitesima, sulla quale stanno* 5 *punti, ognun dei quali ha a sua volta per successiva una retta doppia infinitesima a cui è successivo un ulteriore punto doppio: ossia*

$(s = 2\,;$ *retta* $s' = 2\,;$ *rette* $s_1'' = \ldots = s_5'' = 2\,;\ s_1''' = \ldots = s_5''' = 2)$.

Le 5 *tangenti singolari*, cioè quelle che segnano le direzioni dei 5 punti doppi nominati, son date, in forza delle (7), da:

$$(8) \qquad x = 0\,, \qquad \varphi_5 = \psi_2\psi_3\,,$$

e son caratterizzate da ciò, che le sezioni piane passanti per esse hanno in generale un oscnodo. Vi è poi per ogni tangente singolare un piano che dà una sezione dotata di un regresso di 3.ª specie.

19. *Un punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un oscnodo* si otterrà dal caso precedente rendendo indeterminate le tangenti singolari (8), ossia ponendo:

$$\varphi_5 \equiv \psi_2 \psi_3 + x\psi_4 ;$$

con ciò l'equazione (3) diventa:

$$F \equiv (x + \psi_2)(x + \psi_2 + \psi_3) + x\psi_4 + \varphi_6 + \ldots = 0 . \tag{9}$$

La superficie trasformata sarà:

$$F' \equiv (x' + z'\psi_2')(x' + z'\psi_2' + z'^2\psi_3') + x'z'^3\psi_4' + z'^4\varphi_6' + \ldots = 0, \tag{10}$$

ed avrà l'asse delle y' per *retta tacnodale*, cioè luogo di tacnodi. Però su questa retta vi saranno dei punti eccezionali, i quali sulle sezioni piane generiche di F' passanti per essi non sono solo tacnodi ma bensì regressi di 2.ª specie: punti di cui abbiamo trattato nel precedente n.⁰ 18. Si posson cercare o coll'applicare l'equazione (3) ivi trovata dopo d'aver trasportata l'origine O' sull'asse delle y'; od anche solo cercando fra le sezioni $y' = \text{cost.}$ di F' quelle che hanno nel punto d'incontro con quell'asse un regresso di 2.ª specie. Il calcolo, in ambi i modi, si fa senza difficoltà e conduce ai 6 punti seguenti:

$$x' = z' = 0 , \qquad \varphi_6' = \psi_2'\psi_4' + \frac{1}{4}\psi_3'^2 .$$

Si verifica inoltre che in ciascuno di questi punti 4 delle 5 tangenti singolari nel senso del n.⁰ 18 vengono a coincidere nell'asse delle y', sicchè ne rimane solo una diversa da quest'asse [17]. Invece per un punto generico di quest'asse, che quindi è per F' un tacnodo nel senso del n.⁰ 16, si verifica che le 4 tangenti singolari ivi considerate coincidono tutte nell'asse. Applicando dunque le cose viste nei n.ⁱ 16 e 18 sulla composizione di quei punti singolari e poi risalendo alla superficie F concludiamo: *Un punto singolare di una superficie, tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un oscnodo, vale a dire che corrisponda all'equazione* (9) *della super-*

---

[17] Questo fatto è l'analogo di quello già osservato per le tangenti singolari in un punto uniplanare di una linea doppia (punto *cuspidale*, n.⁰ 13), ed in un tacnodo di una linea cuspidale (punto *chiuso*, n.⁰ 17).

ficie, è composto come segue: un punto doppio; poi per successiva a questo una retta doppia infinitesima; un punto generico di questa ha per successiva una retta doppia infinitesima, senz'altro; ma vi sono sulla prima retta 6 punti particolari, ognun dei quali ha per successiva una retta doppia infinitesima su cui sta un punto che ha per successiva una retta doppia infinitesima a cui è successivo un ulteriore punto doppio; ossia:

$$(s = 2\,; \quad \textit{retta}\ s' = 2\,; \quad \text{infinite}\ \textit{rette}\ s'' = 2\,;$$
$$\textit{rette}\ s_1''' = \ldots = s_6''' = 2\,; \quad s_1^{\mathrm{IV}} = \ldots = s_6^{\mathrm{IV}} = 2)\,.$$

Per la superficie rappresentata dall'equazione (9) le 6 *tangenti singolari* in O, cioè tangenti che dànno le direzioni dei 6 punti particolari suddetti, sarebbero rappresentate da:

$$x = 0\,, \qquad \varphi_6 = \psi_2 \psi_4 + \frac{1}{4} \psi_3^2\,; \tag{11}$$

le sezioni piane passanti per esse hanno regressi di 3.ª specie, ecc.

20. Rendendo indeterminate quelle rette (11) si ottiene un *punto tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi hanno un regresso di 3.ª specie*: la corrispondente equazione della superficie è (modificando ψ_3 e φ_7):

$$F = (x + \psi_2 + \psi_3)(x + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) + x\psi_5 + \varphi_7 + \ldots = 0\,. \tag{12}$$

Non stiamo più ad esaminarne espressamente la composizione perchè dalle cose esposte precedentemente la si può prevedere. Si osservino in fatti e si confrontino fra loro le composizioni che abbiamo trovato ai n.[i] 8, 16, 18, 19 pei punti doppi uniplanari nei casi in cui per le sezioni piane generiche passanti per essi siano rispettivamente: regresso di 1.ª specie, tacnodo, regresso di 2.ª specie, oscnodo; e si prevederà subito quale è la legge generale per la *composizione di un punto singolare di una superficie tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un punto doppio abbassante la classe della curva piana di* i *unità.* I quattro casi citati corrispondevano ad $i = 3, 4, 5, 6$. E come in questi abbiamo sempre trovato appunto i *tangenti singolari*, tali cioè che per le sezioni piane passanti per una di esse il punto doppio abbassa di $i + 1$ unità la classe; così questo fatto vale in generale. Ciò si può dimostrare assai brevemente (quantunque in modo meno perfetto di quello seguito nei quattro casi particolari suddetti) considerando il cono circoscritto alla superficie da un punto qualunque P: dall'ipotesi fatta sulla singolarità del punto O nelle sezioni piane di F che lo contengono, segue che quel cono avrà la retta PO per generatrice i-pla; e però vi saranno i piani (tangenti al cono lungo PO) uscenti da P e tali che nella sezione da essi fatta su F il punto O abbassa di $i+1$ unità la classe. Questi piani daranno le i tangenti singolari di F in O.

21. Fin qui, dal n.^{0} 16 in poi, la singolarità della superficie F in O si componeva (in primo luogo) di infiniti punti doppi infinitamente vicini ad O *in direzioni diverse*. Possiamo facilmente ottenere che gl'infiniti punti doppi siano tutti infinitamente vicini ad O *in una stessa direzione* t, facendo, per così dire, *accumulare nella direzione* t *la singolarità* di uno qualunque dei punti esaminati nei numeri precedenti. Basta perciò, ritornando all'equazione (1) del n.^{0} 12 relativa ad una superficie F con punto uniplanare O, ed all'equazione (2) della sua trasformata F', imporre a questa seconda equazione di assumere una delle forme che abbiamo visto caratterizzare il tacnodo, o gli altri punti singolari superiori. Allora gl'infiniti punti doppi di F' infinitamente vicini ad O' nelle varie direzioni daranno infiniti punti doppi per F infinitamente vicini ad O nella direzione che corrisponde ad O' (al citato n.^{0} 12, la direzione dell'asse delle z), su diversi sistemi di rami.

Limitiamoci al 1.^{0} caso, quello che O' sia un tacnodo per F'. Già nel n.^{0} 15 avevamo scritto che O' è uniplanare col piano tangente

$$z' = \lambda x':$$

trovavamo le condizioni:

$$a = b\lambda^2, \qquad a_1 = -2b\lambda, \qquad a_2 = 0.$$

Dobbiamo solo aggiungere che l'equazione (8) del detto n.^{0} 15, la quale dava le tangenti singolari nel detto punto uniplanare, diventa un'identità; cioè:

$$a_3 + b_1\lambda + c\lambda^2 = 0, \qquad a_4 + b_2\lambda = 0, \qquad a_5 = 0.$$

Da tutte queste condizioni ricavando i valori delle a e sostituendoli nella (1) del n.^{0} 12 (od anche nella (9) del n.^{0} 15) si ha (con un mutamento di b_1):

$$(13)\ \begin{cases} F \equiv b(z^2-\lambda x)^2 + z(z^2-\lambda x)(cz^2+b_1x+b_2y) + \alpha_3 + \\ + (\beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4) + (\gamma_1 z^4 + \gamma_2 z^3 + \ldots + \gamma_5) + \varphi_6(xyz) + \ldots = 0, \end{cases}$$

dove convien ricordare che le α, β, γ son forme binarie in xy; ecc. Se poi si forma per questo caso l'equazione di F', si verifica che delle 4 tangenti singolari (n.^{0} 16) nel suo tacnodo O' una sola, in generale, cade nell'asse delle y' (e quest'asse contiene tre punti doppi successivi di F', cioè dopo O' ed un punto della retta doppia infinitesima ancora un terzo punto doppio di F'). Possiamo dunque dire: *La superficie* (13) *ha in* O *un punto uniplanare, che sulle sezioni piane generiche passanti per esso costituisce una cuspide ordinaria e non un tacnodo; ma che ciò nondimeno si può considerare come un punto doppio a cui è infinitamente vicino un tacnodo della superficie. Più precisamente la composizione di quel punto singolare è questa: un punto doppio; poi, per successivo, un altro punto doppio; poi una retta doppia infinitesima; ed infine 4 punti doppi*:

$$(s = 2\,;\quad s' = 2\,;\quad \textit{retta}\ s'' = 2\,;\quad s_1''' = \ldots = s_4''' = 2)\,.$$

Va aggiunto che mentre si posson congiungere con rami lineari i due primi punti doppi (s, s') con uno qualunque dei tre s_2''', s_3''', s_4''' (ad esempio), passando per un certo punto della retta doppia s'', occorrono invece rami del 3.º ordine (e 2.ª classe) per congiungere i punti s, s', s_1''', passando per un certo punto della retta doppia s''. — La retta congiungente i primi due punti doppi s, s' è (l'asse delle z, cioè) l'unica tangente quadripunta del nostro punto uniplanare. I piani passanti per essa dànno sezioni di F aventi in O un oscnodo; tranne il piano tangente che dà in O un ramo di 3.º ordine; e altri tre piani i quali dànno un regresso di 3.ª specie.

Sull'abbassamento della classe prodotto dai punti singolari. Singolarità delle prime polari.

22. Il metodo delle successive trasformazioni quadratiche, con le quali si analizza un punto singolare di una superficie algebrica F, può anche servire a determinare l'influenza che sulla classe di F ha quel punto singolare. A tal fine si può ricorrere, ad esempio, alla considerazione del cono Γ circoscritto ad F da un punto *generico* P dello spazio: la classe di F coincide con la classe di Γ, sicchè la determinazione di cui si tratta si può ridurre alla ricerca dell'influenza che sulla classe di Γ hanno le generatrici di questo cono che vanno ai punti singolari di F. Per altro, prima di dare un cenno di questa seconda questione, è bene rilevare in che differiscano le due *influenze* nominate, e quando è che coincidono.

Supponiamo che la superficie F, d'ordine n, sia priva di linee multiple, ma abbia nei punti $O, \ldots$ singolarità qualunque. Il cono circoscritto Γ sarà d'ordine $n\,(n-1)$, avrà generatrici singolari nelle rette che vanno dal vertice P a quei punti, e inoltre avrà delle generatrici doppie ordinarie (nodali) e delle generatrici stazionarie ordinarie (cuspidali) rispettivamente nelle bitangenti e nelle tangenti principali di F uscenti da P. — Ricordiamo come si ottengano quelle bitangenti [18] e tangenti principali. Siano $(y_1 \dots y_4)$ le coordinate omogenee di $P, (x_1 \dots x_4)$ quelle di un punto di contatto di F con una bitangente passante per P. Sarà anzitutto

$$(1) \qquad F = 0\,, \qquad \varDelta F = 0\,,$$

ove per brevità rappresentiamo con F il risultato della sostituzione delle coordinate x nel 1.° membro dell'equazione di F, e con $\varDelta F$ la forma polare 1.ª di F rispetto alle y. Di più l'equazione $F(\lambda x + \mu y) = 0$, la quale, in forza delle (1), tolta la radice doppia $\mu = 0$, si riduce a

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\lambda^{n-2}\varDelta^2 F + \frac{1}{6}\lambda^{n-3}\mu\varDelta^3 F + \frac{1}{24}\lambda^{n-4}\mu^2\varDelta^4 F + \dots = 0\,,$$

dovrà avere ancora una radice doppia; ossia dovrà annullarsi il discriminante della forma (2) in λ, μ

$$(3) \qquad \mathbf{D}(\varDelta^2 F,\ \varDelta^3 F,\ \varDelta^4 F, \dots) = 0\,.$$

I punti di contatto di F con le bitangenti (propriamente dette) passanti per P risultano così come le intersezioni, fuori dei punti singolari $O, \dots$, delle tre superficie rappresentate dalle equazioni (1) e (3) in cui si considerino le x come variabili. Riguardo alla (3) conviene osservare che dall'espressione nota del discriminante di una forma binaria segue subito che la (3) è una superficie d'ordine $(n-2)(n-3)$. Inoltre se la F ha nel punto $(0\,0\,0\,1)$ la multiplicità s, sicchè nella forma F l'insieme dei termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ sia dato dalla forma ternaria φ_s d'ordine s (cono tangente ad F in quel punto), nelle forme polari $\varDelta^2 F, \varDelta^3 F, \dots, \varDelta^s F$ i termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ saranno evidentemente $\varDelta^2\varphi_s$, $\varDelta^3\varphi_s, \dots, \varDelta^s\varphi_s$ (le quali si riducono a polari ternarie, rispetto ad $y_1 y_2 y_3$), mentre le $\varDelta^{s+1}F, \varDelta^{s+2}F, \dots$ conterranno termini privi di $x_1 x_2 x_3$. Tenendo conto di ciò si può dimostrare che nella (3) i termini del minimo ordine in $x_1 x_2 x_3$ saranno dati, a meno di un fat-

---

[18] Cfr. i n.i 16 e 20 della: *Analytische Geometrie des Raumes,* II. *Theil* di Salmon (Fiedler).

tore indipendente da queste variabili, dal discriminante dell'equazione

$$(2') \qquad \frac{1}{2}\lambda^{s-2}\Delta^2\varphi_s + \frac{1}{6}\lambda^{s-3}\mu\Delta^3\varphi_s + \frac{1}{24}\lambda^{s-4}\mu^2\Delta^4\varphi_s + \ldots = 0\,,$$

ossia da

$$(3') \qquad \mathbf{D}(\Delta^2\varphi_s\,,\ \Delta^3\varphi_s\,,\ \Delta^4\varphi_s\,,\ldots)$$

e saranno quindi d'ordine $(s-2)(s-3)$. Questa è dunque in generale la multiplicità per la superficie (3) di un punto che sia s-plo per la F; e la (3′) ne darà il cono tangente in questo punto. — Quanto alle tangenti principali (propriamente dette) di F passanti per P, i loro punti di contatto sono le intersezioni, fuori dei punti singolari $O,\ldots,$ delle superficie (1) e

$$(4) \qquad \Delta^2 F = 0\,.$$

Se nella superficie F mancassero i punti singolari $O,\ldots,$ risulterebbe così che il cono Γ d'ordine $n(n-1)$ ha $n(n-1)(n-2)(n-3)/2$ generatrici doppie ordinarie e $n(n-1)(n-2)$ generatrici stazionarie ordinarie; e quindi, applicando la nota formola, che la sua classe è $n(n-1)^2$: tale risulterebbe la classe della *superficie generale d'ordine* n. La presenza del punto singolare O ha questo effetto: che la generatrice PO del cono Γ produce per se stessa un certo abbassamento I nella classe di Γ; mentre d'altra parte fra le $n(n-1)(n-2)(n-3)$ intersezioni delle superficie (1) e (3) un certo numero $2D$ vengono assorbite da O, onde il suddetto numero di generatrici doppie ordinarie di Γ subisce una diminuzione di D unità; e fra le $n(n-1)(n-2)$ intersezioni delle superficie (1) e (4) un certo numero R vengono assorbite da O, onde il numero delle generatrici stazionarie ordinarie di Γ si riduce di R unità. Dunque il punto singolare O abbassa la classe $n(n-1)^2$ della superficie F di

$$I - 2D - 3R$$

unità.

Se O è un punto s-plo ordinario per F, la retta PO è multipla secondo $s(s-1)$ pel cono Γ, sicchè l'abbassamento che essa produce nella classe di Γ è $I = s(s-1)(s^2-s-1)$. Le superficie (1) e (3) hanno in O le multiplicità $s\,, s-1\,, (s-2)(s-3)$, onde $2D = s(s-1)(s-2)(s-3)$; e similmente si ha $R = s(s-1)(s-2)$. Segue $I - 2D - 3R = s(s-1)^2$: abbassamento della classe prodotto dal punto s-plo ordinario.

Se il punto s-plo viene ad avere una singolarità qualunque per F, possono accrescersi tanto I quanto D ed R: per conseguenza il calcolo dell'influenza di O sulla classe di F, fatto secondo questo procedimento, non viene a ridursi soltanto a quello dell'influenza I della generatrice PO sulla classe del cono circoscritto Γ, ma esige anche i calcoli dei numeri D ed R. Vi sono però dei casi in cui, pur essendo la singolarità di F in O d'indole elevata, i numeri $2D$ ed R conservano i valori scritti dianzi pel caso del punto s-plo ordinario; sicchè tutta l'influenza di quella singolarità superiore sulla classe di F si riduce appunto all'influenza che essa ha sul numero I. È facile determinare quei casi: basta ricordare le definizioni che abbiam dato di quei numeri $2D$ ed R, ed applicare la nota proposizione che un punto O comune a tre superficie conta nel numero complessivo delle loro intersezioni più di quanto è indicato dal prodotto delle multiplicità che le superficie hanno in O solo quando queste abbiano in O una tangente (almeno) comune [19]. Quindi affinchè il numero $2D$ delle intersezioni in O delle superficie (1) e (3) superi il prodotto $s(s-1)(s-2)(s-3)$ dovranno queste superficie aver comune una tangente in O. Ora i coni tangenti in O alle (1) son rappresentati da

$$(1') \qquad \varphi_s = 0 , \qquad \Delta\varphi_s = 0 ;$$

ed il cono tangente alla superficie (3) è rappresentato, come abbiam detto, dal discriminante (3′) dell'equazione (2′), cioè dell'equazione $\varphi_s(\lambda x + \mu y) = 0$ nella quale le x verifichino le (1′) e sia soppressa la soluzione doppia $\mu = 0$. L'esistenza di una generatrice t comune a quei tre coni, ossia di una soluzione $(x_1\, x_2\, x_3)$ comune per le tre forme ternarie (1′) e (3′), significa dunque che nella stella O il piano delle due rette $t\,(x_1\, x_2\, x_3)$, $OP\,(y_1\, y_2\, y_3)$ incontra il cono φ_s doppiamente nella generatrice t e poi ancora doppiamente in una generatrice ulteriore, che può coincidere con t. Poichè P indicava un punto *generico* dello spazio, avremo che per ogni punto dello spazio passa un piano segante il cono φ_s nel modo detto, cioè secondo due coppie di generatrici coincidenti: ciò esige evidentemente che *il cono φ_s tangente ad F in O abbia una generatrice quadrupla (almeno), oppure abbia una parte non piana la quale conti doppiamente (almeno).* Questa sarà dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $2D > s(s-1)(s-2)(s-3)$. — Similmente suppongasi che le superficie (1) e (4) abbiano comune una tangente t in O; saran verificate dalle coordinate $(x_1\, x_2\, x_3)$ di t le equazioni (1′) e (4′) $\Delta^2\varphi_s = 0$, vale a dire nella t cadranno tre delle s rette in cui il

(19) Cfr. per una dimostrazione algebrica rigorosa di questa proposizione: BERZOLARI, *Sulle intersezioni di tre superficie algebriche,* Ann. Mat., (2) 24, 1896.

piano di P e t incontra il cono φ_s. E per essere P generico, esisteranno così infiniti piani ognun dei quali incontra φ_s secondo tre generatrici coincidenti; donde segue che *il cono* φ_s *tangente ad* F *in* O *avrà una generatrice tripla (almeno)*. Tale sarà la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $R > s(s-1)(s-2)$.

Come si vede, nel caso del *punto doppio* per F son sempre nulli D ed R; nel caso del *punto triplo* riman sempre nullo D, mentre $R = 6$ in generale e solo si accresce se il cono cubico tangente ad F si spezza in tre piani di un fascio; ecc. ecc.

23. Veniamo ora, secondo dicevamo al principio del n.^{0} preced.^{e}, alla questione relativa all'abbassamento I che sulla classe del cono Γ circoscritto da P ad F produce la generatrice che va ad un punto singolare O di F.

Se la singolarità del cono Γ lungo quella generatrice PO risulta equivalente a generatrici successive multiple secondo $\sigma, \sigma'_i, \sigma''_{ik}, \ldots$, e se le falde (complete) del cono che hanno quella generatrice per origine sono degli ordini $\nu_1, \nu_2, \ldots$, il detto abbassamento nella classe di Γ sarà, per una nota formola del sig. Noether relativa alle curve piane [20]:

$$I = \Sigma\sigma(\sigma-1) + \Sigma(\nu-1).$$

Per determinare i caratteri σ e ν secondo la teoria del Noether occorre fare una successione di trasformazioni quadratiche ternarie del cono Γ che riducano la generatrice PO a generatrici multiple ordinarie, ecc. Ora queste trasformazioni ternarie possiamo ottenere che siano contenute nelle successive trasformazioni quadratiche quaternarie che abbiamo applicato ad F. A tal fine assumiamo anzitutto come conica fondamentale q della 1.^{a} trasformazione una retta doppia passante per P, e diciamo P' il punto che corrisponderà a P sulla (retta doppia) q': la trasformazione quadratica spaziale determinerà una trasformazione quadratica ternaria fra le due stelle di raggi coi centri P, P', nella quale la retta PO è una retta fondamentale, cui corrisponde il piano ω'. Il cono Γ circoscritto da P ad F si trasformerà nel cono Γ' circoscritto da P' ad F' (da cui si tolga però, ove ne facesse parte, il piano ω') e la generatrice PO di Γ nelle generatrici di Γ' giacenti su ω'. Poniamo che una

(20) V. il lavoro del tom. 9.^{0} dei Math. Ann. citato al principio del presente scritto.

di queste passi pel punto singolare O' di F'; e facciamo la 2.ª trasformazione quadratica spaziale del n.⁰ 2 col punto fondamentale in O' e con una conica fondamentale ridotta ad una retta doppia passante per P'. Avremo di nuovo che il cono Γ', dalla trasformazione quadratica ternaria che vien subordinata fra la stella di raggi P' e la corrispondente stella P'' e che ha la retta $P'O'$ per retta fondamentale, verrà mutato nel cono Γ'' circoscritto da P'' ad F''. E così via: le successive trasformazioni quadratiche spaziali che già ci davano la composizione della singolarità di F in O ci daranno anche la composizione (nel senso ternario) della singolarità del cono circoscritto Γ nella generatrice PO. — Si osservi che la multiplicità (immediata) σ di PO per Γ è uguale all'abbassamento che il punto singolare O produce sulla classe di una sezione piana generica di F passante per esso: nell'ipotesi, che conserveremo nel seguito del presente paragrafo, che questo punto non stia su una linea multipla di F. Poi la multiplicità σ' della generatrice $P'O'$ per Γ', se O' non è su una linea multipla di F', sarà pur data dall'abbassamento che il punto singolare O' produce sulla classe di una sezione piana generica di F' passante per O'; tranne se la retta $P'O'$ riesce tangente ad F', vale a dire (poichè P' è un punto generico di q') se il piano ω' è tangente in O' ad F', nel qual caso σ' si accresce. E così via.

24. Per la questione generale mi limiterò a questo cenno: la trattazione completa rimane esclusa dal presente scritto. Ma quel che abbiamo detto è già sufficiente per la determinazione del numero I in parecchi casi particolari.

Così se O è *punto biplanare* per F equivalente a k punti doppi successivi (n.⁰ 12), dopo k trasformazioni quadratiche dello spazio saremo ridotti ad una superficie $F^{(k)}$, alla quale è circoscritto il cono $\Gamma^{(k)}$ dal punto $P^{(k)}$ dell'ultimo piano fondamentale $\omega^{(k)}$. Questo piano sega $F^{(k)}$, fuori della conica fondamentale, in una conica di cui tutti i punti son semplici per la superficie, ma che può spezzarsi in due rette distinte. Il cono $\Gamma^{(k)}$ avrà in quel piano, provenienti dalla generatrice PO di Γ, due generatrici semplici, le quali però potranno coincidere. Segue che pel cono Γ la generatrice doppia PO equivale a k generatrici doppie successive, e sta su due falde di 1.⁰ ordine (caso generale), o su una falda di 2.⁰ ordine (il caso particolare ora nominato). Nel 1.⁰ caso l'abbassamento che O produce nella classe di F risulta di $2k$ unità; nel 2.° caso invece di $2k+1$ ([21]).

Poniamo invece che O sia per F un punto *uniplanare*, od un *tacnodo*, o in generale un *punto singolare tale che le sezioni piane generiche passanti per esso vi abbiano un punto doppio abbassante la classe della curva piana di* i *unità.* Abbiamo già osservato in generale al n.° 20 (dopo che si erano espressamente esaminati i casi di $i=3, 4, 5, 6$) che il cono circoscritto da un punto generico P ha la retta PO per generatrice i-pla ed i piani che projettano le i tangenti singolari per piani tangenti lungo quella generatrice. Ne segue che l'abbassamento della classe è in generale $i(i-1)$: quindi pel punto uniplanare più generale 6, pel tacnodo 12, pel punto di regresso di 2.ª specie 20, ecc. Ma se fra quelle i tangenti singolari di F ve ne sono ν coincidenti, in generale la composizione della generatrice i-pla PO di Γ si complica perciò che una falda uscente da essa viene ad essere di ordine ν, onde l'abbassamento della classe diventa $i(i-1)+(\nu-1)$. Ecc. ecc.

Pel punto uniplanare abbiamo dunque in generale l'abbassamento di classe 6, 7, 8 secondo che in esso vi sono 3 tangenti singolari (quadripunte) distinte, o 2 coincidenti, o tutte 3 coincidenti. — Nel caso particolare del n.° 15, equazione (9), il cono Γ' circoscritto da P' ad F' si vede che avrà la generatrice doppia $P'O'$ dotata di due piani tangenti distinti fra loro e da ω': onde per la generatrice PO del cono Γ i caratteri di composizione $\sigma=3$, $\sigma'=2$. L'abbassamento di classe sarà 8. — Nell'altro caso particolare del n.° 21, equazione (13), il cono Γ' si vede che avrà $P'O'$ per generatrice tripla con tre piani tangenti distinti fra loro e da ω': onde per la generatrice PO di Γ la composizione $\sigma=3$, $\sigma'=3$. L'abbassamento di classe sarà 12.

Applichiamo ancora lo stesso procedimento al caso che F abbia *un punto* s*-plo* O *a cui siano infinitamente vicini infiniti punti doppi, sulle generatrici di un cono d'ordine* h. Abbiamo esaminato questa singolarità al n.° 11, rilevando che la superficie F' ha sul piano fondamentale ω' una linea doppia τ_h e su questa $2h(s-h+1)$ punti cuspidali. L'abbassamento che il punto O produce nella classe di una sezione piana di F passante per esso è in generale

([21]) Cfr. ROHN, Memoria citata al n.° 12. — Il sig. ROHN ha pure considerato l'influenza di un punto qualunque sulla classe di una superficie nella Nota: *Ueber die Entstehung eines beliebigen $\varkappa$-fachen Punctes einer Fläche aus dem gewöhnlichen $\varkappa$-fachen Punct* (Sächsische Berichte, 1884).

$\sigma = s(s-1) + 2h$: e tale sarà dunque la multiplicità della generatrice PO pel cono Γ, nel caso attuale. Per vedere come questa generatrice si trasformi, in seguito alla 1.ª trasformazione quadratica, basta cercare le generatrici d'intersezione di ω' col cono Γ' circoscritto ad F' da P'. Una retta m uscente da P' e giacente in ω' contiene h punti di τ_h, punti doppi di ogni sezione piana di F' condotta per m; in certo senso si potrebbe dire che questa retta assorbe in generale $2h$ fra le tangenti (proprie od improprie) condotte da P a quella sezione piana. Se si trova che, per una posizione di m e del piano per essa, la retta assorbe più che $2h$ fra le dette tangenti, l'eccesso darà il numero delle intersezioni coincidenti con m di quel piano col cono Γ' circoscritto da P' ad F'. Applicando questo concetto si vede subito che Γ' ha per generatrici semplici: le $2h(s-h+1)$ rette che vanno ai punti cuspidali di F' situati su τ_h; le tangenti condotte da P' alla residua curva, d'ordine $s-2h$, che con la τ_h contata due volte costituisce la trasformata su F' del punto s-plo O di F, e queste sono in generale $(s-2h)(s-2h-1)$; infine le $h(s-2h)$ rette che vanno da P' ai punti comuni a queste due curve. Questi ultimi punti sono punti di contatto di F' col piano ω': onde quelle ultime rette sono generatrici di contatto del cono Γ' con ω'. Sono poi generatrici doppie di Γ' le $h(h-1)$ tangenti tirate da P' a τ_h (perchè sulle sezioni piane di F' che le contengono esse sono tangenti tacnodali e quindi doppie); lungo una qualunque di esse sono tangenti a Γ i due piani tangenti ad F' nel punto di contatto di quella con la τ_h. Si verifica che il numero complessivo di generatrici di Γ' su ω' così trovate, contando due volte le $h(s-2h)$ e le $h(h-1)$, risulta uguale a $s(s-1)+2h$, cioè a σ, come deve essere. — Concludiamo che la singolarità della generatrice PO pel cono circoscritto da P ad F si compone della multiplicità σ, con $h(h-1)$ elementi doppi infinitamente vicini (in giaciture diverse), e con $h(s-2h)$ falde di 2.º ordine. Per conseguenza si avrà in questo caso:

$$I = \sigma(\sigma-1) + 2h(h-1) + h(s-2h),$$

ossia:

$$I = (s^2 - s + 2h)(s^2 - s + 2h - 1) + h(s-2).$$

25. Affine alla questione di cui ci siamo occupati è l'altra della *singolarità che in un punto singolare di una superficie hanno le polari rispetto a questa dei vari punti dello spazio.* Anche in essa serve utilmente il metodo delle successive trasformazioni quadratiche. Nel cenno che ne farò mi limiterò alle *prime* polari.

Se il punto O è s-plo per la superficie F, la polare Δ rispetto ad F di un punto *generico* P dello spazio avrà in O la multiplicità $s-1$. Facciamo ora la 1.ª trasformazione quadratica assumendo, come al n.º 23, la conica fondamentale q ridotta ad una retta doppia passante pel punto P. Detto P' il punto omologo di P sull'altra conica fondamentale (retta doppia) q', le rette uscenti da P e le omologhe uscenti da P' sono punteggiate projettivamente: onde segue che la superficie Δ' trasformata di Δ sarà la polare di P' rispetto ad F'. Ne segue che se F' ha nel piano ω' un punto O' multiplo secondo s', Δ' avrà il punto stesso per multiplo secondo $s'-1$ *almeno*. In tale ipotesi si faccia la 2.ª trasformazione quadratica con O' per punto fondamentale e con una conica fondamentale ridotta ad una retta doppia passante per P': si muterà Δ' in una superficie Δ'' polare di un punto P'' rispetto ad F''. Se F'' ha un punto O'' multiplo secondo s'', Δ'' avrà il punto stesso per multiplo secondo $s''-1$ *almeno*. E così via. Si conclude che: la polare di un punto generico rispetto alla superficie F con punto singolare O passa per questo e pei punti successivi di F multipli per questa superficie con multiplicità che non possono esser minori che di 1 unità delle multiplicità che i punti stessi hanno per F.

Vediamo in qual caso la polare Δ del punto generico P rispetto ad F avrà multiplicità s' (e non solo $s'-1$) in un punto s'-plo di F, immediatamente successivo al punto s-plo O. Ciò equivale a domandare quando è che la polare Δ' di P' rispetto ad F' ha in O' la multiplicità stessa s' di F', comunque si prenda P' sulla retta doppia q'. Ora, poichè anche la polare di O' (che è fuori di q') rispetto ad F' ha in O' multiplicità s', nel caso supposto accadrà che le prime polari di tutti i punti del piano ω' avranno O' multiplo secondo s'; e quindi, per un noto teorema (polari miste), che la polare d'ordine s' di O' (cono tangente in O' ad F') avrà tutti quei punti per multipli secondo s', cioè si ridurrà al piano ω' contato σ' volte. Dunque: *quando la superficie fondamentale* F *ha per successivo al punto* s*-plo* O *un punto multiplo secondo* s', *la polare di un punto generico dello spazio oltre ad avere in* O *la multiplicità* s — 1 *potrà avere nel punto successivo la multiplicità* s': ciò accadrà quando quel punto successivo ad O in seguito alla 1.ª trasformazione quadratica diventi un punto s'-plo col cono tangente ridotto al piano ω' contato s' volte. Ricorrendo alle formole del n.º 9 per la trasformazione quadratica speciale ed alla corrispondente equazione (3) di F' si vede subito che *se il punto considerato di* F *successivo ad* O *è nella direzione dell'asse delle* z, *affinchè le polari di tutti i punti dello* *spazio abbiano in quel punto la stessa multiplicità* s′ *che vi ha* F (*anzi che avere solo la multiplicità* s′ — 1), *occorre e basta che nella*

$$F \equiv \varphi_s + \varphi_{s+1} + \varphi_{s+2} + \dots,$$

le forme $\varphi_s, \varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \dots, \varphi_{s+s'-1}$ *abbiano in tutti i loro termini le* x y *a gradi superiori di un'unità almeno a quelli richiesti per essere il detto punto* s′*-plo per* F (v. la fine del n.⁰ 9), *vale a dire contengano in tutti i termini* x y *(complessivamente) almeno ai gradi risp.* $s'+1, s', s'-1, \dots, 2$.

Vi sarebbe ora da proseguire la ricerca, per vedere, ad esempio, come si comportino le polari dei punti generici dello spazio nei punti multipli di F successivi a quello s'-plo in cui le polari stesse hanno pure la multiplicità s'. Per brevità ce ne asterremo.

Sarebbe pure da esaminare la composizione della singolarità in O delle polari di punti *speciali* (non generici). Un punto particolare può avere una polare la cui multiplicità in O superi $s-1$ (di quanto si vuole); e così per la multiplicità in un punto di F successivo ad O; ecc. Limitiamoci a rilevare che *la polare di* O, cioè (se n è l'ordine di F):

$$(n-s)\varphi_s + (n-s-1)\varphi_{s+1} + (n-s-2)\varphi_{s+2} + \dots = 0,$$

ha la stessa multiplicità che F *non solo in* O, *ma anche in ogni punto che sia* *immediatamente* *successivo ad* O. Ciò risulta subito dal criterio stabilito alla fine del n.⁰ 9 per l'esistenza su F di un punto s'-plo successivo ad O nella direzione dell'asse delle z: se quelle condizioni son soddisfatte per F, saranno pure evidentemente soddisfatte dall'equazione ora scritta. Per altro va notato che la cosa non regge più pei punti multipli di F che sono infinitamente vicini ad O ma non *immediatamente* successivi. Così se al punto s'-plo di F già nominato è successivo un punto s''-plo di F, allora si verifica con lo stesso metodo che la polare di O vi avrà in generale la multiplicità $s''-1$, e solo in casi eccezionali la multiplicità s'': questa eccezione si presenterà certo se i tre punti successivi nominati di F, s-plo (O), s'-plo, s''-plo si possono congiungere solo con rami di 2.⁰ ordine e non con rami lineari.

Sulla trasformazione birazionale delle singolarità.

26. Il concetto della composizione delle singolarità (*puntuali*) di una superficie algebrica mediante successioni di punti multipli infinitamente vicini si applica naturalmente, e sembra anzi essen-

ziale, nella trattazione di un problema che è d'importanza capitale per la *geometria sopra una superficie algebrica* (22).

Chiamiamo per brevità *singolarità ordinarie* per una superficie algebrica, dal punto di vista delle *trasformazioni birazionali della superficie* (23) (non trasformazioni birazionali *dello spazio*, vale a dire Cremoniane), le seguenti: una linea doppia nodale, con un certo numero di punti cuspidali per la superficie aventi la composizione assegnata nel n.^{0} 13 (e non più complicata), ed un certo numero di punti tripli a tangenti distinte i quali sono pur tripli (triplanari) per la superficie, senz'avere per successivi altri punti multipli di questa che i punti della linea doppia. Allora il problema a cui alludevo consiste nel *trasformare birazionalmente una superficie algebrica qualunque (priva di parti multiple) in una che non abbia altre singolarità (cioè punti multipli) che singolarità ordinarie* (24).

La proposizione secondo cui questo problema è possibile sembra sia stata esplicitamente enunciata, per la prima volta, nel 1888, dal sig. Noether nella Nota « *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* » (25), e dal sig. Del Pezzo nella Nota « *Estensione di un teorema di* Noether » (26). Il sig. Noether dice così: « Sia « $F(x)=0$ la superficie data e $F_1(y)=0$ la sua trasformata mediante le formole:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \psi_1(x) : \psi_2(x) : \psi_3(x) : \psi_4(x) .$$

« Le 5 equazioni:

$$F(x)=0 , \qquad F(x')=0$$

$$\psi_1(x) : \psi_2(x) : \psi_3(x) : \psi_4(x) = \psi_1(x') : \psi_2(x') : \psi_3(x') : \psi_4(x') ,$$

« fra i 3 rapporti delle coordinate del punto x ed i 3 rapporti delle « coordinate del punto x' ammettono ∞^1 soluzioni: le quali dànno

---

(22) Cfr. i fondamentali lavori dei sig.i Castelnuovo ed Enriques pubblicati nel corrente anno fra le Memorie della Società Italiana delle scienze (dei XL), serie III, tom. 10.

(23) Per alcune considerazioni ben note, di cui ci varremo qua e là nel seguito, intorno a siffatte trasformazioni, si può consultare, ad esempio, il lavoro del sig. Noether, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen,* Math. Ann., II, 1870.

(24) Un altro problema, nel quale pure i concetti svolti in questo lavoro posson trovare utile applicazione, è quello della riduzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali *dello spazio* (Cremoniane). Ma di esso non parlerò affatto.

(25) Sitzungsberichte d. k. Preuss. Akademie d. W. zu Berlin, 2 Februar 1888.

(26) Rend. Palermo, 2, 8 luglio 1888.

« la curva doppia di F_1. E le 9 equazioni:

$$F(x) = 0\,, \qquad F(x') = 0\,, \qquad F(x'') = 0$$

$$\psi_1(x) : \ldots : \psi_4(x) = \psi_1(x') : \ldots : \psi_4(x') = \psi_1(x'') : \ldots : \psi_4(x'')\,,$$

« fra i 9 rapporti di coordinate dei punti x, x', x'' dànno in gene-« rale un numero finito di soluzioni, a cui corrispondono i punti tripli « della curva doppia nominata, e della stessa F_1 ». È chiaro che queste considerazioni servono solo a dimostrare questo: che la superficie F_1 avrà in generale quella linea doppia e quei punti tripli; ma non già che si potranno scegliere le forme ψ in modo che F_1 risulti priva di altre singolarità.

27. Il sig. Del Pezzo tratta il problema sotto un'altra forma, che si potrebbe chiamare la forma *iperspaziale: trasformare birazionalmente una superficie algebrica* F *in una superficie* F' *di un conveniente iperspazio* $\mathrm{S_r}$, *la quale sia priva di punti multipli.* Dopo ciò egli projetta la superficie F' ottenuta da un S_{r-4} generico sopra uno spazio ordinario: ottiene così una superficie F_1 che sarà riferita birazionalmente ad F e non avrà altri punti multipli che gli ∞^1 punti doppi ed il numero finito di punti tripli, provenienti rispettivamente dalle coppie e dalle terne di punti di F' che stanno in spazi S_{r-3} con l'S_{r-4} suddetto; si vede facilmente che se questo è in posizione generica rispetto ad F', la linea doppia ed i punti tripli di F_1 soddisfano alle condizioni che abbiamo imposte alle singolarità ordinarie (n.⁰ 26).

Per trasformare F (che può supporsi esistente in uno spazio ordinario) nella detta superficie iperspaziale il Del Pezzo ricorre alle superficie di un ordine m così elevato che: 1.⁰ si possano assoggettare queste superficie ad avere in tutti i punti e linee singolari di F *le stesse singolarità* che ha F; 2.⁰ queste singolarità non siano *vincolate* fra loro rispetto alle superficie d'ordine m, nè sian vincolate coi passaggi per altri h punti qualunque di F (con che s'intende che per una superficie d'ordine m le condizioni di avere quelle varie singolarità e di passare per quegli h punti siano tutte indipendenti fra loro). Allora, chiamando $\psi\,(\psi_1, \psi_2, \ldots)$ le superficie d'ordine m che hanno le stesse singolarità di F, e trasformando F mediante esse, cioè ponendo:

$$x_1' : x_2' : \ldots = \psi_1(x) : \psi_2(x) : \ldots$$

e

$$F(x) = 0\,,$$

si avrà — in uno spazio superiore — una superficie F', luogo del punto x' (27), della quale il chiar.° geometra citato asserisce che « non « avrà punti singolari nè in numero finito nè in numero infinito, « perchè non vi sono sopra F gruppi di punti tali che ogni ψ pas- « sante per uno di essi debba passare per gli altri, e perchè F non « ha punti nè curve singolari fuori della base delle ψ ».

28. Questo procedimento sembra esigere qualche ulteriore spiegazione; e lo stesso DEL PEZZO si è occupato di ciò in una successiva Nota « *Sui sistemi di curve e di superficie* » (28). Alla questione che da prima può farsi, cioè che cosa s'intenda dicendo che una superficie ψ ha in un punto singolare O di F *la stessa singolarità* che ha F, egli risponde che con ciò intende che « un piano qualun- « que passante per O taglia le due superficie secondo due curve che « hanno in O la medesima singolarità ». Ed all'altra questione se esistano superficie d'ordine m (abbastanza elevato) le quali abbiano in tutti i punti e linee singolari di F le stesse singolarità che ha F, risponde con la proposizione seguente: « Sia $F^n = 0$ una super- « ficie (d'ordine n), che abbia nei punti $O, \ldots$ singolarità date. De- « notino $\Phi^{m-n} = 0$ e $\Phi^m = 0$ due superficie arbitrarie (di ordini « $m - n$ e m), delle quali la prima non passa pei punti $O, \ldots$, per « la seconda ogni punto O è $(n+1)$-plo. Le superficie del sistema:

$$F^m \equiv F^n \Phi^{m-n} + \Phi^m = 0 \,,$$

« hanno in generale nei punti $O, \ldots$ le medesime singolarità della F^n.»

29. Ora se si sta alla citata nozione di singolarità della superficie, caratterizzandole con le singolarità delle sezioni piane, non sembra esatto che la superficie F' ottenuta dalla F nel modo detto al n.° 27 riuscirà priva di punti multipli.

Invero si osservi anzitutto che, nella fatta ipotesi, col dire che ψ ed F hanno in O la stessa singolarità non si viene ad esigere che abbiano anche *la stessa composizione*, vale a dire che ψ abbia le stesse multiplicità di F oltre che in O anche nei punti multipli di

(27) Come bene osserva il sig. DEL PEZZO, si può fare in modo che la corrispondenza birazionale tra le due superficie F, F' consista semplicemente nell'essere la F projezione di F': basta perciò che nel sistema lineare ψ sia contenuto il sistema ∞^3 dei piani dello spazio (con l'aggiunta di una conveniente superficie d'ordine $m-1$).

(28) Rend. Palermo, 3, 28 luglio 1889.

F che sono infinitamente vicini ad O su vari rami di curve. Poniamo in fatti che la composizione della singolarità che F ha in O sia tale da esservi più punti successivi di multiplicità s, s', s'', s''', ..., non situati in un piano: allora la presenza di quelli che succedono ai primi tre non influirà più in generale sulla singolarità di O in nessuna sezione piana di F; per conseguenza dalle condizioni imposte a ψ questa non sarà costretta ad avere i punti multipli secondo s''', ... Così un punto biplanare composto di $k\,(> 3)$ punti doppi successivi dà per sezioni piane risp.^{e} nodi, tacnodi, oscnodi, punti tripli, indipendentemente dal numero k: sicchè F e ψ possono avere in O punti biplanari con sezioni piane dotate delle stesse singolarità, quantunque corrispondano a valori diversi di k.

Ciò posto è facile scorgere che se le superficie ψ mediante cui si trasforma F hanno in O la stessa singolarità di F solo nel senso suddetto che riguarda le sezioni piane, e non nel senso di avere tutti gli stessi punti multipli infinitamente vicini ad O che ha F, la trasformata F' avrà in generale ancora dei punti singolari, corrispondenti ad O, o più precisamente corrispondenti a quei punti infinitamente vicini ad O che son multipli per F senz'esser multipli (con la stessa multiplicità) per le ψ. Così se la singolarità di O per F si compone di punti multipli secondo s, s', s'', s''', ..., che si succedono su un ramo lineare, e le ψ hanno solo i punti multipli secondo s, s', s'', la superficie F' risulterà con un punto multiplo secondo s''': come si può vedere facendo le tre trasformazioni quadratiche che sciolgono i punti s, s', s'' e lasciano ad F un punto multiplo secondo s''' pel quale *non* passano le trasformate delle ψ (cfr. n.^{0} 31).

Converrà dunque modificare il procedimento riportato ai n.^{i} 27, 28 in questo: che le superficie ψ abbiano comuni con F tutti i punti multipli infinitamente vicini che entrano a comporre le singolarità di F nel senso da noi sviluppato.

30. Quanto all'esistenza di superficie ψ, di un ordine m abbastanza alto, le quali abbiano le stesse singolarità di F nel senso detto ora (senza contenere F come parte), la si può vedere, ad esempio, così. Per un punto singolare qualunque O di F si considerino tutte le serie di caratteri del tipo $(s, s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots)$, e s'indichi con σ la massima fra le somme $s + s'_i + s''_{ik} + s'''_{ikl} + \ldots$ dei caratteri di queste serie. Si rappresenti con $\Phi^m = 0$ una superficie (d'ordine $m \geq$ a quello n di F) la quale in ogni punto singolare O di F abbia una multiplicità almeno uguale al corrispondente valore

di σ [29]; e con $\Phi^{m-n} = 0$ una superficie *qualunque* d'ordine $m - n$ (non passante in generale per O). Le superficie ψ rappresentate da

$$\psi \equiv F^n \Phi^{m-n} + \Phi^m = 0 ,$$

avranno in generale (cioè finchè i coefficienti di Φ^{m-n} sono indeterminati) gli stessi punti singolari di F con l'identica composizione.

In fatti siano s, s'_i, s''_{ik}, ..., una o più multiplicità *successive* di F corrispondenti al punto O ed a punti infinitamente vicini su una determinata classe di rami di curve algebriche γ. L'espressione assunta per ψ mostra [30] che la multiplicità dell'intersezione in O di un ramo γ con ψ è il minore dei due numeri che dànno la multiplicità d'intersezione in O di γ (con $F^n \Phi^{m-n}$, ossia — poichè Φ^{m-n} non passa per O) con F e di γ con Φ^m; oppure, nel caso che questi due numeri siano uguali, è *in generale* uguale ad essi. Ora se quella classe di rami γ ha nei punti successivi considerati le multiplicità ν, ν', ν'', ..., il numero delle intersezioni in O di γ con F è (n.º 6) $\nu s + \nu' s'_i + \nu'' s''_{ik} + \ldots$; mentre le intersezioni in O di γ con Φ^m sono almeno $\nu\sigma$, numero che, in causa delle relazioni: $\nu \geq \nu' \geq \nu'' \geq \ldots$, $\sigma \geq s + s'_i + s''_{ik} + \ldots$, non è certo minore del precedente. Dunque il numero delle intersezioni in O di γ con ψ è in generale (cioè finchè i coefficienti di Φ^{m-n} non soddisfano certe determinate equazioni) esattamente uguale al numero delle intersezioni in O di γ con F. — Si applichi questa osservazione generale prendendo anzitutto il solo punto O, s-plo per F; poi anche un punto successivo, s'_i-plo per F; poi ancora un terzo punto successivo, s''_{ik}-plo per F; e così via: e si vedrà che anche la superficie ψ ha il punto O per s-plo, il successivo secondo punto per s'_i-plo, il terzo per s''_{ik}-plo, ecc. Mutando la classe di rami γ, ossia la serie di punti successivi (e tenendo conto del fatto che tutto ciò vale anche se alcuni di questi punti non stessero su F sicchè le s corrispondenti fossero nulle), si

(29) Per costruire delle superficie così fatte si può ad esempio comporle di parti determinate nel seguente modo: per ogni linea che abbia da avere una certa multiplicità σ si prendano σ suoi coni projettanti, e per ogni punto che in tal modo non risulti ancora con la multiplicità voluta si prenda un cono uscente da esso avente per ordine quanto occorre per raggiungere quella multiplicità; l'insieme di tutti questi coni (e di una superficie arbitraria) sarà una superficie Φ^m.

(30) Ricorrendo, ad esempio, alla espressione della multiplicità d'intersezione di una superficie con un ramo di curva algebrica (v. nota al n.º 4) quando questo è rappresentato con serie di potenze di un parametro.

conchiuderà che il punto singolare O ha per la superficie ψ l'identica composizione con punti multipli infinitamente vicini che ha per la F.

Dal ragionamento precedente risulta pure che la proposizione riportata alla fine del n.⁰ 28 esige la modificazione che nell'attuale num.° abbiamo fatto alla multiplicità in $O, \ldots$ delle superficie Φ^m; e ciò anche se si conserva la nozione di singolarità riportata al principio del detto n.⁰ 28. Invero se, ad esempio, F^n ha in O punti multipli successivi, con le multiplicità $s, s', s'', \ldots$ su un ramo lineare γ (di curva piana, se si vuol conservare la detta nozione), ove $s + s' + s'' + \ldots > n + 1$, la superficie F^m definita al n.⁰ 28 avrà in O solo $n+1$ intersezioni con γ e quindi la sua singolarità in O non si comporrà di quei punti multipli secondo $s, s', s'', \ldots$, sarà *diversa da quella di* F^{n}.

31. Fissato così che le superficie ψ con cui al n.⁰ 27 si trasformava la superficie data F in una superficie iperspaziale F' siano tutte quelle di un ordine m abbastanza elevato le quali hanno le stesse singolarità di F, con la stessa composizione, nel senso spiegato; resterebbe da far vedere che F' risulterà priva di punti multipli. Che non avrà punti multipli provenienti da gruppi di punti semplici di F seguirà dalla cagione citata alla fine del n.⁰ 27, cioè che (supposto m abbastanza elevato) non vi sono su F gruppi di punti tali che tutte le ψ passanti per un punto debbano di conseguenza passare per gli altri. Per vedere poi che nemmeno da un punto multiplo O di F non può venire come corrispondente un punto multiplo di F', si osservi che, per essere O punto base del sistema delle ψ, i punti di F' che gli corrispondono si ottengono come *limiti* dei punti che corrispondono a punti ordinari i quali si avvicinino indefinitamente ad O sui rami di curva giacenti su F e passanti per O; cosicchè un tal punto di F' riuscirebbe multiplo per questa superficie solo quando su F esistesse un ramo γ passante per O, tale che le ψ passanti per un punto P di γ il quale tenda verso O tendessero ad aver comuni altri punti di F (che posson coincidere con O), ossia che delle $n'-1$ intersezioni variabili diverse da P di F con due di quelle ψ (n' ordine di F') solo un numero minore che $n'-1$ rimanessero variabili nel detto passaggio al limite. Ora sul ramo γ, oltre al punto O ed infinitamente vicini a questo, possono esservi altri punti multipli di F: e questi staranno pure, con le stesse multiplicità, su tutte le ψ. Oltre a questi punti poi può essere che tutte le ψ abbiano necessariamente comuni ulteriori punti semplici di F sul ramo γ: però il numero di questi rimarrà fisso

col crescere dell'ordine m delle ψ, giacchè la multiplicità d'intersezione in O di γ con le ψ non può superare il prodotto dell'ordine del ramo γ per la multiplicità in O delle superficie Φ^m del n.^{0} prec. [31]. Imaginiamo eseguite tante trasformazioni quadratiche successive, analoghe a quelle dei n.^{i} 1, 2, quanto è il numero complessivo di quei punti successivi di γ, in modo che prima si vengano a sciogliere i punti multipli nominati, i quali son comuni ad F ed alle ψ, e poi ancora si tolga il contatto fisso (se vi è) di tutte le ψ con γ, proveniente dai punti semplici successivi che pure abbiam nominato. Avremo, corrispondentemente ad F, O, γ, ψ, una superficie determinata $\overline{F}$, un suo punto *semplice* $\overline{O}$, origine di un ramo $\overline{\gamma}$ di curva algebrica giacente su $\overline{F}$, e poi un sistema lineare di superficie $\overline{\psi}$ che non ha $\overline{O}$ per punto base. L'ipotesi fatta poc'anzi si trasformerebbe in questa: che quando due $\overline{\psi}$ variabili passano per un punto $\overline{P}$ di $\overline{\gamma}$ che tende verso $\overline{O}$, alcune delle $n'-1$ intersezioni variabili, diverse da $\overline{P}$, che esse hanno con $\overline{F}$ tendano pure verso limiti determinati, indipendenti dalle due $\overline{\psi}$; o più brevemente: che pel sistema delle $\overline{\psi}$ il punto $\overline{O}$ è tale che tutte le $\overline{\psi}$ passanti per esso vengano di conseguenza a passare per altri punti di $\overline{F}$ (che possono anche essere infinitamente vicini ad $\overline{O}$, oppure a punti base del sistema). Ora se si fa crescere l'ordine m delle ψ, cresceranno di conseguenza l'ordine e la dimensione del sistema delle $\overline{\psi}$, mentre rimane fissa $\overline{F}$ col suo punto semplice $\overline{O}$. Quanto ai punti e linee basi delle $\overline{\psi}$ rimarranno fissi quelli che son dati dai punti e linee singolari di $\overline{F}$, mentre cresceranno di multiplicità senza cambiar di posizione quelli che sono negli elementi fondamentali della trasformazione birazionale di spazio prodotto della successione di trasformazioni quadratiche eseguita. Esaminando anche più minutamente questi elementi base del sistema $\overline{\psi}$ in relazione col punto $\overline{O}$ di $\overline{F}$ e tenendo conto che essi determinano il sistema, *pare che si possa conchiudere* che non può accadere per tutti i valori di m che le $\overline{\psi}$ passanti per $\overline{O}$ vengano di conseguenza a passare per altri punti di $\overline{F}$. Qui non mi tratterrò a cercare una rigorosa dimostrazione di ciò. Ammesso che sia vero, vi sarà un valore di m dal quale in poi i sistemi ψ corrispondenti dànno origine a superficie F' che non hanno un punto multiplo proveniente dal ramo γ nel modo sopra esposto.

---

[31] Ciò risulta subito considerando le ψ che si possono esprimere come nel n.^{0} precedente e segandole col ramo γ giacente in F. Si vede che per quelle ψ la multiplicità d'intersezione in O con un tal ramo è esattamente uguale, in generale, a quel prodotto.

Muti ora γ su F attorno ad O, e poi muti anche su F il punto singolare O. Si avranno per m dei limiti inferiori di carattere generico e dei limiti inferiori di carattere eccezionale: gli uni e gli altri in numero finito, per la natura algebrica della questione. Onde basterà poi prendere l'ordine m delle ψ maggiore di tutti quei limiti perchè la superficie F' trasformata di F mediante le ψ risulti completamente priva di punti multipli.

Seguito. Cenno di altri metodi per la riduzione delle singolarità.

32. Riandando il ragionamento precedente, appare subito che in esso non è un fatto essenziale l'avere la superficie ψ con cui si trasforma F *le stesse singolarità* di questa superficie; ma piuttosto il fatto che le ψ *passino per tutti i punti multipli, distinti od infinitamente vicini*, coi quali son composti i punti singolari di F, nel senso spiegato in questo lavoro.

Non sarà forse superflua, a questo proposito, una breve digressione intorno al problema della *trasformazione birazionale delle singolarità delle curve algebriche*, e più precisamente di *determinare una curva (iperspaziale) priva di punti singolari, della quale una data curva algebrica con singolarità qualunque sia projezione.* La risoluzione di questo problema si può dire contenuta implicitamente — e ciò sembra sia sfuggito a vari geometri — nei teoremi dei sig.i BRILL e NOETHER (32) sulle serie lineari di gruppi di punti, speciali e non speciali, di una curva algebrica, e più esplicitamente in una nota Memoria del sig. VERONESE (33). Siano in fatti p il genere ed n l'ordine della curva data, con singolarità qualunque. Allora se è $n > 2p$ si avrà che quella curva è projezione di una curva normale dello stesso ordine (di S_{n-p}), la quale è certamente priva di punti multipli (34). Se poi non fosse soddisfatta la condizione $n > 2p$, basterebbe anzitutto riguardare la data curva come projezione di una conveniente curva d'ordine superiore n' tale che $n' > 2p$, il che si fa ovviamente; e poi applicare a questa nuova curva l'osservazione precedente (35).

(32) Math. Ann., VII, 1873.

(33) Math. Ann., XIX, 1881.

(34) V. a p. 213 della citata Memoria del sig. VERONESE ed anche il n.^{0} 13 della mia Memoria nei Math. Ann., XXX, 1887. [V. p. 93 di questo volume].

(35) Se la data curva è *speciale* non occorre altro che applicare il noto teorema secondo cui la curva stessa è projezione della curva canonica (d'ordine $2p-2$), la quale è certo priva di punti multipli (in quell'ipotesi).

Se la curva data f è piana (o ridotta a tale con projezione), per dedurne le curve normali di cui essa è projezione si conduce per un suo gruppo di n punti allineati una *curva aggiunta* di un certo ordine m la quale darà su f un certo gruppo residuo: tutte le curve aggiunte ad f, di ordine m, passanti o no per questo gruppo residuo o per una parte di esso, serviranno a trasformare f in una curva normale, di cui f è projezione. Dunque *la trasformazione birazionale (od anzi per projezione) di una curva piana algebrica* f *in una curva priva di punti singolari si può fare per mezzo del sistema delle curve aggiunte ad* f *di un ordine abbastanza elevato.*

Appare così che per una data curva piana f, al fine di trasformarla in una curva (iperspaziale) priva di punti multipli posson servire le curve che nei punti singolari di f hanno certe singolarità minori, le *singolarità aggiunte* (cioè delle curve aggiunte ad f), e che inoltre hanno un ordine abbastanza elevato ([36]). — Sono esempi di curve aggiunte ad f le prime polari dei punti del piano; e si può pensare (quando le singolarità di f siano un po' complicate) di ricorrere ad esse per costruire altre curve aggiunte atte a dare la voluta trasformazione di f. Ciò però esige qualche riguardo: non serve, ad esempio, il sistema lineare

$$\Theta \equiv \sum_i \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

dove le λ_i sono tre forme di uno stesso ordine l, a coefficienti pienamente indeterminati ([37]). Invero (prescindendo dal caso $l = 0$, nel quale la trasformata di f mediante quel sistema viene ad essere la

---

([36]) È chiaro che quest'ultima condizione (alla quale conducono le considerazioni precedenti) è essenziale. Ad esempio se la curva f è d'ordine $n > 5$ ed ha come unico punto singolare un *tacnodo* O, le ∞^3 coniche aggiunte, cioè tangenti ad f in O, trasformano f in una curva sghemba d'ordine $2n - 4$, la quale avrà un punto $(n - 4)$-plo, corrispondente agli $n - 4$ punti di f diversi da O ma situati sulla tangente in O.

([37]) Rilevo ciò, perchè appunto a questo sistema ricorre il sig. Del Pezzo nella Nota: *Intorno ai punti singolari delle curve algebriche* (Rend. Acc. Napoli, gennaio 1893), asserendo che la curva iperspaziale trasformata di f mediante esso sarà priva di punti singolari: il che, come ora si vedrà, non è esatto. E poichè la detta Nota è posteriore a quella sulla riduzione delle singolarità delle superficie citata ai n.i 26 e seguenti, nella quale per la trasformazione delle superficie si ricorreva ad un sistema lineare essenzialmente diverso, il lettore potrebbe pensare ad usare anche per le superficie un sistema lineare analogo a quello Θ sopra scritto: cosa che non darebbe punto la soluzione del problema.

curva duale di f, e quindi ad avere punti multipli corrispondenti alle tangenti multiple di f), se si suppone $l > 0$, e si indica con s la multiplicità per f di un suo punto O e con σ la multiplicità di una tangente t in O ad f (la quale, per fissar le idee, non tocchi f altrove), la curva trasformata di f mediante il sistema Θ avrà, corrispondentemente ad O e t, un punto singolare la cui multiplicità sarà uguale ad s e σ, se questi due numeri sono uguali fra loro; se no, al minore fra s e σ [38]. Così se f ha un *tacnodo* la sua trasformata mediante le Θ avrà sempre (qualunque sia l) un punto doppio.

La breve digressione così fatta intorno al problema della riduzione delle singolarità delle *curve* conduce a pensare che per la riduzione birazionale delle singolarità delle *superficie* dello spazio ordinario, e precisamente dal punto di vista da noi considerato (iperspaziale), potrebbero servire delle superficie simili alle superficie *aggiunte*, cioè tali che se la data superficie F ha una singolarità composta di punti multipli (infinitamente vicini) secondo s, s', s'', ..., queste nuove superficie abbiano nei punti stessi le multiplicità $s-1$, $s'-1$, $s''-1$, ... [39]. Esempi di superficie siffatte si avrebbero nelle prime polari rispetto ad F dei vari punti dello spazio (v. n.⁰ 25): ma, come s'è detto per le curve piane, ci vuol riguardo nel servirsene.

---

(38) In fatti, per l'ipotesi che t sia tangente σ-pla di f col punto di contatto O, la polare di un punto generico di t avrà con f in O una multiplicità d'intersezione superiore di σ unità alla multiplicità d'intersezione in O di f con la polare di un punto generico del piano. Diciamo f_1, f_2 le polari di due punti di t, f_3 la polare di un punto del piano esterno a t. Esprimendo le $\partial f/\partial x_i$ per mezzo di f_1, f_2, f_3, l'equazione di Θ prende la forma

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = 0,$$

dove le μ sono di nuovo forme d'ordine l, a coefficienti pienamente indeterminati. Se r è la dimensione di questo sistema Θ, è chiaro che, obbligando la forma μ_3 al passaggio per O e quindi ad un incontro s-punto in O con f, si viene a staccare in Θ un sistema lineare ∞^{r-1} di curve la cui multiplicità d'intersezione con f in O è (quella di $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$, o quella della attuale $\mu_3 f_3$, e però) superiore di σ o di s unità alla multiplicità d'intersezione in O di f con le Θ generiche: e precisamente del meno elevato fra i due numeri σ, s. Ora all'esistenza nel sistema ∞^r delle Θ di un tal sistema ∞^{r-1} corrisponderà sulla curva trasformata di f mediante le Θ l'esistenza di un punto multiplo secondo il detto numero, meno elevato fra σ ed s.

(39) Tali superficie sarebbero dunque veramente aggiunte lungo le linee singolari, ma *iperaggiunte* nei punti multipli staccati.

33. Si può risolvere lo stesso problema relativo alle singolarità delle superficie per una via essenzialmente diversa: cioè, invece di determinare una trasformazione birazionale che muti la superficie data, ad esempio, in una superficie (iperspaziale) priva di punti multipli, procedere per gradi successivi costruendo una serie di trasformazioni che semplifichino man mano le singolarità fino a farle scomparire totalmente.

A tal fine premettiamo che alle singolarità delle superficie iperspaziali si possono attribuire *caratteri* di composizione simili a quelli introdotti in questo lavoro pel caso delle superficie dello spazio ordinario: chiamando cioè *caratteri* $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$ di un punto singolare O di una superficie appartenente allo spazio S_r (e precisamente multiplicità di O e di punti e linee infinitesime successivi ad O) i caratteri che la projezione di quella superficie su uno spazio ordinario da un S_{r-4} *generico* ha nel punto projezione di O. — Dopo ciò si posson paragonare le singolarità di tutte le superficie algebriche e parlare di maggiore o minore *complicazione* delle singolarità: per esempio, dicendo che una singolarità — punto o linea — è meno complicata di un'altra se il numero complessivo dei suoi caratteri $s, s', s'', \ldots$ è minore di quello relativo all'altra; oppure assumendo come *indice* della complicazione di una singolarità — e così noi faremo — il massimo numero h tale che fra i caratteri $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$ vi sia una $s^{(h)}$ (diversa da 1); ecc.

Ciò posto, supponiamo che si riesca a trasformare ogni superficie algebrica F di S_3 in una superficie F' le cui singolarità provengano tutte da quelle di F, ma abbiano complicazione minore. Mediante projezione da uno spazio generico la F' darà una superficie di S_3 la quale oltre a quelle singolarità di minor complicazione che quelle di F avrà solo una linea doppia ordinaria con dei punti tripli (n.^{0} 27). Si applichi a questa nuova superficie di S_3 la trasformazione che ne abbassa le singolarità; e così via. Si arriverà infine ad una superficie iperspaziale completamente priva di punti multipli, o ad una superficie di S_3 con sole singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli). Il problema della riduzione delle singolarità sarà risolto. — Se poi il sistema di superficie con cui si trasforma F in F' comprende anche il sistema dei piani di S_3 a cui si aggiunga una superficie fissa, la detta trasformazione si potrà riguardare come una projezione (cfr. una nota al citato n.^{0} 27), sicchè tutta la serie di trasformazioni non sarà altro che una serie di projezioni.

Come si possa trasformare la superficie F dello spazio ordinario nella F' suddetta si prevede facilmente. Al principio del n.^{0} 32 abbiam rilevato che per far sparire tutti quanti i punti multipli di F convien far passare le superficie ψ con cui si trasforma F per tutti i punti multipli, distinti od infinitamente vicini, coi quali son composti i punti singolari di F. È naturale pensare che se le ψ passan solo per una parte (i primi) dei punti multipli secondo $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$ che compongono un punto singolare di F, solo quei punti multipli scompariranno dalla trasformata, mentre quelli successivi si conserveranno. In particolare il passaggio puro e semplice delle ψ pei punti singolari di F (senza considerazione di punti infinitamente vicini) sembra condurre per la superficie trasformata a singolarità coi caratteri $s'_i, s''_{ik}, \ldots$, scomparendo il 1.° carattere s. Precisando meglio le cose, e salvo qualche riserva, si può ottenere che appunto così accada, e che quindi la trasformazione abbassi effettivamente la complicazione delle singolarità esistenti (senza introdurre alcuna nuova singolarità) ([40]).

34. Per questo scopo pare che si possan prendere, ad esempio, come superficie ψ mediante cui si trasforma F le seguenti. Diciamo $l\,(\geq 0)$ l'ordine della linea L che è l'insieme di tutte quante le linee multiple di F (ognuna, s'intende, contata semplicemente). Diciamo poi $O_1, O_2, \ldots, O_h$ quei punti multipli di F (in numero $h \geq 0$), ognun dei quali o non sta su alcuna linea di multiplicità pari alla sua, oppure è essenzialmente multiplo per la linea com-

---

([40]) Va forse citato, a questo proposito, un passo di un lavoro del sig. NOETHER che abbiamo ripetutamente ricordato (Götting. Nachrichten, 1871, p. 267) in cui si tratta di sciogliere le singolarità superiori di una superficie F mediante trasformazioni dello spazio ordinario (principalmente, come già s'è detto, per servirsene poi nella determinazione del genere superficiale): « Applicando, — dice — una trasformazione dello spazio, nella quale un punto fondamentale sia posto nel punto singolare O della superficie F, a questo punto corrisponderà sulla superficie trasformata F' una curva C'; e questa sarà in generale multipla e singolare per F', ma in modo che l'ordine di questa singolarità sarà più basso che quello di O in F. Indi si può ripetere lo stesso procedimento, assumendo C' come curva fondamentale di una seconda trasformazione, con che si è condotti a curve di singolarità ancor più bassa ... ». Nel seguito però si rileva che sulla curva C' vi saranno punti eccezionali, cioè di singolarità diversa da quella dei punti generici di C' e che può essere anche superiore alla singolarità di O per F. Tali punti provengono da quelle tangenti in O ad F che son tangenti alla Jacobiana della trasformazione. — Se in luogo delle trasformazioni birazionali dello spazio si adoperano, come noi ora facciamo, trasformazioni birazionali della sola superficie, si può ottenere che tali punti eccezionali non si presentino.

plessiva L: e poniamo che abbiano per L risp.^{e} le multiplicità $k_1, k_2, \ldots, k_h$ (ammettendo per questi numeri anche i valori 0 ed 1); e che in uno qualunque O di quegli h punti, pel quale L passi effettivamente con la multiplicità k, vi siano $\tau_a, \tau_b, \ldots$ tangenti ad L coincidenti risp. nelle tangenti distinte $a, b, \ldots$ (onde $\tau_a + \tau_b + + \ldots = k$). Assumiamo come superficie ψ tutte quelle superficie d'ordine $m = l + h + 1$ le quali passano (semplicemente) per L ed hanno in ogni punto O la multiplicità $k + 1$ e le tangenti $a, b, \ldots$ di L per generatrici τ_a-pla, τ_b-pla, ... del proprio cono tangente. Esse formano un sistema lineare ∞^r ove $r > 3$, del quale fanno parte le superficie particolari dello stesso ordine $m = l + h + 1$ composte con un piano arbitrario dello spazio, con h piani passanti risp. pei punti $O_1, O_2, \ldots, O_h$, e con un cono projettante la linea L da un punto arbitrario dello spazio.

Ricorrendo a queste particolari superficie si vede subito che il sistema ψ non ha, all'infuori dei punti O e della linea L, altri punti base, nè gruppi di punti *associati* (in numero finito od infinito, distinti od infinitamente prossimi) per modo che tutte le ∞^{r-1} ψ che passano per un punto A passino anche di conseguenza per un altro punto B (distinto, od infinitamente vicino ad A in una determinata direzione). Invero quelle particolari superficie composte di piani e coni non hanno evidentemente altri punti comuni che quelli di L ed i punti O. E mediante il piano completamente arbitrario che fa parte di esse si ottien subito che una di esse passi per A e non per B. — Ora, poichè sulla superficie F' trasformata di F mediante le ψ non potrebbero venir punti multipli se non dai punti multipli di F e dai gruppi di punti associati (nel senso detto) rispetto alle ψ che eventualmente giacessero su F, si conchiude che F' non avrà altri punti multipli che quelli provenienti dalla linea multipla L e dai punti multipli O di F.

35. Vediamo dunque quali punti si ottengano su F' come trasformati dei punti multipli di F: e da prima consideriamo uno qualunque, O, dei punti $O_1, O_2, \ldots, O_h$.

La corrispondenza tra F ed F' può riguardarsi come contenuta nella corrispondenza tra lo spazio ordinario Σ in cui sta F, e la varietà M_3 di S_r rappresentata su Σ dal sistema lineare ∞^r delle superficie ψ. In questa corrispondenza più ampia, i punti di Σ infinitamente vicini ad O sulle varie rette della stella che ha questo punto per centro corrispondono ai punti di M_3 costituenti una certa superficie Ω, e precisamente in modo che i coni d'ordine

$k+1$ tangenti in O alle ψ rappresentano le sezioni iperpiane di Ω (sicchè quando $k=0$ Ω è un piano). Fra quei coni si considerino quelli tangenti alle ψ composte di piani e coni che abbiamo messe in evidenza precedentemente: essi si comporranno di un piano arbitrario per O e (se O sta sulla linea L) dei piani projettanti da una retta arbitraria per O le tangenti $a, b, \ldots$ che la linea L ammette in O, contati rispett.e $\tau_a, \tau_b, \ldots$ volte (ove $\tau_a + \tau_b + \ldots = k$). Servendosi di ciò si riconosce subito che il sistema lineare composto di tutti i coni tangenti in O alle ψ, all'infuori delle generatrici base $a, b, \ldots$, multiple secondo $\tau_a, \tau_b, \ldots$, non ammette altre generatrici base, nè ammette alcun gruppo di rette *associate*, cioè tali che il passaggio di un cono per l'una tragga di conseguenza il passaggio per le altre. Inoltre si vede che in nessuna generatrice base il sistema lineare di coni ammette alcun piano tangente fisso; nè ammette, in una stessa od in diverse generatrici base dei gruppi di piani tangenti associati, nel senso che tutti i coni che toccano ivi un piano siano pur tangenti agli altri; e nemmeno può accadere che due coni del sistema i quali in una generatrice base abbiano comune un dato piano tangente vengano perciò solo ad avere ivi più di una nuova generatrice in comune, cioè ad oscularsi (ciò si vede, ad esempio, segando il sistema lineare col piano tangente dato). Da tutto ciò segue che la superficie Ω non ha punti multipli; ed è biunivocamente riferita alla stella di rette O, fatta sola eccezione per le rette $a, b, \ldots$ alle quali corrispondono su Ω tutti i punti di certe linee $\alpha, \beta, \ldots$ degli ordini $\tau_a, \tau_b, \ldots$ (razionali, prive di punti multipli).

Considerando ora nella stella O il cono delle tangenti in O ad F, avremo che a questo cono, ossia ai punti di F infinitamente vicini ad O sulle dette tangenti, corrisponderà su M_3 e quindi anche su Ω e su F' una linea C composta delle linee $\alpha, \beta, \ldots$ contate tante volte rispettiv.e quanta è la multiplicità di $a, b, \ldots$ nel cono tangente ad F in O, e composta inoltre di una linea residua Γ proveniente dalle altre generatrici di quel cono.

36. Per determinare i *caratteri* che avranno per la superficie iperspaziale F' quei punti singolari costituenti la linea C (insieme di Γ e di $\alpha, \beta, \ldots$), imaginiamo (n.º 33) projettata F' (e quella sua linea) su uno spazio ordinario Σ da un S_{r-4} generico: si otterrà una superficie $\overline{F}$ in corrispondenza birazionale con F per modo che al punto singolare O di questa corrisponde su $\overline{F}$ la linea $\overline{C}$, insieme di $\overline{\Gamma}$ e di $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \ldots$; e si tratterà di trovare i caratteri di queste linee singolari per la $\overline{F}$.

Fra i due spazi ordinari Σ e $\bar{\Sigma}$ si può considerare la corrispondenza proveniente dal projettare la varietà M_3, rappresentata su Σ dal sistema delle ψ, su $\bar{\Sigma}$ dall'S_{r-4} suddetto: è una corrispondenza $(\mu, 1)$ se μ è l'ordine della M_3 (il *grado* del sistema lineare delle ψ). In essa al punto O di Σ corrisponde una superficie $\bar{\Omega}$, projezione della Ω; e poichè quest'ultima superficie non ha punti multipli, la $\bar{\Omega}$ non avrà altre multiplicità che una ordinaria linea doppia con punti tripli. Su essa giacerà la linea $\bar{C}$ suddetta.

Ad una linea algebrica $\bar{\gamma}$ di $\bar{\Sigma}$ corrisponde in Σ una linea γ la quale passerà per O tante volte in generale quante sono le intersezioni di $\bar{\gamma}$ con $\bar{\Omega}$: e precisamente a questi punti di $\bar{\Omega}$ corrispondono nella stella O le tangenti a γ. Ne segue che un ramo di γ passante per O è certo lineare se il punto $\bar{O}$ in cui il ramo corrispondente di $\bar{\gamma}$ taglia $\bar{\Omega}$ conta come una sola intersezione. Dato su $\bar{\Omega}$ il punto $\bar{O}$ di $\bar{\gamma}$, è data una tangente in O a γ; e se $\bar{O}$ viene a cadere sulla linea $\bar{C}$ (cioè su $\bar{\Gamma}$ o su $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$), γ verrà a toccare in O una determinata tangente di F (che sarà precisamente a se $\bar{O}$ è su $\bar{\alpha}$, ecc.). Se $\bar{O}$ è uno dei punti comuni a $\bar{C}$ ed alla linea doppia di $\bar{\Omega}$, esso proverrà (come projezione) da *due* punti di Ω, dei quali uno solo è su C (per avere lo S_{r-4} di projezione una posizione generica); laonde la linea γ viene costretta in tal caso a toccare in O *due* rette, di cui però ancora una sola è tangente in O ad F. Se poi $\bar{O}$ è un punto comune a $\bar{\Gamma}$ ed $\bar{\alpha}$, si può supporre che sia projezione di un punto comune a Γ ed α, e non simultaneamente di un altro punto di Ω; allora il passaggio di $\bar{\gamma}$ per $\bar{O}$ avrà per conseguenza che non solo la linea γ sarà obbligata a toccare in O la retta a, ma inoltre il ramo di γ che ha questa tangente dovrà *osculare* un determinato piano tangente in a al cono tangente di F (i piani tangenti in a a questo cono corrispondendo in certo senso ai punti in cui α è incontrata da Γ).

Ciò premesso, siano $s, s'_i, s''_{ik}, s'''_{ikl}, \ldots$ i caratteri della singolarità che F ha in O: e supponiamo che per definirli mediante le multiplicità d'intersezione di F con rami di curve algebriche uscenti da O bastino i rami *lineari*, non occorrano quelli *superlineari* (n.^{0} 6). In tale ipotesi determineremo facilmente i caratteri che avranno i punti $\bar{O}$ della linea $\bar{C}$ su $\bar{F}$. Alle intersezioni di $\bar{F}$ con una linea algebrica qualunque $\bar{\gamma}$ di $\bar{\Sigma}$ corrispondono in generale biunivocamente le intersezioni, fuori dei punti fondamentali della trasformazione, di F con la linea γ che in Σ corrisponde a $\bar{\gamma}$. Ora se $\bar{\gamma}$ si fa variare in modo che venga ad incontrare $\bar{C}$ (cioè $\bar{\Gamma}$ od $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$) in un determinato punto $\bar{O}$, la linea γ la quale già passava per O

con tanti rami quanti erano gl'incontri di $\overline{\gamma}$ con $\overline{\Omega}$ verrà ad avere *uno* di questi rami tangente ad una determinata tangente di F in O (in particolare tangente ad a se $\overline{O}$ è su $\overline{\alpha}$, ecc.); e viceversa. Ma con ciò gl'incontri di quel ramo di γ con F in O saranno aumentati di s'_i (l'indice i corrispondendo a quella tangente di F in O). Ne segue che fra gl'incontri di $\overline{\gamma}$ con $\overline{F}$ s'_i saranno venuti in $\overline{O}$: cioè $\overline{O}$ è s'_i-plo per $\overline{F}$. — Se poi si vuole che il ramo lineare di $\overline{\gamma}$ in $\overline{O}$ incontri *più* di s'_i volte la $\overline{F}$, dovrà il ramo corrispondente di γ, che ha in O la detta tangente, avere ivi una multiplicità d'intersezione con F *superiore* ad $s + s'_i$. Ma allora sappiamo che questa multiplicità in generale varrà $s + s'_i + s''_{ik}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Dunque se il ramo lineare di $\overline{\gamma}$ ha da incontrare in $\overline{O}$ più che s'_i volte la superficie $\overline{F}$, la incontrerà ivi in generale $s'_i + s''_{ik}$ volte $(k = 1, 2, \ldots)$. — Così continuando nel confronto fra le intersezioni di $\overline{\gamma}$ ed $\overline{F}$ in $\overline{O}$ e quelle di γ ed F in O si vede che *i caratteri del punto singolare* $\overline{\mathrm{O}}$ *di* $\overline{\mathrm{F}}$ *saranno in generale* $\mathrm{s}'_{\mathrm{i}}, \mathrm{s}''_{\mathrm{ik}}, \mathrm{s}'''_{\mathrm{ikl}}, \ldots$

In conclusione, sotto la riserva che abbiam posta per la singolarità di F in O, abbiamo che le singolarità di $\overline{F}$, e quindi anche quelle di F', a cui dà origine la detta singolarità di F in O, *sono meno complicate di questa.* Non sembra difficile completare in ogni punto il ragionamento precedente, e specialmente coll'estenderlo anche al caso che fra i punti multipli di F successivi ad O ve ne siano di quelli che non si possano congiungere (con O) mediante rami lineari: si tratterà di considerare pei rami superlineari di curve γ e $\overline{\gamma}$ con le origini $O, \overline{O}$, i caratteri di cui s'è detto al n.⁰ 6 (ed anche i contatti di $\overline{\gamma}$ con la superficie $\overline{\Omega}$). Qui però non ci fermeremo su ciò.

37. Così pure, — dopo d'aver detto nei n.ⁱ 35 e 36 dei punti singolari di F' a cui dànno origine i punti particolari $O_1, O_2, \ldots, O_h$ di F — ci limiteremo a fare un brevissimo cenno di quelli a cui dànno origine i punti generici della linea multipla L di F.

Sulla varietà M_3 che è rappresentata nello spazio Σ dal sistema lineare ∞^r delle superficie ψ, ad un punto generico di L, che è linea base semplice di questo sistema, corrispondono [41] gl'infiniti punti di una retta; la quale, movendosi quel punto su L, descrive su M_3 una superficie rigata Λ. Come un punto generico di M_3, nella corrispondenza lineare che intercede fra le superficie del sistema $\infty^r\, \psi$ e

---

[41] Cfr. il lavoro del sig. NOETHER (Math. Ann., II) citato in nota al principio del n.⁰ 26.

gl'iperpiani di S_r, rappresenta il sistema di ∞^{r-1} superficie ψ passanti per un punto generico di Σ; così un punto di Λ rappresenta un sistema ∞^{r-1} di superficie ψ che in un punto di L hanno comune il piano tangente. Per tal modo la superficie Λ è biunivocamente riferita alla serie ∞^2 degli elementi — punto e piano — composti dei punti di L e dei piani tangenti in essi ad L. — Fra questi elementi ve ne sono ∞^1 che appartengono alla superficie data F, composti cioè dei punti di L coi piani tangenti in essi ad F. In corrispondenza vi sarà sulla rigata Λ una linea L' che starà sulla superficie F' trasformata di F, e sarà appunto la linea di F' corrispondente alla linea multipla L di F.

Si vede subito quale sarà la multiplicità di F' in un punto generico di L'. Ciò equivale a domandare la multiplicità d'intersezione in quel punto di due sezioni iperpiane di F'; ossia per le due superficie ψ corrispondenti, le quali avranno comune un elemento (punto-piano) di L con la superficie F, quante fra le loro intersezioni con F vengono assorbite da quell'elemento. Ora due ψ si tagliano oltre che in L secondo una linea γ sì che ogni elemento $P\pi$ (punto e piano tangente in esso) comune a γ ed L, e variabile al variare delle due ψ, corrisponde ad un punto P' di Λ situato sui due iperpiani omologhi delle due ψ. Se il punto P' muovendosi su una generatrice rettilinea di Λ viene a cadere in un punto di F', ciò significherà che, P restando fisso, il piano π diventa uno dei piani tangenti in P ad F; ossia che γ, la quale già incontrava F in P, diventa tangente ivi a questa superficie (e precisamente secondo quel piano tangente π). La multiplicità di P' per F' sarà data dall'incremento che avrà subìto per questo fatto la multiplicità d'intersezione in P di F con γ: vale a dire, se la composizione del punto singolare P di F è espressa dai caratteri $s, s'_i, s''_{ik}, \ldots$, la multiplicità di P' per F' è s'_i, l'indice i corrispondendo a quel piano tangente π di F in P che dà origine a P' e precisamente ad una direzione *generica* nel fascio $P\pi$ (42).

(42) Nel finire la revisione delle bozze, sento il dovere di ringraziare il D.r Beppo Levi, mio discepolo, per l'ajuto intelligente che m'ha prestato in questa revisione. — In pari tempo avvertirò che questo giovane nella sua dissertazione di laurea dedicata alle singolarità superiori delle curve algebriche sghembe (iperspaziali) ha studiato più profondamente quei caratteri relativi ai rami delle dette curve dei quali ho fatto cenno qui al n.° 6; e che egli pure mi ha comunicato, per la proposizione contenuta al n.° 3 di questo lavoro, una dimostrazione geometrica, la quale si basa sul fatto che per gli h punti s-pli successivi di F ivi nominati si può sempre far passare una superficie che abbia in O un punto semplice, ed applica alla curva intersezione di questa superficie colla F una disuguaglianza che lega l'ordine alle multiplicità della curva.

INDICE

(N. d. R.) Fanno seguito a questa Memoria due brevi Note pubblicate nel vol. 32 (1897) degli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », nelle quali si criticano procedimenti e risultati in proposito di altro autore italiano. Si omette la pubblicazione di queste due Note che hanno carattere polemico e non aggiungono nulla di essenziale alla Memoria del 1896 qui riprodotta.