Corrado Segre

Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **24** (1888-89), p. 734–756

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume I, Edizione Cremonese, Roma, 1957, p. 152–172

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_1_152>

XII.

LE CORRISPONDENZE UNIVOCHE SULLE CURVE ELLITTICHE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXIV, 1888-89, pp. 470-492.

Se si rappresenta ogni punto di una curva ellittica col valore che l'integrale u di 1ª specie, di periodi ω, ω_1, disteso sulla curva medesima, prende quando si estenda fino a quel punto, le relazioni

$$u' \equiv \pm u + C, \qquad (\text{mod. } \omega, \omega_1) \tag{1}$$

ove C è una costante qualunque, rappresentano due sistemi di ∞^1 corrispondenze univoche algebriche fra i punti della curva. L'*algebricità* di queste corrispondenze è una notissima conseguenza di un celebre teorema di EULERO.

Ma queste non sono le sole corrispondenze univoche algebriche che si possano avere sulle curve ellittiche.

Si sa in fatti che ABEL nelle sue immortali ricerche sulle funzioni ellittiche (1) osservò che affinchè la relazione $u' = au$ esprima una dipendenza algebrica fra i limiti corrispondenti agli integrali u, u' è necessario e sufficiente: o che la costante a sia reale e razionale, oppure che a sia un numero complesso della forma $m \pm i\sqrt{n}$, dove m ed n sono razionali e $i = \sqrt{-1}$; ma mentre nel 1^0 caso il modulo degl'integrali può esser qualunque, nel 2^0 esso deve avere valori particolari (esprimibili per radicali). È noto inoltre che lo studio di quest'ultimo caso, ripreso molti anni dopo da KRONECKER, HERMITE, JOUBERT e vari altri, diede origine alla vasta teoria, che ora si possiede, della moltiplicazione complessa delle funzioni ellitti-

---

(1) V. specialmente a p. 377 e 426 del vol. I delle *Oeuvres complètes* (nouvelle édition).

che [2]. — Di più le ricordate proposizioni si sono poi estese alle funzioni abeliane ed alle corrispondenze su curve di genere qualunque: citerò principalmente a questo riguardo due recenti lavori del sig. HURWITZ [3] nei quali dalle espressioni delle corrispondenze algebriche su una curva di genere p mediante i p integrali finiti distesi su questa si trae una distinzione di quelle corrispondenze in *ordinarie* (dotate di «*Werthigkeit*») — che hanno luogo qualunque siano i valori dei moduli, — e *singolari* — che esistono solo in curve di moduli singolari; e per le due specie di corrispondenze, ed in particolare per quelle univoche, vengono risolte alcune questioni di somma importanza.

Se si applicano i risultati menzionati al caso particolare delle corrispondenze [4] *univoche* sulle curve ellittiche, si deduce tosto che, mentre le corrispondenze ordinarie sono appunto quelle che dicemmo esser rappresentate dalle relazioni (1), quelle singolari son tutte date [5] da:

$$u' \equiv \pm i u + C, \tag{2}$$

---

[2] Si possono trovare indicazioni di vari lavori relativi a questa teoria in due di essi testè comparsi, l'uno del signor GREENHILL (nei Proc. Lond. Math. Soc., 1888, p. 301), l'altro del tanto rimpianto HALPHEN (nel Journal de math., (4) V, 1889, p. 1).

[3] *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Sitz. Ber. d. k. sächs. Ges. d. W., Januar 1886; oppure Math. Ann., XXVIII); e *Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (Götting. Nachrichten, Februar 1887; oppure Math. Ann., XXXII).

[4] D'or innanzi parlando di «corrispondenze» si sottintenderà sempre «algebriche» e più tardi anche «univoche».

[5] Quest'osservazione si trova anche fatta, per incidenza, da F. KLEIN (Math. Ann., XV, p. 279). — Del resto, la condizione perchè la corrispondenza

$$u' \equiv au \qquad (\mathrm{mod.}\ \omega\,,\, \omega_1)$$

sia univoca è evidentemente questa: che moltiplicando un periodo per a, oppure per $1/a$, si abbia ancora un periodo. Dal primo fatto segue:

$$\begin{cases} a\,\omega = m\,\omega + m_1\,\omega_1 \\ a\,\omega_1 = n\,\omega + n_1\,\omega_1\,, \end{cases} \tag{4}$$

ove $m\,, m_1\,, n\,, n_1$ sono interi; e dal secondo che, divise queste due equazioni per a e risolte rispetto ad $\omega/a\,, \omega_1/a$ (che così compariranno nei secondi membri), queste dovranno risultare forme in $\omega\,, \omega_1$ a coefficienti interi, donde si trae:

$$mn_1 - nm_1 = \pm 1\,. \tag{5}$$

Eliminando ω ed ω_1 dalle (4) si avrà:

$$(m - a)\,(n_1 - a) - n\,m_1 = 0\,,$$

e

$$(3)\qquad \begin{cases} u' \equiv \pm\,\alpha\,u + C \\ u' \equiv \pm\,\alpha^2\,u + C\,, \end{cases}$$

ove α è una radice cubica imaginaria dell'unità; si hanno risp. le (2) e le (3) quando il rapporto dei periodi (per una scelta conveniente di questi) è i, oppure α, il che significa in sostanza che la curva è risp. *armonica*, oppure *equianarmonica*.

Ora, quantunque siano già abbastanza numerosi gli scritti *geometrici* in cui si sono, o semplicemente incontrate, od anche studiate di proposito per via sintetica, le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche (6), pure tutti, se non erro, si limitano alle corrispondenze ordinarie, e mostrano di non conoscere la possibilità dell'esistenza delle corrispondenze singolari; sicchè talvolta i loro risultati esigerebbero delle modificazioni, quando si dovessero applicare alle curve armoniche od equianarmoniche (7).

---

ossia

$$(6)\qquad a^2 - (m + n_1)\,a \pm 1 = 0\,.$$

Ora, se nelle (4) si tien conto del fatto che il rapporto dei periodi $\omega\,,\omega_1$ è necessariamente complesso, si vede che se a è reale dovrà essere

$$(m_1 = n = 0\,,\ m = n_1 =)\ a = \pm 1\,,$$

il che rientra nelle (1). Se poi a è complesso, in forza della (6) sarà:

$$(m + n_1)^2 \mp 4 < 0\,,$$

il che esige anzitutto che valga il segno superiore e poi che sia:

$$m + n_1 = 0\,;\quad \text{oppure}\quad m + n_1 = \mp 1\,.$$

Nel primo caso la (6) darà: $a = \pm\,i$; nel secondo invece: $a^2 \pm a + 1 = 0$, donde $a = \pm\,\alpha$, oppure $a = \pm\,\alpha^2$, essendo α una radice cubica immaginaria dell'unità. Si è così condotti alle corrispondenze (2) e (3).

(6) Oltre a quelli che si troveranno nominati in seguito, citerò le mie *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes* (Math. Ann., XXVII, p. 296 [p. 36 di questo volume]), in cui ne sono anche indicati alcuni altri.

(7) Ad esempio asseriscono che non vi possono essere altre corrispondenze univoche sulle curve ellittiche che quelle ordinarie HARNACK (Math. Ann., IX, pp. 42 e 43; e Math. Ann., XII, p. 81) ed Em. WEYR nei suoi due lavori *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung* (Wien. Ber., 1883) e *Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins* (ibid.), il primo dei quali contiene il più completo studio che finora si sia fatto delle corrispondenze univoche su una cubica. Per determinarle tutte serve in esso di base il teorema (n. 2) che una tal corrispondenza, projettata da un punto qualunque della cubica, dà nel fascio di rette projettante una corrispondenza *simme-*

In conseguenza ho creduto di fare cosa non del tutto inutile riprendendo qui da capo (8) lo studio geometrico delle corrispondenze univoche sulle curve ellittiche in modo da non escludere quelle singolari, ed anzi fermandomi particolarmente su queste e sulle varie e notevoli relazioni che esse hanno fra loro e con quelle ordinarie. Mi varrò a questo fine (almeno per stabilire le proposizioni fondamentali) delle curve di 3^0 ordine (sottint. ellittiche); ma i risultati così ottenuti s'intenderanno estesi senz'altro a curve ellittiche qualunque.

1. La proposizione da cui partiremo e che può servire utilmente di base ad una trattazione geometrica delle corrispondenze univoche fra cubiche piane ed in generale fra curve ellittiche è la seguente (9):

Data fra due cubiche, distinte o sovrapposte, una corrispondenza univoca qualunque, alle coppie di punti dell'una allineate con un punto fissato ad arbitrio sovr'essa corrispondono nell'altra delle coppie di punti allineate con uno stesso punto di questa.

Per dimostrarla, dette γ, γ' le due cubiche ed m, m_1 due loro punti qualunque, si considerino come corrispondenti nel fascio di rette di centro m_1 due rette che projettino risp. due punti di γ' i

---

trica. Ora questo teorema vale solo per le corrispondenze ordinarie ed esclude quelle singolari. Il ragionamento con cui vi giunge il sig. WEYR si basa sulla proposizione che: se in una corrispondenza (2, 2) fra due forme razionali semplici sovrapposte i quattro elementi di diramazione dell'una sono pure elementi di diramazione dell'altra, la corrispondenza è simmetrica: proposizione che non è completamente vera, poichè cade quando quella quaterna di elementi di diramazione è armonica oppure equianarmonica (le due diverse dimostrazioni datene dallo stesso autore nella Nota *Ueber einen Correspondenzsatz* del volume citato presentano entrambe una lacuna). — Del resto, tutti i risultati di quel lavoro rimangono validi, purchè s'intendano limitati alle corrispondenze ordinarie.

(8) Avverto espressamente che quasi tutte le proprietà delle corrispondenze univoche *ordinarie* che qui si troveranno (n^i 5, 7 o 8) sono già contenute in lavori precedenti e specialmente nel primo di quelli citati del sig. WEYR. Ma esse si ottengono sì rapidamente, che ho creduto meglio, anche per uniformità di metodo e di esposizione, di non sopprimerle.

(9) Questa proposizione (dimostrata in modo diverso e meno generale) non che le conseguenze che ne trarremo nei due n^i successivi, si trovano già nello *Studio sull'omografia di seconda specie* del sig. CASTELNUOVO (Atti Ist. Veneto, (6) 5, cfr. n^i 29 e seg.). Ma prima ancora esse erano state da me esposte in pubbliche lezioni nell'anno 1886-87. Le ripeto qui, sia per la ragione già addotta nella nota precedente, cioè per rendere l'esposizione della ricerca più metodica, sia perchè nel lavoro del sig. CASTELNUOVO non si considerano le corrispondenze univoche singolari.

cui omologhi su γ nella data corrispondenza fra γ e γ' siano allineati con m. È chiaro che questa corrispondenza nel fascio m_1 sarà (2, 2) ed avrà per rette unite le 4 rette che projettano gli omologhi su γ' dei 4 punti di contatto di γ con le tangenti condottele da m. Se dunque oltre a quelle vi è un'altra retta unita, se cioè, preso ad arbitrio uno dei due punti m, m_1, l'altro si è preso per modo che vi siano su γ due punti distinti a, b allineati con m i cui omologhi a', b' su γ' siano allineati con m_1, ogni retta del fascio m_1 sarà unita, cioè projetterà da m_1 due punti di γ' i cui omologhi su γ saranno allineati con m. I due punti m, m_1 si troveranno dunque nelle condizioni della proposizione enunciata ([10]).

Essi si diranno (col sig. CASTELNUOVO) *centri omologhi di projezione* per la data corrispondenza fra γ, γ'. È evidente come dato l'uno di essi ad arbitrio si costruisca l'altro. Considerando come corrispondenti quelle rette passanti per m, m_1 le quali projettano coppie omologhe di punti di γ, γ', si ha fra i due fasci di rette di centri m, m_1 una corrispondenza univoca, vale a dire una projettività.

2. Se due punti di γ allineati con m s'avvicinano indefinitamente, lo stesso fatto accadrà per i due punti omologhi di γ'. Ne segue che *due centri omologhi di projezione per una data corrispondenza non sono altro che i tangenziali di due punti omologhi di questa.* Ed inoltre che nella projettività dianzi considerata fra i fasci di rette m, m_1 alle 4 tangenti condotte a γ da m corrispondono le 4 tangenti condotte a γ' da m_1; sicchè queste due quaterne di tangenti sono projettive fra loro.

Due punti qualunque di una cubica si posson sempre riguardare come centri omologhi di proiezione per una corrispondenza sulla curva: basta considerare una corrispondenza univoca, per esempio una projezione della cubica su se stessa da un suo punto, nella quale siano omologhi due punti aventi i due dati per tangenziali. Quindi l'ultima proposizione ci dà il noto teorema: *le due quaterne di tangenti condotte ad una cubica da due suoi punti qualunque sono projettive.* Ed in conseguenza di questo la proposizione citata si completa nel seguente modo: *se fra due cubiche si può stabilire una cor-*

([10]) Da questa si deduce subito come corollario il noto teorema di STEINER sui poligoni iscritti in una cubica; il quale, del resto, fu dimostrato dal sig. HURWITZ (*Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, u. s. w.*, Math. Ann., XV) con un ragionamento di cui quello che sopra si è fatto non è che un'estensione.

rispondenza univoca, le due quaterne di tangenti condotte ad esse risp. da due loro punti qualunque sono projettive.

3. Dalle considerazioni del n. 1 possiamo trarre altri risultati. Per una corrispondenza univoca qualunque data fra le due cubiche γ, γ' siano m, m_1 ed n, n_1 due coppie di centri omologhi di projezione. Si avranno allora, sia tra i fasci di rette m, m_1, sia tra i fasci di rette n, n_1, due determinate projettività per guisa che di ogni punto a di γ l'omologo a' su γ' è nel punto d'incontro di quei raggi dei fasci m_1, n_1 che nelle dette projettività corrispondono ai raggi ma, na dei fasci m, n. Ciò mostra che *in generale la corrispondenza univoca data fra le due cubiche è contenuta in* ∞^2 *corrispondenze univoche quadratiche fra i piani di queste,* per es. in quella definita in modo noto mediante le due coppie m, m_1 e n, n_1 di fasci projettivi.

Perchè questa corrispondenza fra i due piani si riduca ad una collineazione è necessario e sufficiente che in entrambe quelle projettività alla retta mn corrisponda la retta m_1n_1, donde segue che al 3^0 punto d'incontro della mn con γ è omologo il 3^0 punto d'incontro della m_1n_1 con γ', e ad m, n risp. m_1, n_1. D'altronde se di tre punti di γ in linea retta sono omologhi su γ' tre punti pure allineati, è chiaro (n. 1) che ciascuno di quelli insieme coll'omologo costituisce una coppia di centri omologhi di projezione per la data corrispondenza. Dunque: *una corrispondenza univoca fra due cubiche tale che ad una terna di punti in linea retta dell'una corrisponda sull'altra una simile terna di punti è collineare* [11]. (In altri termini due centri omologhi di projezione per una corrispondenza univoca non sono mai punti omologhi, oppure lo sono sempre).

In particolare *una corrispondenza univoca fra due cubiche tale che ad un flesso dell'una corrisponda un flesso sull'altra è collinea-*

([11]) Cfr. KÜPPER (Math. Ann., XXIV, p. 32), la cui dimostrazione vale però soltanto per le corrispondenze univoche *ordinarie*. La stessa proposizione si dimostra semplicemente con la considerazione della rigata generata dalle congiungenti i punti omologhi delle due curve, concetto che si estende subito (v. Math. Ann., XXX, p. 209 [v. p. 86 di questo volume]) alle corrispondenze univoche fra due curve non speciali di genere p e d'ordine n appartenenti ad S_{n-p}, cioè normali. Applicando il teorema generale così ottenuto alle projezioni di due curve normali non speciali d'ordini ν, ν' riferite fra loro univocamente (fatte risp. da $\nu - n$ e $\nu' - n$ loro punti) si giunge ad un risultato che comprende come caso molto particolare il n. 1 del presente scritto.

re [12]. (Quindi la projezione di una cubica su se stessa da un suo flesso dovrà dare un'omologia armonica; donde le proprietà della retta armonica del flesso, gli allineamenti dei flessi a tre a tre, ecc. ecc.).

4. L'ultima proposizione del n. 2 si può invertire: se cioè due cubiche γ, γ' sono tali che le due quaterne di tangenti ad esse condotte risp. da due loro punti siano projettive, si potranno stabilire infinite corrispondenze univoche fra le due curve. Per determinare una di queste corrispondenze si suppongano dati due punti s, s' risp. di γ, γ' come punti omologhi: allora se essi non sono già punti d'inflessione risp. per le due cubiche, e se s'indicano con a, a' risp. due flessi di queste e con p, p' le nuove intersezioni delle curve con le rette $s\,a, s'a'$, basterà sostituire alle corrispondenze cercate quelle che se ne deducono accompagnandole con le projezioni di γ e γ' su se stesse risp. dai centri p, p', per essere ridotti alla ricerca delle corrispondenze univoche fra γ e γ' in cui i flessi a, a' sono punti omologhi. Queste corrispondenze saranno collineari (n. 3); e detti b, c, d i punti di contatto di γ colle tangenti condottele da a, punti d'incontro di γ con la retta armonica del flesso a, e b', c', d' gli analoghi punti di γ' rispetto al flesso a', è chiaro che in ciascuna di quelle collineazioni dovranno corrispondersi fra loro le tangenti a γ, γ' in a, a' (rette che indicheremo risp. con $a\,a$ ed $a'a'$), ed inoltre i punti b, c, d in un certo ordine coi punti b', c', d'. Per ipotesi le quaterne di tangenti $a\,a, a\,b, a\,c, a\,d$, e $a'a', a'b', a'c', a'd'$ sono projettive: suppongasi che ciò accada in quest'ordine:

$$a\,(a\,b\,c\,d) \,\overline{\wedge}\, a'\,(a'b'c'd')\,, \tag{1}$$

e che appunto si vogliano quelle collineazioni in cui b, b'; c, c'; d, d' sono coppie di punti omologhi. Preso su γ un nuovo punto e, alla retta ae in quella projettività fra i due fasci di rette a, a', e quindi anche in quelle collineazioni, corrisponderà una determinata retta del fascio a', la quale segherà ancora γ' in due punti, ciascuno dei quali si potrà assumere come omologo di e. Sia e' l'uno qualunque di essi: allora la collineazione in cui ai punti a, b, c, e corrispondono risp. a', b', c', e' farà corrispondere i due fasci di rette a, a'

---

[12] Similmente da una proposizione citata dianzi in nota (per $p = 1$) si ha come corollario: *una corrispondenza univoca fra due curve ellittiche normali d'ordine* n *tale che ad un punto singolare dell'una* (cioè punto con spazio *iperosculatore*) *corrisponda sull'altra un punto singolare è una collineazione.*

nella projettività suddetta e quindi le rette $a\,a$, $a\,d$ alle $a'a'$, $a'd'$, il punto d della retta bc a d' di $b'c'$, e la cubica γ ad una cubica avente in a' un flesso colla tangente $a'a'$, tangente in b', c', d' alle rette $a'b', a'c', a'd'$, e passante inoltre per e', vale a dire alla cubica γ' ([13]). Dunque da ogni modo di ordinare b', c', d' sì da soddisfare la (1) risultano (in caùsa dell'ambiguità nella scèlta di e') *due* corrispondenze univoche fra γ e γ' in cui a ed a' sono punti corrispondenti (ed a b, c, d corrispondono b', c', d' appunto in quell'ordine) ([14]). Risalendo ora all'ipotesi primitiva, in cui i due punti dati come omologhi sulle due cubiche potevano anche non essere flessi per queste, abbiamo la seguente proposizione:

Dati su due cubiche γ, γ', *distinte o sovrapposte, due punti qualunque* a, a′, *si costruiscano i loro tangenziali* m, m_1 *ed i punti* b, c, d *di* γ *e* b′, c′, d′ *di* γ' *i quali hanno risp. con* a *e con* a′ *quegli stessi tangenziali. Supposto allora che sia*

$$m\,(a\,b\,c\,d)\,\overline{\wedge}\,m_1\,(a'b'c'd')\,, \tag{2}$$

esisteranno due corrispondenze univoche perfettamente determinate fra γ *e* γ' *in cui* a, a′ (*e* b, b′; c, c′; d, d′) *saranno punti corrispondenti e che saranno projettate da* m, m_1 *mediante due fasci riferiti appunto in quella projettività.*

Perchè la relazione (2) continui a valere quando (senza fare altri mutamenti) si faccia uno scambio d'ordine fra b, c, d bisogna che sia ad esempio

$$m\,(a\,b\,c\,d)\,\overline{\wedge}\,m\,(a\,b\,d\,c)\,, \qquad \text{cioè armonico,}$$

oppure

$$m\,(a\,b\,c\,d)\,\overline{\wedge}\,m\,(a\,c\,d\,b)\,\overline{\wedge}\,m\,(a\,d\,b\,c)\,, \quad \text{cioè equianarmonico.}$$

Dunque le curve ellittiche *armoniche* ed *equianarmoniche* appaiono come *singolari* nella questione delle corrispondenze univoche: *dati*

([13]) Così risulta la nota proposizione che l'invariante assoluto della quaterna di tangenti condotte ad una cubica da un suo punto è l'unico invariante assoluto di questa; poichè se esso ha lo stesso valore per due cubiche queste sono collineari.

([14]) Un ragionamento geometrico simile al precedente si può applicare alle curve iperellittiche di genere $p > 1$, dopo di averle ridotte alla forma normale dovuta al sig. Cremona (Rend. Ist. Lombardo, 1869, p. 566). Si trova così che: considerando due tali curve con le loro involuzioni razionali di coppie di punti ed i $2p+2$ punti doppi di queste, ogni projettività che esista fra questi due gruppi di elementi di quelle involuzioni fa parte di *due* corrispondenze univoche fra le curve. Del resto lo stesso fatto (e l'analogo per $p=1$) risulta pure immediatamente dalla rappresentazione algebrica parametrica delle curve iperellittiche.

su due curve ellittiche projettive, distinte o sovrapposte, due punti qualunque come omologhi in corrispondenze univoche fra le due curve, il numero delle corrispondenze così determinate è **2** *se le curve non sono singolari,* **4** *se sono armoniche,* **6** *se sono equianarmoniche.*

Vedremo che le ∞^1 corrispondenze univoche che così si generano fra le due curve formano appunto, corrispondentemente a quei numeri **2, 4, 6,** altrettanti sistemi infiniti, sì che due punti dati come omologhi individuano una corrispondenza di ciascun sistema. Per dimostrare ciò e in generale per lo studio di quei sistemi di corrispondenze basterà che consideriamo il caso di due curve sovrapposte, cioè delle corrispondenze su d'una curva: dai nostri risultati si potrà subito, volendo, passare al caso generale di due curve distinte.

5. Un primo sistema infinito di corrispondenze univoche che naturalmente si presenta su ogni cubica γ è dato dalle projezioni di γ su se stessa dai suoi punti.

Siccome le coppie di punti omologhi di una tal corrispondenza formano evidentemente una ∞^1 razionale e d'altra parte questa proprietà è caratteristica (v. la nota al n. 8) per queste corrispondenze, noi le distingueremo col nome di *razionali*. È chiaro che una corrispondenza di questo sistema è individuata da una coppia di punti omologhi; che essa è sempre *involutoria* e che ha 4 *punti uniti.*

L'ultima proprietà s'inverte subito: *una corrispondenza con* 4 *punti uniti diversa dall'identità è sempre razionale.* Sia infatti a un punto unito di una corrispondenza sulla cubica γ ed m il suo tangenziale: esso sarà (n. 2) un centro di projezione omologo a se stesso per quella corrispondenza, sicchè questa projettata da esso darà nel fascio m di rette una projettività, la quale oltre ad ma avrà per raggi uniti quelli che congiungono m agli altri punti uniti della corrispondenza. Se dunque questa ha 4 punti uniti, quella projettività avrà almeno 3 raggi uniti distinti e sarà quindi un'identità, sicchè la corrispondenza su γ, se non è l'identità, sarà data dalla projezione di centro m.

6. Questa proposizione ci conduce a considerare nelle corrispondenze univoche su una curva ellittica il numero dei punti uniti: in questo numero si ha, come vedremo, un criterio di classificazione per quelle corrispondenze.

Se Ω e Σ sono due corrispondenze univoche qualunque, i punti uniti della corrispondenza $\Omega\,\Sigma^{-1}$ sono i punti ciascuno dei quali ha lo stesso omologo in Ω ed in Σ (e questi omologhi sono i punti uniti di $\Sigma^{-1}\,\Omega$).

Applichiamo ciò anzitutto al caso in cui Ω sia una corrispondenza univoca sulla cubica γ con k (≥ 0) punti uniti e Σ sia la projezione di γ su se stessa da un suo punto m. Se da questo si projetta Ω si avrà nel fascio di rette di centro m una corrispondenza (2, 2) con 4 raggi uniti, di cui k vanno ai punti uniti di Ω, ed i rimanenti $4 - k$ sono le rette che tagliano γ secondo m e due punti omologhi in Ω. Dunque *le coppie di punti omologhi comuni ad una corrispondenza univoca con* k *punti uniti e ad una corrispondenza razionale sono* 4 — k. E quindi: *se una corrispondenza univoca con* k *punti uniti si moltiplica (in qualunque ordine) per una razionale (che non ne sia l'inversa) la corrispondenza univoca prodotto avrà* 4 — k *punti uniti.*

7. Dai n[i] 5 e 6 segue immediatamente che il prodotto di più corrispondenze univoche razionali, quando esse siano in numero dispari, ha 4 punti uniti ed è quindi ancora una corrispondenza razionale. Invece se quelle corrispondenze sono in numero pari, il loro prodotto sarà una corrispondenza univoca priva di punti uniti oppure sarà l'identità.

Siamo così condotti ad un nuovo sistema di corrispondenze univoche: quello composto dell'identità e delle corrispondenze prive di punti uniti. Indicando con P una corrispondenza qualunque di questo 2^0 sistema e con A una corrispondenza razionale qualunque sarà anche $AP = B$ una corrispondenza razionale (n. 6) ([15]), e quindi la relazione $P = AB$ prova che *ogni corrispondenza del* 2^0 *sistema è il prodotto di due corrispondenze razionali* (una delle quali si può prendere ad arbitrio). Da ciò si trae subito, mediante le osservazioni fatte sui prodotti delle corrispondenze razionali, che: *il prodotto di due o più corrispondenze prese nei due sistemi considerati è del* 1^0 *o del* 2^0 *sistema secondo che il numero delle corrispondenze del* 1^0 *sistema è impari o pari* (sicchè le corrispondenze del 2^0 sistema formano un *gruppo*).

Dalla relazione $P = AB$ segue poi: $APA = BA = P^{-1}$, cioè: *una corrispondenza del* 2^0 *sistema è trasformata nella propria inversa*

([15]) In seguito si rappresenteranno sempre con $A, B, \ldots$ delle corrispondenze razionali, con $P, Q, \ldots$ corrispondenze del secondo sistema, con $\Omega, \Sigma, \ldots$ corrispondenze univoche qualunque.

da qualunque corrispondenza razionale. Ne risulta che, dati ad arbitrio due punti a, a' di una cubica γ come omologhi in una corrispondenza del 2° sistema, e detto l un punto mobile di γ, i punti b, b' in cui questa curva è ancor incontrata risp. dalle rette $a'l$, al saranno pure omologhi in quella corrispondenza: questa è dunque ben determinata e costruita.

Se poi si applicano simultaneamente le ultime proposizioni segue che: una corrispondenza del 2° sistema è trasformata in se stessa da qualunque corrispondenza dello stesso sistema. In altri termini *le corrispondenze del* 2° *sistema sono fra loro permutabili*; il prodotto di un numero qualunque di esse è una corrispondenza dello stesso sistema che non dipende dall'ordine di quel prodotto. — Considerando la potenza r-esima di una corrispondenza del 2° sistema, si vede subito che se questa ammette un *ciclo di grado* r, essa sarà *ciclica di grado* r; da una proposizione precedente di questo n° seguirebbero poi notevolissime proprietà dei cicli di una tal corrispondenza (16).

8. In particolare consideriamo le corrispondenze del 2° sistema *involutorie.* Una tal corrispondenza è (n. 7) trasformata (nella sua inversa, cioè) in se stessa da qualunque corrispondenza razionale. Indicando dunque con a, a' due punti della cubica γ omologhi in quella corrispondenza ed applicando la projezione dal tangenziale m di a si vede che, come a, così a' deve avere per projezione se stesso, cioè deve avere m per tangenziale. Viceversa la corrispondenza del 2° sistema determinata da due punti omologhi a, a' aventi lo stesso tangenziale m, quando venga projettata da m si trasforma evidentemente in se stessa; essa coincide dunque con la propria inversa, ossia è involutoria.

Si giunge così alle tre corrispondenze involutorie del 2° sistema od *involuzioni principali*; e si vede pure subito che il prodotto di due qualunque di esse dà precisamente la terza; ecc. ecc.

È poi facile dimostrare che, all'infuori di queste e delle corrispondenze del 1° sistema, non vi possono essere altre corrispondenze involutorie (17). Invero se sulla cubica γ esiste una corrispondenza

---

(16) V. WEYR, loc. cit. (*Ueber eindeutige Beziehungen,* ecc.), n. 19 e seg.

(17) Ne segue che, se si fa astrazione dalle corrispondenze del primo sistema e dalle tre involuzioni principali, la serie ∞^1 delle coppie di punti omologhi di ogni altra corrispondenza univoca è riferita univocamente alla serie dei punti della curva (per es. alla serie dei *primi* punti delle dette coppie) ed è quindi el-

involutoria con un numero $k > 0$ di punti uniti, la si trasformi mediante una corrispondenza univoca (p. e. una projezione) in guisa che un flesso sia il trasformato di un punto unito: la corrispondenza trasformata avrà ancora k punti uniti e sarà ancora involutoria, ma avendo un flesso per punto unito sarà (n. 3) collineare, e quindi data da un'omologia armonica. Ne segue che $k = 4$, cioè che la corrispondenza primitiva era del 1^0 sistema.

9. I due sistemi di corrispondenze considerati negli ultimi n^i si possono costruire su tutte indistintamente le curve ellittiche: si diranno perciò *corrispondenze ordinarie*. E poichè s'è visto che due punti qualunque di una tal curva sono omologhi in una corrispondenza di ciascuno di quei sistemi, segue dal n. 4 che sulle curve non singolari non esistono altre corrispondenze univoche. Invece nelle curve armoniche ed equianarmoniche esistono altre corrispondenze, *singolari*, che ora esamineremo.

Esse hanno tutte dei punti uniti (n. 7). Detto a un punto unito di una corrispondenza singolare Ω sulla cubica γ e b, c, d i punti di questa aventi comune con a il tangenziale m, dalla corrispondenza Ω risulterà nel fascio di rette di centro m una projettività determinata ad esempio, se γ è armonica da $m\,(a\,b\,c\,d) \barwedge m\,(a\,b\,d\,c)$, se è equianarmonica da $m\,(a\,b\,c\,d) \barwedge m\,(a\,c\,d\,b)$.

Nel 1^0 caso oltre ad a sarà b punto unito della corrispondenza Ω; la projettività del fascio m sarà un'involuzione e quindi il quadrato di Ω produrrà nel fascio m l'identità e non potendo essere esso stesso l'identità, perchè Ω non può essere involutoria (n. 8), sarà invece la projezione di centro m. Dunque *le corrispondenze singolari sulle curve armoniche hanno due punti uniti, coniugati in una involuzione principale, e sono cicliche di* 4^0 *grado, avendo per quadrato corrispondenze razionali.* — Il quadrato di una corrispondenza ha per punti uniti i punti uniti e le *coppie involutorie* di questa. In particolare si vede che Ω avrà per unica coppia involutoria cd. *Ogni corrispondenza singolare su una curva armonica ha una coppia involutoria che è coppia di punti uniti per un'altra corrispondenza singolare avente lo stesso quadrato di quella. Ogni corrispondenza ra-*

---

littica e con lo stesso modulo della curva. Ma anche le tre involuzioni principali sono ellittiche (ciò risulta, ad es., osservando che per una cubica le rette congiungenti le coppie di una tal involuzione formano un inviluppo di terza classe senza rette doppie). Quindi si conclude che solo le corrispondenze del primo sistema sono *razionali*; tutte le altre corrispondenze univoche sono *ellittiche*.

zionale è il quadrato di 4 *corrispondenze singolari le quali sono a coppie inverse l'una dell'altra.* Ecc. ecc.

10. Consideriamo ora il caso della curva equianarmonica. La projettività determinata da Ω nel fascio m sarà ciclica di 3^0 grado ed avrà oltre ad ma un raggio unito che incontrerà ancora γ in due punti distinti e, f, i quali dovranno corrispondersi fra loro in Ω (ciascuno a se stesso, oppure all'altro). Quindi Ω^3 determinerà nel fascio m l'identità e sarà perciò o l'identità o la projezione di centro m; sicchè Ω è ciclica di 3^0 oppure di 6^0 grado. Nel 1^0 caso Ω non potrebbe evidentemente scambiar fra loro i punti e, f e però li avrà per punti uniti; nel 2^0 caso invece non potrebbe averli come punti uniti (chè altrimenti essi sarebbero pur tali per Ω^3). Dunque *le corrispondenze singolari sulle curve equianarmoniche sono cicliche di* 3^0 *oppure di* 6^0 *grado; nel* 1^0 *caso hanno* 3 *punti uniti; nel* 2^0 *ne hanno un solo, ma hanno inoltre una coppia iuvolutoria. Moltiplicando una di esse per una corrispondenza razionale essa muta grado di periodicità* (n. 6). *Il quadrato di una corrispondenza singolare è pure singolare* (di 3^0 grado); *il cubo di una corrispondenza singolare di* 6^0 *grado è una corrispondenza razionale. Ogni corrispondenza razionale è il cubo di* 8 *corrispondenze singolari, a coppie inverse fra loro.* Ecc. ecc.

11. Per poter dividere nettamente le corrispondenze singolari in sistemi conviene che premettiamo un'osservazione. Una corrispondenza qualunque Σ essendo evidentemente trasformata da ogni corrispondenza Ω in una corrispondenza avente lo stesso numero di punti uniti che Σ, ne segue che se Σ è una corrispondenza ordinaria la sua trasformata

$$\Omega^{-1} \Sigma \Omega = \Sigma_1$$

sarà pure una corrispondenza ordinaria e dello stesso sistema (18). Si avrà:

$$\Sigma \Omega = \Omega \Sigma_1 ,$$

e però: moltiplicando una corrispondenza qualunque Ω successivamente per tutte le corrispondenze ordinarie di uno stesso sistema si ottiene uno stesso sistema di corrispondenze, sia che la moltiplicazione si faccia in un ordine sia che si faccia in quello opposto.

---

(18) Il teorema del n. 1 non è altro che questa proposizione stessa ristretta al caso in cui la corrispondenza ordinaria è razionale.

S'indichi ora con Ω una corrispondenza singolare fissata ad arbitrio, e si considerino i due sistemi di corrispondenze rappresentati risp. da ΩP ed ΩA, ove P ed A descrivono successivamente tutte le corrispondenze ordinarie risp. ellittiche e razionali: essi si potranno anche rappresentare risp. con $P\Omega$ ed $A\Omega$. Nel sistema ΩP sarà contenuta Ω (che si avrà quando P si riduce all'identità). Questi due sistemi saranno ben distinti fra loro (non potendo essere $\Omega P = \Omega A$, cioè $P = A$) e si comporranno di corrispondenze singolari (non potendo essere $\Omega U = V$ ove U e V son corrispondenze ordinarie, giacchè ne seguirebbe $\Omega = VU^{-1}$, vale a dire Ω sarebbe ordinaria). In ognuno di essi sarà individuata una corrispondenza dando sulla curva una coppia di punti omologhi: così se nella corrispondenza ΩP ad a deve corrispondere a', chiamando a_1 l'omologo di a in Ω, si dovrà prendere P in guisa che muti a_1 in a', il che la individua. Se poi si moltiplica in ogni ordine una qualunque corrispondenza singolare di uno fra quei due sistemi per una corrispondenza ordinaria si ottiene evidentemente una corrispondenza singolare dell'altro sistema oppure dello stesso sistema secondo che quella corrispondenza ordinaria è razionale o no: così $\Omega P.A = \Omega A_1$, $P.Q\,\Omega = P_1\,\Omega$, ecc. Questo prova che nello stesso modo con cui quei due sistemi di corrispondenze singolari si sono ottenuti partendo da Ω, essi medesimi si otterrebbero partendo da un'altra corrispondenza qualunque presa in essi.

12. Consideriamo anzitutto il caso in cui la curva è armonica: allora su essa non esisteranno altre corrispondenze singolari (n. 4). Si avrà, indicando con U, V delle corrispondenze ordinarie (di cui 0, 1, 2 razionali) e valendosi dell'osservazione premessa al n^0. prec.:

$$\Omega\,U.\Omega\,V = \Omega.U\,\Omega.V = \Omega.\Omega\,U_1.V = A\,U_1 V;$$

donde si trae che: *il prodotto di due corrispondenze singolari su una curva armonica è una corrispondenza ordinaria, la quale è razionale se quelle due corrispondenze singolari appartengono allo stesso sistema, ellittica in caso contrario.* In particolare *due corrispondenze singolari inverse (cioè cubi) l'una dell'altra appartengono a sistemi diversi;* vale a dire *i due sistemi di corrispondenze singolari sulle curve armoniche sono l'uno inverso dell'altro.*

Applicando poi un'osservazione fatta al principio del n. 6 in un cogli ultimi risultati sui prodotti delle corrispondenze abbiamo che: *come due corrispondenze ordinarie, così due corrispondenze singolari di diverso sistema hanno 4 coppie comuni di punti omologhi,* *mentre una corrispondenza ordinaria ed una singolare hanno solo* 2 *coppie comuni* (e, com'è naturale, due corrispondenze dello stesso sistema non ne hanno alcuna).

13. Nel caso in cui la curva è equianarmonica, indicando ancora con Ω una corrispondenza singolare fissata ad arbitrio, anche Ω^2 sarà una corrispondenza singolare, ed analogamente ai due sistemi di corrispondenze singolari ΩP, ΩA considerati al n. 11 vi saranno due sistemi di corrispondenze singolari $\Omega^2 P$, $\Omega^2 A$, nettamente distinti fra loro ed anche dai precedenti (poichè se fosse $\Omega^2 U = \Omega V$ ne seguirebbe $\Omega U = V$, assurdo). Dunque *le corrispondenze singolari sulla curva equianarmonica formano* 4 *sistemi distinti, in ognuno dei quali resta individuata una corrispondenza dando una coppia di punti omologhi* (19).

---

(19) Dal fatto che per ognuno dei sistemi infiniti di corrispondenze sopra una curva ellittica s'individua una corrispondenza dandone una coppia di punti omologhi, segue subito che ciascuno dei detti sistemi di corrispondenze è una ∞^1 ellittica avente lo stesso modulo che la curva.

Queste corrispondenze si possono rappresentare geometricamente con le rigate delle rette congiungenti le coppie di punti omologhi (inviluppi di rette se la curva è piana); ogni corrispondenza insieme con la sua inversa vien rappresentata da una stessa rigata. Si hanno così, a seconda che la curva non è singolare od è armonica od equianarmonica, 2, 3, 4 sistemi ∞^1 di rigate, e le proprietà viste o che ancora vedremo delle corrispondenze si tradurrebbero subito in proprietà di queste rigate (ad es. l'ordine di queste si determina subito servendosi del numero di punti uniti delle corrispondenze).

Un'altra rappresentazione geometrica delle corrispondenze su una curva ellittica γ si ha se si rappresentano le coppie di punti di questa coi punti di una superficie. Dalle mie ricerche sulle rigate ellittiche (Atti Acc. Torino, XXI; ed anche Math. Ann., XXXIV) risulta un modo assai semplice di fare una tal rappresentazione, poichè esse mostrano che su una rigata ellittica, le cui generatrici corrispondano univocamente a γ, si può determinare in infiniti modi un sistema ∞^1 di curve le quali taglino una volta sola ogni generatrice e sian tali che due qualunque di esse s'incontrino in un sol punto (variabile), e che per ogni punto della rigata ne passino due; questa ∞^1 di curve si potrà mettere in corrispondenza univoca con γ ed ogni coppia di punti di questa (senza riguardo all'ordine dei due punti) si potrà rappresentare col punto d'intersezione delle due curve della rigata le quali corrispondono a quei due punti; ed è chiaro che la rappresentazione che così si avrà delle coppie di punti di γ sui punti della rigata sarà univoca. Se la rigata è d'ordine n impari essa ha in generale per curve direttrici d'ordine minimo una ∞^1 di curve d'ordine $(n+1)/2$ che possono servire allo scopo detto. Allora le altre curve tracciate sulla rigata servono a rappresentare le varie corrispondenze fra i punti di γ. Le generatrici della rigata rappresentano le corrispondenze univoche razionali. Ogni altra corrispondenza univoca con

Siccome poi i sistemi ΩP ed ΩA si ottengono l'uno dall'altro mediante moltiplicazione per corrispondenze razionali, uno di essi si comporrà (n. 10) di corrispondenze cicliche di 3^0 grado, e l'altro di corrispondenze di 6^0 grado; e la stessa distinzione accadrà pei sistemi $\Omega^2 P, \Omega^2 A$. Per fissare le idee suppongasi ad es. che Ω, e quindi tutto il sistema ΩP di cui essa fa parte, sia ciclica di 3^0 grado. Si avrà allora (applicando ancora l'osservazione fatta in principio del n. 11):

$$\Omega U . \Omega V = \Omega^2 U_1 V ; \quad \Omega^2 U . \Omega^2 V = \Omega U_2 V ;$$
$$\Omega^2 U . \Omega V = U_1 V ; \quad \Omega U . \Omega^2 V = U_2 V .$$

Dalle prime due relazioni, supponendovi $U = V$, segue che: le corrispondenze del sistema di 3^0 grado ΩP hanno per quadrati, vale a dire per inverse, quelle del sistema $\Omega^2 P$ che sarà perciò anche di 3^0 grado; mentre le corrispondenze di 6^0 grado ΩA ed $\Omega^2 A$ hanno per quadrati risp. le $\Omega^2 P$ ed ΩP (e per biquadrati risp. le ΩP ed $\Omega^2 P$) e formeranno pure due sistemi inversi l'uno dell'altro (non potendo due corrispondenze dello stesso sistema dare per prodotto l'identità). Interpretate più completamente le quattro relazioni precedenti ci danno quanto segue: *I quattro sistemi di corrispondenze singolari sulle curve equianarmoniche si dividono in 2 ciclici di 3^0 grado inversi l'uno dell'altro e 2 di 6^0 grado pure inversi fra loro ed aventi per quadrati risp. quei due. Il prodotto di due corrispondenze dello stesso grado ma di sistemi diversi è una corrispondenza ordinaria ellittica. Il prodotto di due corrispondenze dello stesso sistema è una corrispondenza del sistema quadrato di quello. Il prodotto di due corrispondenze di diverso grado, quando il sistema cui appartiene quella di 3^0 è il quadrato di quello che contiene l'altra, è una corrispondenza razionale; mentre nel caso contrario è una corrispondenza singolare di 6^0 grado del sistema inverso a quello in cui sta il fattore di 6^0*

---

k punti uniti è rappresentata (insieme con l'inversa) da una curva incontrante ogni generatrice in $(4 - k)$ punti ed ognuna delle dette direttrici in 2 punti, curva che sarà perciò d'ordine $2n - k(n-1)/2$. Così le corrispondenze ordinarie ellittiche son rappresentate da curve d'ordine $2n$; ciò accade in particolare per l'identità (per inavvertenza nell'ultima nota a piè di pagina del lavoro testè citato di questi Atti fu stampato $2n - 1$ invece di $2n$ [V. la nota (16) a p. 75 di questo volume; la svista qui segnalata vi è stata corretta (N. d. R.)]), mentre le tre involuzioni principali fanno eccezione rappresentandosi con curve d'ordine n (cfr. lo stesso lavoro). Tutte le proprietà delle corrispondenze univoche su γ, sì ordinarie che singolari, si rappresentano con proprietà dei (2, 3, 4) sistemi infiniti di curve che le rappresentano sulla rigata.

grado. Infine aggiungiamo che (cfr. n. 11): *moltiplicando in qualunque ordine una corrispondenza ordinaria ellittica per una corrispondenza singolare, questa non muta sistema, mentre di due corrispondenze singolari, di cui l'una sia il prodotto dell'altra per una corrispondenza razionale, l'una sarà ciclica di* 6^0 *grado, e l'altra di* 3^0 *del sistema inverso a quello del quadrato di quella.*

Come si fece al n. preced. per le curve armoniche, così dalle ultime proposizioni deduciamo per le curve equianarmoniche che: *due corrispondenze singolari di grado diverso hanno* 1 *sola coppia di punti omologhi a comune ovvero* 4 *secondo che il sistema cui appartiene quella di* 3^0 *grado è oppure non è il quadrato di quello che contiene la corrispondenza di* 6^0 *grado; invece due corrispondenze singolari dello stesso grado ma di diversi sistemi hanno* 3 *coppie comuni; una corrispondenza singolare di* 3^0 (*o risp. di* 6^0) *grado ha comuni* 1 *oppure* 3 (3 *oppure* 1) *coppie con una corrispondenza ordinaria secondo che questa è razionale od ellittica* ([20]).

([20]) I 2, 4, 6 sistemi infiniti di corrispondenze che abbiamo trovato risp. nelle curve non singolari, nelle armoniche ed in quelle equianarmoniche formano un gruppo di cui si potrebbero subito avere altre proprietà da quelle che già ne conosciamo; per esempio, si determinano subito dei sottogruppi, infiniti e finiti, in esso contenuti.

In particolare, se si considera una curva ellittica normale d'ordine n, è notevole quel sottogruppo finito che si compone delle trasformazioni collineari della curva in se stessa. In ognuno dei sistemi di corrispondenze univoche sulla curva vi sono n^2 collineazioni; esse sono (v. la seconda nota al n. 3) quelle corrispondenze del sistema che ad uno, fissato ad arbitrio, fra gli n^2 punti singolari della curva fanno corrispondere rispettivamente gli n^2 punti stessi. Adunque, secondo che la curva non è singolare, od è armonica, od equianarmonica, essa ammette un gruppo di $2n^2$, $4n^2$, $6n^2$ trasformazioni collineari in se stessa. Dalle proprietà sopra esposte dei vari sistemi di corrispondenze si hanno come casi particolari varie proprietà di quel gruppo relative alla sua composizione, ai sottogruppi in esso contenuti, ecc.

Nel caso di $n = 3$, cioè delle cubiche ellittiche, si può anche approfittare dei risultati precedenti per lo studio delle trasformazioni collineari in se stesso di un fascio sizigetico di cubiche, ossia della configurazione dei 9 flessi di una cubica. Tra quelle collineazioni, 18, ben note, son quelle che trasformano ogni cubica del fascio in se stessa (determinandovi altrettante corrispondenze ordinarie, di cui 9 razionali prodotte da omologie armoniche coi flessi per centri). Le altre invece scambiano fra loro le cubiche del fascio. E poichè in questo le cubiche non singolari si raggruppano, come è noto, per gruppi di 12 tutte projettive fra loro ed ognuna delle 18 collineazioni che mutano una di esse in un'altra muta il fascio in se stesso, così saranno 11.18 le collineazioni che godono di questa proprietà senza mutare in se stessa ogni cubica. Ma per veder meglio la

14. Nei n^i. preced. si potè osservare che su qualunque curva ellittica il prodotto di due corrispondenze prese in due dati sistemi (distinti o no) è pure una corrispondenza di un determinato sistema che non muta se si cambia l'ordine di quel prodotto ([21]).

Ciò posto ed indicando con $\Omega, \Omega_1, \Sigma, \Sigma_1$ delle corrispondenze qualunque, supponiamo che sia

$$\Sigma\,\Omega = \Omega_1\,\Sigma_1\,. \tag{1}$$

Rappresentando i due membri con Π, sarà

$$\Sigma = \Pi\,\Omega^{-1}\,, \qquad \Sigma_1 = \Omega_1^{-1}\,\Pi\,.$$

Se dunque Ω ed Ω_1 sono dello stesso sistema (e quindi anche le loro inverse), segue dall'osservazione ricordata che anche Σ e Σ_1 saranno dello stesso sistema.

La (1) si può anche scrivere così:

$$\Omega_1^{-1}\,\Sigma\,\Omega = \Sigma_1\,. \tag{2}$$

Se in particolare si prende $\Omega_1 = \Omega$, questa ci dice che *qualunque corrispondenza non muta sistema quando la si trasformi mediante una corrispondenza qualsiasi* (fatto già osservato ed adoperato al n. 11 pel caso di una corrispondenza Σ ordinaria). Ma anche la (2) in tutta la sua generalità si può interpretare in modo simile, osser-

---

natura di quelle trasformazioni conviene ottenerle in altro modo. Una collineazione che scambi fra loro le cubiche del fascio deve mutare in se stessa la quaterna dei triangoli sizigetici. Questa quaterna di elementi del fascio è, come si sa, equianarmonica; oltre alle tre involuzioni che la mutano in se stessa e che hanno per coppie di elementi doppi le 3 coppie di cubiche armoniche del fascio, essa ammette dunque 4 projettività cicliche di 3^0 grado (con le loro inverse), ciascuna delle quali ha per elementi uniti un elemento della quaterna ed una delle 4 curve equianarmoniche del fascio. Da tutto ciò segue che le collineazioni cercate o trasformano in se stessa ogni curva armonica di una coppia determinandovi una corrispondenza collineare singolare — e queste sono 2.9 per ognuna delle 3 coppie di curve armoniche —; oppure trasformano in se stessa una curva equianarmonica determinandovi una corrispondenza collineare singolare — e queste sono 4.9 per ognuna delle 4 curve equianarmoniche. In tutto dunque ritroviamo appunto le 11.18 collineazioni di prima. Il gruppo di 12.18 collineazioni piane che mutano in se stessa la configurazione dei 9 flessi appare subito notevolissimo, e da cose note e da tutte le cose dette risulta subito non solo quante e quali fra queste collineazioni siano cicliche di 2^0, 3^0, 4^0 e 6^0 grado, ma anche quali prodotti esse diano fra loro, ecc. ecc.

([21]) Questo si potrebbe esprimere brevemente dicendo che i 2, 4 o 6 sistemi di corrispondenze univoche sono fra loro *permutabili* (quantunque non siano sempre permutabili le singole corrispondenze).

vando che, se a, a' sono due punti corrispondenti in Σ ed a_1, a'' i punti che a quei due risp. corrispondono in Ω_1, Ω, saranno appunto a_1, a'' corrispondenti in $\Omega_1^{-1}\,\Sigma\,\Omega$, cosicchè è naturale chiamare quest'ultima corrispondenza « la trasformata di Σ mediante la combinazione di Ω_1 ed Ω » (che se Ω_1 coincide con Ω si riduce alla trasformata di Σ mediante Ω). Allora la (2) dice che *quando mediante la combinazione di due corrispondenze di uno stesso sistema si trasformi una corrispondenza qualunque, questa rimarrà nel proprio sistema.*

15. Quando una corrispondenza trasforma l'una nell'altra due corrispondenze Σ, Σ_1, essa muta ogni punto unito di Σ in un punto unito di Σ_1. Viceversa, date due corrispondenze Σ, Σ_1 dello stesso sistema, ogni corrispondenza che muti un punto unito di Σ in un punto unito di Σ_1 muterà Σ nella sola corrispondenza dello stesso sistema (n. 14) che abbia quest'ultimo punto per punto unito, cioè in Σ_1. Ne segue che *due corrispondenze qualunque di uno stesso sistema con* k (> 0) *punti uniti son trasformate l'una nell'altra (in un dato ordine) da* k *corrispondenze di ciascun sistema.*

In particolare prendendo Σ e Σ_1 coincidenti: *Una corrispondenza qualunque con* k (> 0) *punti uniti è trasformata in se stessa da* (*vale a dire è permutabile con*) k *corrispondenze di ciascun sistema*, cioè quelle determinate dal far corrispondere risp. i k punti nominati ad uno di essi fissato ad arbitrio.

Queste proposizioni si son dimostrate per corrispondenze Σ, Σ_1 dotate di punti uniti: però esse valgono pure *in generale* nell'ipotesi contraria, cioè se quelle corrispondenze sono corrispondenze ordinarie ellittiche. Poichè in tal caso *ogni* corrispondenza di questo stesso sistema muta Σ in Σ stessa; *ogni* corrispondenza razionale muta Σ in Σ^{-1}; infine se una corrispondenza singolare Ω muta Σ in Σ_1, *ogni* altra corrispondenza singolare dello stesso sistema, essendo il prodotto di Ω e di una corrispondenza ordinaria ellittica (la quale ultima non altera Σ_1), muterà pure Σ in Σ_1. Dunque *due corrispondenze ordinarie ellittiche son trasformate l'una nell'altra da ognuna delle corrispondenze di un dato sistema, oppure da nessuna* [22].

---

(22) In altri termini nel sistema ∞^1 delle corrispondenze ordinarie ellittiche ciascuno degli altri sistemi genera *una* corrispondenza ben determinata fra le corrispondenze stesse. È chiaro che gli elementi uniti di questa saranno le corrispondenze ordinarie ellittiche (fra cui l'identità) permutabili alle corrispondenze dell'altro sistema nominato. Se questo è singolare, sarà singolare la corrispondenza da lui determinata fra le corrispondenze ordinarie ellittiche.

In particolare una corrispondenza ordinaria ellittica permutabile con un'altra corrispondenza è permutabile con ogni corrispondenza appartenente al sistema di questa. Ora se una corrispondenza singolare è trasformata in se stessa da una corrispondenza ordinaria ellittica, poichè questa deve mutarne i punti uniti in punti uniti, accadrà che se vi è un sol punto unito quella corrispondenza ordinaria non potrà esistere (astrazion fatta, anche pel seguito, dall'identità), se ve ne sono 2 sarà involutoria, se ve ne sono 3 sarà ciclica di 3^0 grado. Concludiamo dunque che: *Nelle curve armoniche esiste una sola corrispondenza ordinaria ellittica la quale sia permutabile ad una corrispondenza singolare: essa è un'involuzione principale, permutabile a qualunque corrispondenza* ([23]) *ed in cui sono coniugati i punti uniti di ogni corrispondenza singolare. Nelle curve equianarmoniche non esistono altre corrispondenze ordinarie ellittiche permutabili a corrispondenze singolari che due corrispondenze cicliche di* 3^0 *grado inverse l'una dell'altra e permutabili a tutte le corrispondenze singolari cicliche di* 3^0 *grado (e non a quelle di* 6^0 *grado): le terne di punti uniti di queste formano i cicli di quelle.*

16. Le relazioni studiate fra le varie corrispondenze si riferiscono alla geometria *sulle* curve ellittiche, qualunque queste siano; ma applicate a curve ellittiche particolari possono fornire risultati notevoli d'altra natura. Come esempio vediamone un'applicazione alle cubiche.

Sulla cubica γ si abbiano due corrispondenze qualunque di uno stesso sistema, Σ_1 e Σ_2; siano a, a_1 due punti qualunque omologhi in Σ_1, e sia Σ_3 la trasformata di Σ_2 mediante combinazione (n. 14) delle due projezioni di centri a, a_1, sicchè projettando risp. da a, a_1 due serie di punti corrispondentisi in Σ_2 si abbiano due serie di punti corrispondentisi in Σ_3: in forza del n. 14 sarà Σ_3 dello stesso sistema di Σ_2 e quindi anche di Σ_1. Dicendo b, b_2 due punti omologhi qualunque di Σ_2, e c, c_3 risp. le loro proiezioni da a, a_1, le quali saranno due punti omologhi qualunque di Σ_3, è chiaro che, in causa ancora del numero citato (e poichè l'unica corrispondenza del sistema di Σ_2 e Σ_3 in cui siano omologhi a, a_1 è Σ_1), Σ_1 sarà la trasformata di Σ_3 mediante combinazione delle projezioni di centri

([23]) I quattro sistemi di corrispondenze sulla curva armonica generano dunque quattro sistemi di corrispondenze fra le coppie di questa particolare involuzione: se ne trae che la forma ellittica costituita da quelle ∞^1 coppie è anch'essa armonica.

b, b_2 ed anche la trasformata di Σ_2 mediante combinazione delle projezioni di centri c, c_3. Ne segue subito che il legame fra Σ_3 e Σ_1, Σ_2 non dipende dalla coppia a, a_1 di punti omologhi in Σ_1 con cui prima fu definito. *Date su una cubica due corrispondenze qualunque di uno stesso sistema ne resta individuata una terza dello stesso sistema sì che due qualunque delle tre si trasformano l'una nell'altra mediante combinazione delle projezioni aventi i centri in due punti omologhi qualunque della rimanente* (24).

I punti uniti di ciascuna delle tre corrispondenze sono i centri delle sole projezioni che trasformino le due rimanenti l'una nell'altra. La retta congiungente un punto unito di una corrispondenza ad un punto unito di un'altra taglia ancora la cubica in un punto unito della corrispondenza rimanente.

Se due delle tre corrispondenze, p. e. Σ_1 e Σ_2, coincidono, due punti omologhi nella terza, cioè i centri di due projezioni dalla cui combinazione Σ_1 riesca trasformata in se stessa, non sono altro che i centri omologhi di projezione per Σ_1 considerati al principio di questo scritto. Si vede dunque che i centri omologhi di projezione per una data corrispondenza si corrispondono in una corrispondenza dello stesso sistema (25). I punti uniti di questa seconda (che sono dunque tanti quanti quelli della data) saranno i centri delle projezioni permutabili alla prima corrispondenza.

Torino, Giugno 1889.

---

(24) Se di due punti qualunque a, b della cubica si prendono gli omologhi a_1, b_2 rispettivamente in due corrispondenze di uno stesso sistema, le rette ab, a_1b_2 incontreranno ancora la curva rispettivamente in due punti c, c_3 che saranno omologhi in una corrispondenza dello stesso sistema delle due date e pienamente determinata da queste. — Se di tre punti a, b, c in linea retta si chiamano a_i, b_i, c_i gli omologhi in Σ_i e le tre corrispondenze $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono nelle relazioni suddette, saranno in linea retta le sei terne di punti $a_i b_l c_m$ dove $i\,l\,m$ indichi ogni permutazione di 1, 2, 3.

Aggiungiamo che il ragionamento fatto per una cubica si estende subito ad ottenere la proposizione seguente: *Su una curva ellittica normale d'ordine* n, *date* n — 1 *corrispondenze di uno stesso sistema ne resta individuata in questo una* n-*esima, sì che presi ad arbitrio sulla curva* n — 2 *punti ed i loro omologhi risp. in* n — 2 *fra quelle* n *corrispondenze, le rimanenti due si trasformano l'una nell'altra mediante combinazione delle projezioni dai due spazi* S_{n-3} *congiungenti rispettivamente quei due gruppi di* n — 2 *punti. In altri termini, se degli* n *punti d'intersezione della curva con un* S_{n-2} *qualunque si determinano gli omologhi risp. nelle* n *corrispondenze (coordinate arbitrariamente a quei punti), questi saranno ancora* n *punti di un* S_{n-2}.

(25) Ciò risulterebbe pure dall'osservazione fatta al n. 3, che la corrispondenza data e quella dei centri omologhi di projezione per essa non hanno alcuna coppia comune oppure coincidono.