Corrado Segre

Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve

Bibliotheca Math., Vol. **6** (1892), p. 33–47

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 185–197

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_185>

XIV.

INTORNO ALLA STORIA DEL PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA E DEI SISTEMI DI CURVE (1)

« Bibliotheca mathematica », neue Folge, 6, 1892, pp. 33-47.

I.

Nella seduta del 27 Giugno 1864 lo CHASLES, esponendo all'Accademia scientifica francese i procedimenti generali con cui egli otteneva le proprietà dei sistemi (semplicemente infiniti) di coniche di date caratteristiche (2), dimostrava « *una volta per tutte* » — come *lemma* da cui derivano quei procedimenti generali — quello che poi fu chiamato *principio di corrispondenza* (fra i punti di una retta): cioè che in una corrispondenza (α, β) tra i punti di una retta vi sono $\alpha + \beta$ punti uniti. È in base a ciò che si suole attribuire *esclusivamente* allo CHASLES la scoperta di questo principio — fondamentale nella geometria moderna degli enti algebrici (in quanto che costituisce in gran parte dei casi la forma più opportuna sotto cui si può far comparire in questa geometria la nozione di *algebricità*, cioè il teorema fondamentale dell'algebra). Ma così facendo mi pare si commetta sempre un'inesattezza storica: poichè già tre anni prima dello CHASLES il sig. DE JONQUIÈRES, e seguendo il suo esempio il sig. CREMONA, avevano pubblicate parecchie applicazioni di quel principio.

Alcuni, — tra cui lo stesso CHASLES in qualche punto della polemica che ebbe col JONQUIÈRES negli anni 1866-1867 (polemica

---

(1) Questo scritto è lo sviluppo di una nota che si trova nella Relazione sulla Memoria del Prof. R. DE PAOLIS: *Le corrispondenze proiettive* ecc., Atti Acc. Torino, XXVII, 1892, p. 366. — Si confrontino le utili *Notizie storiche sulla Geometria numerativa,* di GINO LORIA, Bibl. math., 1888, pp. 39-48, 67-80; 1889, pp. 23-27.

(2) Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences (de Paris) 58, 1864, p. 1167; v. p. 1175.

che avremo da citare ripetutamente) (³), — vogliono considerare quel principio come una semplice estensione del « *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* » enunciato in generale dallo CHASLES il 24 Dicembre 1855 (⁴). Ma in realtà questo consisteva, com'è noto, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2), tra due forme semplici non è altro che un'omografia tra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed un'involuzione ordinaria dell'altra. Si trattava dunque della *struttura* della corrispondenza; e non del *numero degli elementi uniti*, come nel principio di corrispondenza del 1864. Inoltre nè la detta comunicazione del 1855, nè i successivi lavori pubblicati dallo CHASLES fino al 1864 lascian capire che questi avesse già vista l'utilità di considerare corrispondenze d'indici superiori a 2, e specialmente di ridurre i problemi geometrici alla ricerca degli elementi uniti di tali corrispondenze: nè vi si trova fatto il passaggio dall'equazione bilineare che rappresenta la corrispondenza (1, 1) alle

---

(³) In conseguenza indichiamo subito gli scritti in cui essa principalmente si svolse: CHASLES, *Observations relatives à la théorie des systèmes de courbes* (Comptes rendus, 63, 1866 (12 nov^e^), pp. 816-821). — JONQUIÈRES, *Observations relatives à la théorie des séries ou systèmes de courbes* (ibid. (19 nov^e^), p. 870-874). — CHASLES, *Observations au sujet de cette communication* (ibid. (19 nov^e^), pp. 874-878). — *Addition aux observations présentées dans la dernière séance* etc. (ibid. (26 nov^e^), pp. 907-909). — JONQUIÈRES, *Recherches sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces algébriques d'ordre quelconque, suivies d'une réponse à quelques critiques de M. Chasles* (Paris, Gauthier-Villars, 8 Déc. 1866). — CHASLES, *Réponse à une revendication de priorité* (Paris, G.-V., 1867). — JONQUIÈRES, *Documents relatifs à une revendication de priorité* (litograph., Paris, 4 Févr. 1867). — CHASLES, *Réponse aux documents relatifs à une revendication de priorité* (Paris, G.-V., 1867). — JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles sur une question en litige* (Paris, G.-V., 31 Mai 1867). — V. anche l'accenno che poi ne fece lo CHASLES nella nota a pp. 330-331 del *Rapport sur les progrès de la géométrie* (Paris 1870).

(⁴) Comptes rendus, 41, 1855, p. 1097. Diciamo « enunciato *in generale* » perchè delle allusioni *particolari* se ne trovano già in lavori precedenti dello CHASLES. Non se ne fa cenno nel *Traité de géométrie supérieure* (1852). Ma ad es^o^ nella Nota *Sur les courbes du 4^e^ et 3^e^ ordre* del 16 ago 1853 (Comptes rendus, 37, p. 272) si trova (p. 274) il concetto che l'*univocità* è la proprietà caratteristica dell'omografia tra due fasci di rette; pei parametri λ, λ' di due fasci omografici di coniche avendosi una relazione analitica univoca si osserva che questa non potrà essere che della forma $\alpha\lambda\lambda' + \beta\lambda + \gamma\lambda' + \delta = 0$; ed in nota si aggiunge: « Ce mode de démonstration, qui comporte la rigueur désirable, et « qui dispense de tout calcul, pourra être employé dans beaucoup de questions: « il forme, à cet égard, une des applications les plus utiles de la théorie du rap« port anharmonique ».

equazioni di corrispondenze superiori. — D'altronde lo stesso CHASLES, quando nel 1866 alle sue prime osservazioni polemiche volle aggiungere (Comptes rendus etc. 63, nota alla p. 821) un reclamo contro l'uso che il JONQUIÈRES poco prima (nelle Note di Saïgon che citeremo più avanti) aveva fatto del metodo delle corrispondenze, senza citarlo, avvertiva: «... j'ai formulé et démontré « ce mode de procéder, une fois pour toutes, sous le titre de *Lemme*, « dans nos *Comptes rendus* t. 58 p. 1175, ainsi que je l'avais fait « dans les leçons de la Sorbonne de 1863-1864 » ; e non aggiunse, come certo avrebbe fatto, ragioni di priorità anteriori a queste.

È stato citato in proposito anche il manoscritto del *Traité des sections coniques* che lo CHASLES comunicò al JONQUIÈRES nei primi mesi del 1859 (5). Ma in quel manoscritto, come nell'opera stampata (1865), i passi a cui quella citazione poteva alludere si riferivano sempre a corrispondenze d'indici 1 o 2 (6).

Del resto il JONQUIÈRES anche prima del 1859 aveva mostrato di essere pienamente nell'ordine d'idee che doveva condurre al principio generale di corrispondenza: nei *Mélanges de géométrie pure* (1856), in cui il Cap. 4° è appunto dedicato a quello che egli chiama *principe de correspondance anharmonique* dato poco prima dallo CHASLES; ed in qualche lavoro successivo (7). Ma (se non erro) fu solo nel 1861, e precisamente nella Nota intitolata *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de Math., (2) 6, 1861, p. 113), che il JONQUIÈRES introdusse nella scienza l'uso di corrispondenze *d'indici qualunque* fra i punti di una retta. In quella Nota sono per la prima volta studiate delle proprietà generali delle *serie* (∞^1) di curve piane di dato ordine; ed introdotta la nozione dell'*indice* di una serie (numero delle curve passanti per un punto dato), ne vien dimostrata la grande importanza. Ciò è ben noto, ed è stato più volte ricordato: mentre non si suol

---

(5) V. l'allusione dello CHASLES, Comptes rendus, 63, 1866, p. 908, e le parole esplicite nel *Rapport* p. 331. Anche il JONQUIÈRES riconosce l'influenza che sul modo di procedere (mediante corrispondenze) da lui adottato nel 1861 aveva esercitato lo CHASLES sia col *Principe* del 1855 sia col manoscritto del 1859: v. specialmente la *Lettre à M. Chasles* p. 10.

(6) E neppure — a quanto si può giudicare dall'opera stampata — alla determinazione degli elementi uniti (così a p. 345 troviamo, è vero, una corrispondenza (2, 2); ma non se ne considerano i punti uniti).

(7) Ad es° in una *Note sur la géométrie organique de* MACLAURIN, Journal de mat., (2) II, 1857, p. 153, nella quale in particolare (a p. 158) si determina l'ordine di una curva considerando i punti uniti di una speciale corrispondenza (2, 2).

rilevare l'altro fatto suddetto. Esso si presenta: nella determinazione dell'ordine, $N(m+n)$, della curva generata da due serie d'indice N e di ordini m, n, in corrispondenza univoca (teor. V della Nota); in quella dell'ordine, $N(m+2n-3)$, del luogo dei punti aventi lo stesso asse armonico rispetto ad una curva fissa d'ordine m e ad una curva di una data serie d'indice N e d'ordine n (teor. VII); infine in quella del numero delle tangenti doppie di una curva piana (teor. XI). Ognuna di queste determinazioni è ridotta a quella del numero dei punti uniti di un'opportuna corrispondenza (α, β) su di una retta, per la quale si assegnano i valori di α, β. Poi, in ciascun caso, si osserva che in conseguenza della corrispondenza le ascisse x, x' dei punti omologhi saran legate da un'equazione della forma $A x^\alpha x'^\beta + + \ldots = 0$; ed allora ponendo $x = x'$ si trae che vi sono $\alpha + \beta$ punti uniti. Insomma si fa *ogni volta* quello stesso breve ragionamento che tre anni dopo faceva, *una volta per tutte*, lo CHASLES.

Subito dopo la publicazione della Nota del JONQUIÈRES, il CREMONA nell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie dell'Acc. delle scienze di Bologna (1) 12, 1861, p. 305) adottava quel metodo per determinare l'ordine dei luoghi geometrici, cioè di ridursi alla ricerca dei punti uniti di una corrispondenza; e lo applicava, oltre che ai citati teor[i] V e VII di JONQUIÈRES (*Introduzione*, n[i] 83 (8) e 87), alla dimostrazione di altre proposizioni importanti (n[i] 98, 106, 116, 117). — Si noti che per trovare il numero dei punti uniti delle corrispondenze che incontra il CREMONA fa una prima volta (n. 83) il ragionamento su riferito; ma poi in seguito, determinati in ciascun caso i valori di α, β, conchiude *senz'altro* il numero $(\alpha + \beta)$ dei punti uniti (limitandosi appena a citare, per le prime volte, il n. 83).

II.

Alcuni dei risultati contenuti nei *Théorèmes généraux* etc. furono giudicati difettosi dallo CHASLES. I suoi dubbi, a quanto pare, si riferivano principalmente (e per sè e per le conseguenze) al teor. II che dà $2(n-1)N$ come numero delle curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una retta assegnata, ed al teor. V sul citato numero $N(m+n)$: e dipendevano da ciò che le dimostrazioni

---

(8) Ove però le due serie sono d'indici *qualunque* M, N.

di Jonquières eran basate sul grado di un'equazione, e lo Chasles osservava che questo poteva abbassarsi. Avendo egli comunicato al Jonquières i suoi dubbi (9), questi — senza forse riflettervi abbastanza — si affrettò a publicare (febbrajo 1863) delle rettifiche (10) dirette a riguardare i vari numeri assegnati nel suo lavoro come *limiti superiori* (cioè come validi *in generale e al più*) anzi che come valori esatti dei numeri che si volevan determinare. Il Cremona accolse *provvisoriamente* queste modificazioni (11) e le mise nella traduzione tedesca della sua *Introduzione* (12) là dove riproduce i teoremi di Jonquières (ni 83, 85, 87) (13). Ma presto egli si convinse che i dubbi dello Chasles, almeno in quanto si riferivano al breve ragionamento algebrico con cui il Jonquières determinava il numero dei punti uniti di una corrispondenza, non sussistevano; ed in una lettera inviata al Jonquières da Bologna [il] 29 Genn° 1864 (14) completava quel ragionamento algebrico notando che dalla considerazione dei valori di x' corrispondenti ad $x = \infty$ segue che nell'equazione $A\,x^{\alpha}\,x'^{\beta} + \ldots = 0$ della corrispondenza si può sempre supporre (in generale) che non manchi il termine di grado più alto, sicchè $\alpha + \beta$ sia bene il preciso numero dei punti uniti e non soltanto un limite

---

(9) Dubbi analoghi sembrano quelli espressi dallo Chasles il 29 dice 1862 (Comptes rendus, 55, p. 934) nella Relazione sul « grand prix de mathématiques » del 1862 (teoria delle quartiche piane), relativamente alla Memoria n° 1, che poi risultò essere del Jonquières. Ed ancora otto anni dopo (nella nota a p. 329 del *Rapport*) egli insisteva sull'inesattezza del numero $2\,(n-1)\,N$ di Jonquières risultante dalla possibilità che alcuni coefficienti dell'equazione relativa si annullino.

(10) Jonquières, *Note au sujet d'un article publié dans le Journal t. VI* (Journal de math., (2) VIII, 1863, p. 71). — Lettera al Cremona, publicata nel Giornale di matem., 1, 1863, p. 128, e riprodotta nei Nouv. ann. de math., (2) 2, 1863, pp. 204-206.

(11) V. le poche parole che fa seguire alla lettera del Jonquières nel Giornale di matem. loc. cit.

(12) Cremona, *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven* (Greifswald, 1865): v. anche la prefazione del traduttore datata « settembre 1864 », dalla quale appare pure che, sebbene il vol. porti la data del 1865, le cose in questione erano già stampate molto tempo prima.

(13) Non però — si noti — nelle sue proprie ulteriori applicazioni del metodo delle corrispondenze.

(14) Questa lettera, invocata ripetutamente dal Jonquières nella sua polemica (anzitutto in nota a p. 372 del t. 63 dei Comptes rendus, ove a proposito della priorità reclamata dallo Chasles dice « s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet ce serait M. Cremona ») fu poi resa pubblica da lui nei *Documents* pp. 14-16.

superiore di esso. Il JONQUIÈRES comunicò subito la lettera del CREMONA allo CHASLES, il quale sul momento non si mostrò persuaso (15). Ma poco dopo esponeva il principio di corrispondenza con quella stessa dimostrazione nel suo corso della Sorbonne (16) e nella citata comunicazione del 27 giugno 1864 (17). — Il JONQUIÈRES poi, ritornando (1865) in alcune Note datate da Saïgon (18) sui teoremi dati nel 1861, ed in particolare sui citati teor^{i} II e V, ritirò le rettifiche publicate nel 1863, esponendo di nuovo le dimostrazioni, basate (anche nel teor. II) sul metodo delle corrispondenze, ma completandole con l'osservazione di CREMONA (19).

III.

Gli appunti che lo CHASLES faceva al lavoro di JONQUIÈRES del 1861 gli servirono poi di base nelle pagine polemiche del 1866-1867 per rigettare il rimprovero di non averlo citato nel 1864 nelle sue celebri Note intorno ai sistemi di coniche. Ora si può ben dire che in ciò l'illustre scrittore dell'*Aperçu historique* aveva torto (20). Poichè, ad onta delle inesattezze od imperfezioni che vi si trovano (21),

---

(15) JONQUIÈRES, *Documents* p. 16; *Lettre à M. Chasles* p. 11.

(16) CHASLES, *Réponse aux documents* p. 15.

(17) Anche, per esempio, nel passo già citato del *Traité des sections coniques* p. 345 si trova l'osservazione relativa all'esistenza del termine di grado più alto nell'equazione della corrispondenza. Essa però non era nel manoscritto dato nel 1859 al JONQUIÈRES, come questi rileva (*Documents* p. 10; *Lettre* p. 12).

(18) JONQUIÈRES, *Note sur les systèmes de courbes et de surfaces, et sur certaines formules qui s'y rattachent* (14 nov^{e} 1865; Journal de math., (2) X, 1865, p. 412). — *Deuxième Note sur les séries ou systèmes de courbes et de surfaces* (8 déc. 1865). — *Théorèmes fondamentaux sur les séries de courbes et de surfaces d'ordre quelconque* (15 déc. 1865; Giornale di matem., 4, 1866, p. 45).

(19) Però il nome di CREMONA su quest'argomento non compare publicamente che più tardi: v. la nota (14).

(20) Ed ancora ingiusto fu nel giudicare i *Théorèmes généraux* a pp. 328-331 del *Rapport*, ove il suo scopo sembra rivolto ad annullarne completamente il valore.

(21) Si noti che, mentre lo CHASLES insiste a ritener errate delle cose che in sostanza non son tali, egli non rileva ad es^{o} che nelle dimostrazioni dei teor^{i} V e X si trattano come riduttibili delle corrispondenze le quali invece *non* si spezzano in generale; e, quel che è più, considera quasi come privo d'importanza *perchè evidente* (nel 1866! v. Comptes rendus, 63, p. 818; ecc.) il Lemma di cui qualche volta si valse il JONQUIÈRES secondo cui le curve di una serie d'ordine n e d'indice N possono essere rappresentate da un'equazione ordinaria di grado n i cui coefficienti son funzioni intere e di grado N di un parametro λ! Questa pro-

quel lavoro ebbe indubbiamente una notevole influenza sulla scienza, alla quale dava non solo dei teoremi, ma dei concetti e dei metodi nuovi; e varie proposizioni importanti *sui sistemi di coniche* esposte dallo CHASLES nel 1864 ([22]) non sono che un *perfezionamento* — grazie all'introduzione fatta da CHASLES del *secondo* indice o caratteristica — di cose già date dal JONQUIÈRES *per sistemi d'ordine qualunque* nel 1861 ([23]). Chè se poi si riguarda alle critiche speciali fatte dallo CHASLES, di esse (dopo qualche esitazione) potè giustamente scagionarsi il JONQUIÈRES (prima ancora che nascesse il litigio, e cioè nelle Note di Saïgon) osservando che i numeri incriminati, come il già citato $2(n-1)N$, sono da modificare solo quando si vogliano sottrarre da essi le *soluzioni singolari* che possono comparire e che effettivamente nel determinarli non furono escluse ([24]). Ed il JONQUIÈRES diede alcune condizioni sotto cui, almeno per

---

posizione è evidentemente errata quando la serie non è *razionale.* Come la si possa modificare in tal caso (cioè rappresentando con un'equazione non una curva sola ma un *gruppo* di curve della serie) fu notato nel 1863 dal BATTAGLINI (*Sulle serie di curve d'indice qualunque,* Rend. Acc. Napoli, 2, 1863, p. 149; tradotto in tedesco nell'Archiv der Math. und Phys., 41, 1863, p. 26): ma ancora nelle Note di Saïgon del 1865 il JONQUIÈRES credette di poterla dimostrare; e fu solo nel 1866 che ne riconobbe l'inesattezza. Cfr. nei Nouv. ann. de math., (2) 7, 1868, p. 111 la *Réponse à une observation présentée dans le Giornale di matematiche* t. V. (1867) p. 377. L'osservazione che qui è fatta dall'ASCOLI « *Sopra un teorema di* JONQUIÈRES » mostra l'inesattezza del Lemma suddetto applicandolo alle rette di un inviluppo di classe N (ma esigerebbe a sua volta una lievissima correzione). V. anche intorno alla stessa questione: CAYLEY, *On the curves wich satisfy given conditions,* Phil. Trans., 158, 1867, p. 75 (ivi e a p. 124).

([22]) Così, nella dichiarazione relativa al JONQUIÈRES della quale faremo cenno tra poco (nota ([39])), lo CHASLES intorno all'applicazione del proprio metodo ai problemi di contatto dice: « cette application repose sur une propriété des courbes « d'ordre quelconque (théor. XI) qui n'était point connue ». Invece questo teor. XI di CHASLES (Comptes rendus, 58, 1864, p. 300) non era altro che il già citato teor. VII di JONQUIÈRES applicato ad una serie di coniche e reso più preciso col farvi comparire *entrambe* le caratteristiche di questa.

([23]) Questo modo di giudicare il lavoro del JONQUIÈRES, specialmente in confronto a quelli posteriori dello CHASLES, si trova già ad eso nella Memoria di CAYLEY testè citata e sul principio di quella di HALPHEN, *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Journ. de l'éc. polyt., 28 (cahier 45), 1878, p. 27).

([24]) Il merito di aver messo in piena luce l'influenza delle *soluzioni singolari* spetta, come osservava il JONQUIÈRES, ai lavori di CHASLES del 1864. Però si cfr. anche la nota ([29]).

certi sistemi, tali soluzioni singolari non si presentano generalmente [25].

Queste ultime considerazioni valgono anche per il teorema dato dal BISCHOFF nel 1858 [26], secondo cui il numero delle curve d'ordine n determinate dal passare per dati punti e dal toccare curve date di ordini $m_1, m_2, \ldots$ sarebbe il prodotto $\Pi m(m + 2n - 3)$ [27]: teorema che è ridimostrato (come teor. IX) fra i *Théorèmes généraux* del 1861 di JONQUIÈRES [28]. Quella formola può venir ad esigere riduzioni per l'esistenza di *curve singolari* che soddisfano al problema. Ciò appunto accade, almeno in gran parte dei casi, quando $n = 2$ cioè le curve cercate sono coniche: il che spiega [29] come il numero

---

(25) Queste condizioni consistono nell'esservi un numero sufficiente (superiore cioè ad un limite assegnato) di punti fissi pei quali debban passare le curve del sistema. V.: la 3ª Nota di Saïgon (*Théorèmes fondamentaux* etc.); quella *Sur la détermination des valeurs des caractéristiques dans les séries ou systèmes élémentaires de courbes et de surfaces,* Comptes Rendus, 63, 1866, p. 793 (contenente un richiamo sulla priorità del lavoro del 1861 nell'introduzione della 1ª caratteristica, richiamo a cui fecero seguito le già citate *Observations* dello CHASLES a p. 816 che segnano il principio della polemica); il *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré* r, *qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré* m, etc., Journal für Math., 66, 1866, p. 289; le *Recherches sur les séries* etc. già citate.

(26) BISCHOFF, *Einige Sätze über die Tangenten algebraischer Curven,* Journal für Math., 56, 1859, p. 166: v. p. 172.

(27) Per giungere a ciò il BISCHOFF osserva che in un fascio di curve d'ordine n sono $m(m + 2n - 3)$ quelle tangenti ad una data curva d'ordine m: sicchè quello sarà pure il grado della condizione di contatto fra due curve di ordini n, m nei coefficienti della prima. Da ciò poi scaturisce quella formola in modo evidente. Ora non è forse senza interesse notare che la detta osservazione relativa al fascio di curve si trovava già fra le *Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* dello STEINER (Monatsber. der Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1848; Journal für Math., 47, 1854, p. 1).

(28) A questo fine il JONQUIÈRES dal teor. VII già citato deduce (teor. VIII) che le curve di una serie d'ordine n e d'indice N tangenti ad una data curva d'ordine m sono $Nm(m + 2n - 3)$. E poi, gradatamente, con l'applicazione successiva di questa formola a serie definite da punti fissi e da $0, 1, 2, \ldots$ curve tangenti date, ottiene quella di BISCHOFF.

(29) Questa spiegazione fu data e sviluppata dal CREMONA in due articoli *Sulla teoria delle coniche,* il primo dei quali, publicato nel 1863 (Ann. mat., 5, p. 330; Giornale di matem., 1, p. 225), riguarda le coniche determinate da punti e tangenti; il secondo, in data del 21 febbr° 1864, (Giornale di matem., 2, p. 17) dimostra i teoremi enunciati pochi giorni prima dallo CHASLES (Comptes rendus, 1° febbr° 1864) sulle coniche determinate dal toccare curve date; entrambi mostrano nelle riduzioni prodotte dalle coniche singolari « l'origine dell'appa-

$6^5 = 7776$ che il BISCHOFF trae dalla sua formola per le coniche tangenti a 5 coniche date sia errato.

Riguardo però a questo numero 6^5 per le coniche tangenti a 5 date è bene ricordare che esso era già stato dato fin dal 1847 dallo STEINER (30), il quale accennava che il suo procedimento era graduale e consisteva nel determinare anzitutto le coniche (6) passanti per 4 punti e tangenti ad una conica, poi quelle (6^2) per 3 punti e tangenti a 2 coniche, e così via, fino al numero cercato (6^5). Da queste indicazioni appare l'analogia col metodo, pure graduale, usato poi nel 1861 dal JONQUIÈRES per ottenere la formola di BISCHOFF (31). E può darsi che l'analogia vi fosse pure in ciò: che anche lo STEINER si valesse del principio di corrispondenza (applicandolo probabilmente a corrispondenze $(3, 3), (3 . 6, 3 . 6), \ldots, (3 . 6^4, 3 . 6^4)$ che successivamente si vengono ad avere sulla 1ª, 2ª, ..., 5ª conica introdotta fra i dati), e che appunto nell'uso di questo consistesse quell' « *eine gewisse geometrische Betrachtung* » con cui credeva di aver risolto il problema. — Che lo STEINER in quegli anni fosse già in possesso del metodo di ricerca che deriva dal principio di corrispondenza è reso probabile da parecchie delle cose da lui publicate senza dimostrazioni: e varrebbe la pena di fare un'analisi critica minuta di tutti gli enunciati di lui per approfondire tale questione (32).

---

rente contraddizione che s'incontra nell'applicare la teoria generale delle curve piane (e particolarmente i teoremi di JONQUIÈRES) alle coniche e il disaccordo fra quei teoremi di CHASLES e la formola di BISCHOFF ». (V. anche la traduzione nella *Einleitung* n. 111 bis).

Il JONQUIÈRES nel § XI della Nota del 1861 aveva ben rilevato che quella formola, quando si applica alle coniche determinate da punti e tangenti (in numero > 2), dà un risultato superiore al vero; ma spiegava male il fatto ammettendo che in quei casi delle soluzioni venissero a *coincidere fra loro* (questo apprezzamento ritirò poi nel 1863 nella lettera al CREMONA citata (10)).

(30) STEINER, *Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte,* Journal für Math., 37, 1848, p. 161: v. p. 189.

(31) Cfr. la nota (28). I procedimenti graduali di questa natura s'incontrano ripetutamente in Geometria: un esempio antico è dato dal teorema di MACLAURIN sui poligoni circoscritti ad un dato e coi vertici su curve date d'ordini qualunque (le quali curve nella dimostrazione s'introducono successivamente al posto di rette che prima si hanno); un esempio recente si ha nel metodo con cui lo CHASLES (1864) determina le coniche soddisfacienti a cinque condizioni qualunque.

(32) Da una tale analisi risulterebbe probabilmente che nelle sue ricerche di geometria enumerativa lo STEINER si valeva anche di qualche altro strumento che ora si suol adoperare: ad es° del metodo della *conservazione del numero* (se-

IV.

I numeri esatti relativi alle coniche tangenti a curve date di ordini qualunque — ed in particolare il vero numero (3264) di coniche tangenti a cinque coniche date — furono, com'è noto, *publicati* per la prima volta dallo CHASLES il 1° Febbr° 1864 (33). Questi cominciava la sua comunicazione coll'osservare che quei numeri non erano ancora stati assegnati esattamente, neppure nei casi più semplici in cui alcune delle curve date sono coniche e le altre rette. Orbene già vari anni prima il JONQUIÈRES aveva trovato quegli stessi numeri publicati dallo CHASLES e li aveva comunicati a questo con una lettera datata dal 17 Febbr° 1859. Il metodo che gli aveva servito consisteva nel sostituire, con opportune precauzioni, alle curve date delle curve d'ordine m con $m(m-1)/2$ punti doppi, cioè dei gruppi di rette (34). Anche allora lo CHASLES gli aveva risposto respingendo ripetutamente questo modo di procedere: in conseguenza di ciò (35), ed anche (36) in causa del disaccordo in cui le sue formole si trovavano con quelle di STEINER e di BISCHOFF, il JONQUIÈRES le abbandonò, mentre esse sarebbero state degnissime di publicazione (37).

---

condo la denominazione del sig. SCHUBERT). Così nel citato lavoro del Journal für Math., 37, a p. 188 e nella nota a p. 189 vi è qualche indizio che il grande geometra s'avvicinasse a concepire quel procedimento semplicissimo che consiste nel sostituire alle cinque coniche date altrettante coppie di rette o di punti: procedimento che poi fu adoperato dal suo discepolo TH. BERNER a pp. 13-14 della dissertazione: *De transformatione secundi ordinis ad figuras geometricas adhibita* (Berolini, 1865).

(33) CHASLES, *Détermination du nombre des sections coniques qui doivent toucher cinq courbes données d'ordre quelconque, ou satisfaire à diverses autres conditions* (Comptes rendus, 58, 1864, p. 222).

(34) JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* p. 8. — Si trattava dunque del già nominato metodo della *conservazione del numero*, del quale lo stesso JONQUIÈRES fece pure applicazione in altri importanti e ben noti lavori. Per questo lato sembra che nella storia della geometria enumerativa il JONQUIÈRES si possa riguardare come il più prossimo continuatore dell'opera di PONCELET in Francia.

(35) Loc. cit.

(36) Cfr. la nota a p. 315 del *Mémoire* già citato del Journal für Math., 66.

(37) Ciò spiega come basandosi su altri metodi — che potevano allora sembrare più rigorosi, ma che lasciavano entrare le soluzioni singolari — egli desse poi, qualche anno dopo, dei numeri non più esatti (od almeno includenti le soluzioni singolari), come il numero 7776 per le coniche tangenti a cinque date. V. i *Théorèmes généraux* etc.; ed anche i *Théorèmes concernant les courbes géomé-*

Ma quando poi nel 1864 egli lesse la detta comunicazione dello CHASLES e l'asserzione con cui comincia e che abbiamo accennata intorno alla quasi completa novità dei suoi risultati, il JONQUIÈRES scrisse immediatamente allo CHASLES per ricordargli la lettera di cinque anni avanti: e da ciò ebbe origine (38) una nota inserita dallo CHASLES alla fine della comunicazione del 15 Febbr° 1864 (39), nota in cui si fa cenno della citata lettera di JONQUIÈRES.

V.

Nel 1866 (Comptes rendus etc. 62 e 63) i due illustri geometri francesi s'incontrarono di nuovo nelle loro ricerche. Lo CHASLES publicò due Note sulle curve unicursali (40) nelle quali, oltre a costruire delle curve siffatte di ogni ordine ed a risolvere mediante il principio di corrispondenza fra i punti di una curva unicursale vari problemi relativi alle coniche aventi diversi contatti con questa curva, accennava alla possibilità di dedurre le proprietà connesse con le curve generali da quelle relative alle curve unicursali, e prometteva dei risultati molto più generali (41). Ora quel concetto, di

---

triques planes (Nouv. ann. de math., 20, p. 83), pure del 1861; e la Nota del 1863 del Journal de math., (2) VIII (v. (10)) nella quale pur rettificando in generale la formola di BISCHOFF si conferma però il risultato particolare 7776.

(38) JONQUIÈRES, *Lettre à M. Chasles* pp. 7-8. — Pare anche (ivi p. 9) che da questo momento dati la freddezza dello CHASLES verso il JONQUIÈRES, la quale due anni dopo doveva mutarsi in aperto litigio.

(39) CHASLES, *Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions* etc., Comptes rendus, 58, 1864, p. 297. La nota si trova a p. 308 e si esprime così: « M. DE JONQUIÈRES était parvenu, il y a longtemps, à ces formules de « contact, qu'il m'a communiquées le 17 février 1859. Je ne m'étais point occupé « alors de ces questions, et ma réponse, sans infirmer ni justifier les formules, fut « simplement qu'elles n'étaient pas démontrées. C'était en effet par des inductions, « soit théoriques, soit pratiques et numériques, que le savant géomètre y était « conduit. Plus tard, à défaut de démonstration, il douta de leur exactitude,... ».

(40) CHASLES, *Sur les courbes dont les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (Comptes rendus, 62, 1866 (12 mars), p. 579). — *Sur les courbes à points multiples, dont tous les points se peuvent déterminer individuellement* etc. (ibid. (25 juin), p. 1354).

(41) Ivi, p. 581: « ... Des propriétés qu'on démontre ainsi (cioè col prin- « cipio di corrispondenza) pour les courbes douées du nombre maximum de points « doubles, se peuvent conclure celles des courbes dépourvues de points doubles. « La question est de reconnaître dans chaque cas la modification causée par les « points doubles: on remonte ainsi de la propriété trouvée pour une courbe à

sostituire cioè ad una curva qualunque d'ordine m una dotata di $(m-1)(m-2)/2$ punti doppi, era simile a quello ricordato dianzi di cui si serviva nel 1859 il JONQUIÈRES (42) (cioè un'analoga applicazione del principio della conservazione del numero): sicchè questi, soddisfatto, secondo scrive (43), di vedere lo CHASLES convertito alle sue antiche idee, si affrettò a riprendere quella via che egli stesso aveva aperta e poi abbandonata, senz'aspettare i risultati ignoti promessi dallo CHASLES. E tosto presentava all'Accademia tre Note (44) in cui enunciava il numero delle curve di un sistema qualunque aventi rispettivamente uno, due, od un numero qualunque di contatti di dati ordini con una curva data qualsiasi; e nel *Mémoire sur les contacts multiples* etc. già citato (nota (25)) del Journal für Mathematik 66 (1866) dimostrava completamente ed in generale quella sua importante formola con due metodi consistenti risp. nel sostituire alla curva data una curva unicursale oppure un gruppo di rette.

Alla fine della sua 3ª Nota (Comptes rendus, t. 63, p. 525) il JONQUIÈRES, rilevando l'utilità delle curve unicursali, e pur accennando alla costruzione di tali curve data poco prima dallo CHASLES (nota (40)), citava un suo lavoro del 1864 (45) in cui si considerano delle curve d'ordine m con un punto $(m-1)$-plo e delle divisioni omografiche su di esse. Come contrapposto a ciò lo CHASLES rile-

---

« points doubles, à l'expression de cette propriété dans une courbe pure. — Cette « théorie paraît donc offrir un élément de démonstration qui pourra être très « utile ». — E a p. 1364 : « ... Nous appliquerons la méthode à d'autres exem- « ples de contacts multiples, et de contacts d'ordre supérieur, et à diverses que- « stions d'un genre différent. ... — Nous aurons à dire aussi comment les théorèmes « démontrés par cette méthode se généralisent et s'appliquent aux courbes de « classe et d'ordre quelconque ».

(42) E col quale era pure giunto, ad esempio, per le coniche passanti per 2, 1, 0 punti e tangenti ad una data curva in 3, 4, 5 punti, ai numeri enunciati nella Nota *Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque* (Nouv. ann. de math., (2) 3, 1864, p. 218).

(43) *Lettre à M. Chasles*, pp. 8-9.

(44) JONQUIÈRES, *Détermination du nombre des courbes d'ordre* r *qui ont un contact d'ordre* n *avec une courbe donnée d'ordre* m, *et qui satisfont en outre* etc. (Comptes rendus, 63, 1866 (3 septe), p. 423). — Idem, *deux contacts, l'un d'ordre* n, *l'autre d'ordre* n' (ibid. (17 septe), p. 485). — Idem, *autant de contacts d'ordre quelconque qu'on le voudra* (ibid. (24 septe), p. 522).

(45) JONQUIÈRES, *De la transformation géométrique des figures planes* etc., Nouv. ann. de math., (2) 3, 1864, p. 97.

vò (46) che fin dal 1861 (47) egli aveva considerato certe curve unicursali e su esse delle involuzioni di grado qualunque. E quando poco dopo il dissidio tra i due geometri si palesò nelle note polemiche, la questione della priorità nell'uso delle curve unicursali comparve a più riprese; ma anche su ciò, se pur vi fosse luogo a parlare di priorità, le date parlerebbero in favore del JONQUIÈRES, poichè il nominato lavoro del 1864 non era che un estratto di quella Memoria del 1859 (su certe curve sghembe, e sulle trasformazioni geometriche delle figure piane — ora note appunto sotto il nome di JONQUIÈRES) di cui si trova già un cenno a p. 542 del t. 49 (1859) dei Comptes rendus etc., e per la quale lo CHASLES era commissario. — Però, a questo riguardo, come riguardo agli altri argomenti discorsi nella presente Noterella, anzi che trarre delle conclusioni di priorità il cui interesse per la scienza è sempre scarso, o dar troppo peso a qualche debolezza ed agli errori di grandi scienziati, è meglio rilevare le nuove conferme di quel fatto che continuamente si presenta nella storia della matematica: che alla conoscenza completa, generale, dell'ente o del risultato esatto si è giunti non in un sol tratto e per opera di un solo, ma per opera alternata o simultanea di vari, passando per più gradi sì di generalità che di rigore!

---

(46) CHASLES, *Remarques sur les questions de contact de courbes d'ordre quelconque avec une courbe donnée dont les points se déterminent individuellement* (Comptes rendus, 63, 1866 (22 octobre), p. 670); le quali fanno seguito ad una Nota del CAYLEY (ibid., p. 666) destinata a dimostrare le due prime formole di JONQUIÈRES.

(47) CHASLES, *Description des courbes à double courbure de tous les ordres sur les surfaces réglées du 3e et du 4e ordre* (Comptes rendus, 53, 1861, p. 884).