Corrado Segre

Sulla forma Hessiana

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **4** (1895), p. 143–148

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 305–311

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_305>

XVI.

SULLA FORMA HESSIANA

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. IV, 1895 - 2º Semestre, pp. 143-148.

È noto quale sia in generale la multiplicità della Hessiana di una curva piana e di una superficie in un punto multiplo della forma fondamentale, e quali rette siano le tangenti alla Hessiana in questo punto (¹). Poniamo, per maggior generalità, che si abbia una forma f d'ordine n ad un numero qualunque, $d+1\ (\geq 3)$, di variabili $x_0\, x_1\, x_2 \dots x_d$, ossia una forma dello spazio a d dimensioni; e sia il punto $O\,(1\ 0\ 0 \dots 0)$ s-plo per questa forma $(s < n)$, sicchè

$$f \equiv x_0^{n-s}\, u^s + x_0^{n-s-1}\, u^{s+1} + \dots ,$$

dove i simboli $u^s, u^{s+1}, \dots$ indicano forme nelle sole d variabili $x_1\, x_2 \dots x_d$, rispettivamente degli ordini $s, s+1, \dots$ Indichiamo poi coll'aggiungere indici inferiori $1, 2, \dots, d$ a quei simboli la derivazione delle corrispondenti forme rispetto ad $x_1, x_2, \dots, x_d$. Allora la Hessiana di f, quando per brevità si ponga $x_0 = 1$, sarà:

$$\begin{array}{lll}
(n-s)(n-s-1)\,u^s + (n-s-1)(n-s-2)\,u^{s+1} + \dots, & (n-s)\,u_1^s + (n-s-1)\,u_1^{s+1} + \dots, & (n-s)\,u_2^s + (n-s-1)\,u_2^{s+1} + \dots, \\
(n-s)\,u_1^s + (n-s-1)\,u_1^{s+1} + \dots, & u_{11}^s + u_{11}^{s+1} + \dots, & u_{12}^s + u_{12}^{s+1} + \dots, \\
(n-s)\,u_2^s + (n-s-1)\,u_2^{s+1} + \dots, & u_{12}^s + u_{12}^{s+1} + \dots, & u_{22}^s + u_{22}^{s+1} + \dots, \\
\dots & \dots & \dots
\end{array}$$

(¹) V. Brill, *Ueber die Hesse'sche Curve,* Math. Ann., XIII, 1878; Rohn, *Das Verhalten der Hesse'schen Fläche in den vielfachen Punkten und vielfachen Curven einer gegebenen Fläche,* Math. Ann., XXIII, 1884. — Cfr. anche E. Kötter, *Die Hesse'sche Curve in rein geometrischer Behandlung,* Math. Ann., XXXIV, 1889.

È opportuno trasformarla (col sig. ROHN, loc. cit.) aggiungendo anzitutto alla 1ª orizzontale moltiplicata per $-(s-1)$ quelle seguenti moltiplicate per $(n-s)\,x_1$, $(n-s)\,x_2, \ldots,$ con che la 1ª orizzontale viene ad avere in tutti gli elementi un fattore $(n-1)$, che si sopprimerà; e poi operando una modificazione analoga sulla 1ª verticale. Con ciò si viene ad introdurre l'ipotesi: $s>1$. E la Hessiana di f diventa, a meno del fattor numerico $(n-1)^2/(s-1)^2$:

$$\begin{vmatrix} -\varrho u^s-(\varrho-2)\,u^{s+1}-\ldots-(\varrho-h\,[h+1])\,u^{s+h}+\ldots, & u_1^{s+1}+2u_1^{s+2}+\ldots+hu_1^{s+h}+\ldots, & u_2^{s+1}+2u_2^{s+2}+\ldots, \\ u_1^{s+1}+2u_1^{s+2}+\ldots+hu_1^{s+h}+\ldots, & u_{11}^s+u_{11}^{s+1}+\ldots & ,u_{12}^s+u_{12}^{s+1}+\ldots, \\ u_2^{s+1}+2u_2^{s+2}+\ldots & ,u_{12}^s+u_{12}^{s+1}+\ldots & ,u_{22}^s+u_{22}^{s+1}+\ldots, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}$$

dove per brevità s'è posto

$$\frac{(s-1)\,(n-s)}{n-1}=\varrho\,.$$

Sviluppando ora questo determinante (che nel seguito indicherò con Δ), si vede subito che l'insieme dei termini del minimo ordine nelle variabili $x_1\ldots x_d$ sarà dato in generale da $-\varrho u^s$ moltiplicato per la Hessiana della forma u^s rispetto a quelle variabili, e sarà quindi d'ordine $s+d\,(s-2)=(d+1)\,s-2d$. Adunque: *l'Hessiana di* f *ha in generale nel punto* s*-plo di questa forma la multiplicità* $(d+1)\,s-2d$; *il suo cono tangente in quel punto si compone del cono tangente ad* f (*cioè* u^s) *e del cono Hessiano di questo* (Hessiana di u^s rispetto alle variabili $x_1\ldots x_d$). È questa, se si pone $d=2$ e $d=3$, la proposizione nota a cui alludevamo da principio.

Riguardo ad essa si osservi che la multiplicità dell'Hessiana di f riuscirà maggiore di quella enunciata, quando svanisca il gruppo di termini di cui s'è parlato, vale a dire (poichè u^s non è identicamente nullo) quando sia identicamente nulla l'Hessiana di u^s rispetto ad $x_1\ldots x_d$. Si sanno assegnare tutte le forme u^s per le quali ciò accade (2); il caso più ovvio ed il solo che si presenti finchè $d\leq 4$ è quello in cui u^s abbia un elemento $(x_1\ldots x_d)$ s-plo, cioè il cono d'ordine s e di centro O rappresentato dalla forma u^s abbia una generatrice s-pla e sia quindi un *cono di* 2ª *specie* avente per *sostegno* questa retta. Poniamo, più in generale, che il cono u^s tangente nel punto s-plo O ad f sia *di specie* $i+1$, cioè

(2) GORDAN u. NÖTHER, *Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet,* Math. Ann., X, 1876.

abbia per sostegno uno spazio $S_i \, (0 \leq i \leq d - 1)$. Assumiamo questo spazio come spazio fondamentale $x_{i+1} = \ldots = x_d = 0$: allora l'ipotesi fatta equivale a dire che la forma u^s contiene solo le variabili $x_{i+1}, \ldots, x_d$ e non $x_1, \ldots, x_i$. Ne segue che sono nulle le $u^s_{1k}, \ldots, u^s_{ik}$ per tutti i valori di k; e che per conseguenza nello sviluppo del nostro determinante Δ l'insieme dei termini del minimo ordine sarà ora dato, in generale, da

$$-\varrho u^s \times \begin{vmatrix} u^{s+1}_{11} & \ldots & u^{s+1}_{1i} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ u^{s+1}_{1i} & \ldots & u^{s+1}_{ii} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u^s_{i+1,\,i+1} & \ldots & u^s_{i+1,\,d} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ u^s_{i+1,\,d} & \ldots & u^s_{d,\,d} \end{vmatrix}$$

Dunque: *in un punto* s*-plo di* f *tale che il cono tangente in esso ad* f *abbia per sostegno un* $\mathrm{S_i}$ *la Hessiana di* f *ha in generale la multiplicità* $(\mathrm{d}+1)\mathrm{s} - 2\mathrm{d} + \mathrm{i}$; *fanno parte del cono tangente alla Hessiana di* f *in generale il cono d'ordine* s *tangente ad* f *ed anche l'Hessiano d'ordine* $(\mathrm{d}-\mathrm{i})(\mathrm{s}-2)$ *di questo cono nella forma fondamentale di spazi* $\mathrm{S_{i+1}}$ *che ha per sostegno l'*$\mathrm{S_i}$. Quanto alla parte residua, data dal determinante delle 2ᵉ derivate di u^{s+1} rispetto a $x_1, \ldots, x_i$, si osservi che queste derivate coincidono con quelle della forma $(n-s)\, x_0\, u^s + u^{s+1}$, che è la polare d'ordine $s+1$ del punto O rispetto ad f: e si potrà dire, ad esempio, che *la parte residua, d'ordine* $\mathrm{i}(\mathrm{s}-1)$, *del cono tangente in* O *alla Hessiana di* f *è l'inviluppo dei coni di centro* O *che sono le seconde polari dei punti dell'*$\mathrm{S_i}$ *rispetto alla polare d'ordine* $\mathrm{s}+1$ *di* O *rispetto ad* f. — Fra le applicazioni che si possono fare di questa proposizione va rilevato il caso che la forma f ammetta una varietà M_i di dimensione i di punti s-pli: perchè allora il cono tangente ad f in un punto generico di quella varietà è in generale appunto di specie $i+1$.

Ma lo scopo di questa Nota non è di approfondire ulteriormente la determinazione delle multiplicità che in vari casi può avere l'Hessiana di f: analisi che già nel campo ternario appare un po' minuziosa. Si tratta invece di richiamar l'attenzione su un fatto relativo ai contatti della Hessiana di f con le rette tangenti ad f nel punto O. Poniamo che una retta t incontri f nel punto s-plo O un numero qualsiasi $s+h$ di volte, o, come diremo per brevità, abbia con f in O un *contatto d'ordine* h: vogliamo vedere di qual ordine sarà il suo contatto con la Hessiana di f. Assumiamo t come retta fondamentale $x_2 = \ldots = x_d = 0$: sostituendo queste equazioni nella $f = 0$ dovrà venire la soluzione $x_1 = 0$ $s+h$ volte. Potremo dunque porre (ordinando secondo le potenze discendenti di x_1):

$$
\begin{aligned}
u^s &\equiv x_1^{s-1} \; \Sigma\, a_l\, x_l + \frac{1}{2}\, x_1^{s-2} \; \Sigma\, a_{lk}\, x_l\, x_k + \dots \\
u^{s+1} &\equiv x_1^{s} \; \Sigma\, b_l\, x_l + \frac{1}{2}\, x_1^{s-1} \; \Sigma\, b_{lk}\, x_l\, x_k + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u^{s+h-1} &\equiv x_1^{s+h-2} \, \Sigma\, d_l\, x_l + \frac{1}{2}\, x_1^{s+h-3} \, \Sigma\, d_{lk}\, x_l\, x_k + \dots \\
u^{s+h} &\equiv e x_1^{s+h} + x_1^{s+h-1} \, \Sigma\, e_l\, x_l + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

dove gl'indici l, k variano da 2 a d ed è

$$e \neq 0 .$$

Il numero delle intersezioni coincidenti in O della retta t con la Hessiana di f sarà dato dal minimo esponente a cui comparirà x_1 in questa Hessiana dopo che vi si sia posto $x_2 = \dots = x_d = 0$. Riscriviamo dunque il determinante Hessiano Δ ponendovi per le u le loro espressioni attuali; ed inoltre annullandovi $x_2, \dots, x_d$, e tenendo solo conto, in ciascun elemento, del termine più basso in x_1. Avremo:

$$
\begin{vmatrix}
-(\varrho - h[h+1])\, e x_1^{s+h}, & h(s+h)\, e x_1^{s+h-1} \;, & b_2\, x_1^s \;, & b_3\, x_1^s \;, \dots \\
h(s+h)\, e x_1^{s+h-1}, & (s+h)(s+h-1)\, e x_1^{s+h-2}, & (s-1)\, a_2\, x_1^{s-2}, & (s-1)\, a_3\, x_1^{s-2}, \dots \\
b_2\, x_1^s \;, & (s-1)\, a_2 x_1^{s-2} \;, & a_{22} x_1^{s-2}, & a_{23} x_1^{s-2}, \dots \\
b_3\, x_1^s \;, & (s-1)\, a_3 x_1^{s-2} \;, & a_{23} x_1^{s-2}, & a_{33} x_1^{s-2}, \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{vmatrix}
$$

Analizzando questo determinante si vede che l'insieme dei termini più bassi nel suo sviluppo sarà dato da:

$$
(1) \qquad x_1^{(d+1)s-2d+2} \times (s-1)^2
\begin{vmatrix}
0 & 0 & b_2 & b_3 & \dots \\
0 & 0 & a_2 & a_3 & \dots \\
b_2 & a_2 & a_{22} & a_{23} & \dots \\
b_3 & a_3 & a_{23} & a_{33} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{vmatrix}
$$

oppure da

$$(2)\qquad x_1^{(d+1)s-2d+h} \times (-\varrho + h[h+1])(s-1)^2 e \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_3 & a_{23} & a_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

o finalmente dalla somma di queste espressioni, a seconda che $h > 2$, oppure $h < 2$, oppure $h = 2$. Però questa distinzione di casi non occorre se $d = 2$, cioè se f è una forma ternaria, una curva piana; giacchè allora il determinante che comparisce in (1) svanisce identicamente, e quindi rimane solo in ogni caso l'espressione (2). Concludiamo la proposizione seguente:

Abbiasi una retta t *la quale nel punto* O s*-plo per* f *abbia un incontro* (s + h)*-punto, cioè (come diremo anche) un contatto d'ordine* h, *con* f. *Allora*: 1⁰) *se* $d > 2$, *cioè se si esclude il caso della curva piana, e se inoltre è* $h \geq 2$, *la retta* t *avrà in generale con la Hessiana di* f *in* O *un incontro multiplo secondo* $(d+1)s - 2d + 2$, *cioè un contatto di* 2º *ordine*. 2⁰) *se invece si tratta di una curva piana, cioè* $d = 2$ (*qualunque sia* h); *oppure anche se* $h = 0$ *od* $h = 1$ (*qualunque sia* d); *la retta* t *avrà in generale in* O *con la Hessiana di* f *un incontro multiplo secondo* $(d+1)s - 2d + h$, *ossia un contatto d'ordine* h.

Si vede pure quando è che vi sarà eccezione, cioè che il contatto della retta t con la Hessiana di f sarà più elevato dell'enunciato. Dovrà svanire quel termine, (1), o (2), o loro somma, che abbiamo ottenuto come il più basso; cioè dovrà svanire il suo coefficiente. Ed è facile assegnare un significato geometrico a questa condizione. Nel 1⁰ caso ($d > 2$, $h \geq 2$) la condizione che otteniamo per un contatto d'ordine superiore al 2⁰ dipende dai coefficienti di f (e precisamente di u^s, u^{s+1}) (³). Ma nel 2⁰ caso ($d = 2$, oppure $h = 0, 1$) la condizione, che deriva allora dall'espressione (2), può soddisfarsi in due modi; cioè annullando il determinante che compare nel coefficiente di (2), ed anche annullando il fattore $(-\varrho + h[h+1])$. Sostituendo a ϱ il suo valore abbiamo: *Se si tratta di una curva piana, cioè se* $d = 2$; *oppure anche se* d *è qua-*

(³) Nel campo quaternario, $d = 3$, la condizione perchè la retta t a contatto d'ordine $h > 2$ con f, abbia contatto d'ordine superiore al 2⁰ con la Hessiana di f si riduce a questo: che t conti almeno due volte fra le $s(s+1)$ tangenti principali di f in O (cioè fra le generatrici comuni ai coni u^s, u^{s+1}).

lunque, ma h $= 0$ *oppure* h $= 1$; *la retta* t *a contatto d'ordine* h *con* f *avrà contatto d'ordine maggiore di* h (4) *con la Hessiana di* f: 1^0) *quando essa giace nel cono Hessiano del cono tangente in* O *ad* f; 2^0) *quando fra l'ordine* n *di* f, *la multiplicità* s *in* O, *ed il numero* h *passa la relazione*

$$\frac{(s-1)(n-s)}{n-1} = h(h+1) .$$

È facile determinare tutte le soluzioni intere $h > 0$, $s > 1$, $n > s$ di questa relazione. Per brevità si scriva di nuovo $h(h+1) = \varrho$, ed in luogo di $s-1$ ed $n-s$ si scriva x e y: si avrà l'equazione

$$\frac{xy}{x+y} = \varrho ,$$

ossia

$$(x-\varrho)(y-\varrho) = \varrho^2 ,$$

donde risulta che $x-\varrho$ ed $y-\varrho$ sono due divisori di ϱ^2, fra loro reciproci (rispetto a ϱ^2), entrambi positivi (perchè se fossero negativi, tenendo conto che x e y son positivi, risulterebbero entrambi quei divisori di ϱ^2 minori di ϱ in valor assoluto). Dunque: per ogni valore di h, assunto ad arbitrio, si calcoli $\varrho = h(h+1)$, si prendano (in tutti i modi possibili) due divisori positivi di ϱ^2 fra loro reciproci (rispetto a ϱ^2), e ad ognuno di essi s'aggiunga ϱ: l'una somma darà $s-1$, e l'altra $n-s$, da cui poi si otterrà n. Come si vede, con ogni soluzione (h, s, n) esisterà pure la soluzione $(h, n-s+1, n)$.

Per $h = 1$ si ottengono in questo modo tre soluzioni: $n = 9$, $s = 5$; $n = 10$, $s = 4$; $n = 10$, $s = 7$. Dunque: *al fatto che le tangenti ad una forma* f *in un suo punto multiplo sono pure tangenti alla Hessiana di* f *in questo punto si può aggiungere che esse diventano tutte quante tangenti principali od osculatrici (cioè a contatto d'ordine superiore al 1°) per la detta Hessiana nei casi di una forma* f *del 9° ordine con punto 5-plo, e di una forma* f *del 10° ordine con punto 4-plo, oppure 7-plo.*

Per $h = 2$, e così pure per valori superiori di h, bisogna limitarsi alle forme ternarie. E si ha: *se una retta ha contatto di 2° ordine con una curva piana in un punto multiplo di questa, essa vi avrà pure contatto di 2° ordine, in generale, con la curva Hes-*

---

(4) Più esatto sarebbe dire « un incontro multiplo secondo più di $(d+1)s - 2d + h$ ». Analogamente nel seguito.

siana; ma avrà contatto di ordine superiore al 2^o *con la Hessiana, quando la curva fondamentale sia d'ordine* 25; 26; 28; 33; 50 *ed abbia nel punto la multiplicità rispett.* 13; 11 *oppure* 16; 10 *oppure* 19; 9 *oppure* 25; 8 *oppure* 43.

Ecc. ecc.

Sembra degna di rilievo l'esistenza di queste forme f particolari solo per l'ordine e per la multiplicità (ma non ulteriormente, pei coefficienti), le cui Hessiane hanno nel punto di cui si tratta singolarità più elevate (rispetto alle tangenti) di quel che non abbiano in generale.

Non occorre nemmeno avvertire che fatti analoghi si riscontrano più in generale nello studio della *Jacobiana* di più forme, quando si prenda in esame l'ordine del contatto che essa ha con una retta passante per un suo punto determinato.