Salvatore Pincherle

Sulle operazioni funzionali lineari

In: Proceedings Congress Toronto, August 1924, vol. 1, 1928, p. 129–137
in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 482–492
<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_482>

38 [201].

Sulle operazioni funzionali lineari.

Proceedings Congress Toronto, August 1924;
1, 129-137 (1928).

1. — Non è, certo, in questa riunione in cui convengono tanti eccellenti matematici dalle varie parti del mondo, che un vecchio e modesto lavoratore può recare idee nuove e feconde: il silenzio sarebbe stato più consigliabile per me, se l'accoglienza tanto cordiale ricevuta dalla delegazione, di cui sono il più anziano, non mi avesse fatto un dovere di prendere la parola. Ma la stessa Vostra cortesia, che non mi permette di rinunziare ad intrattenervi, vorrà scusare se, dopo le dotte conferenze che abbiamo avuto la ventura di udire, io non potrò esporvi che una semplice *causerie*, e se, rassegnato fin d'ora a scorgere sulle Vostre labbra il sorriso di compatimento che accoglie ciò che può sembrare sintomo d'involuzione senile, rimetto a nuovo qui, dinanzi a Voi, alcune mie vecchie idee.

2. — Da molti anni — non ardisco dire quanti — ho considerato le funzioni di un insieme lineare ben determinato, come fossero gli elementi o punti di uno spazio, cui ho dato il nome di *funzionale*, ed ho considerato quelle operazioni a carattere lineare, che eseguite su codeste funzioni, riproducono gli elementi di quell'insieme o di un altro insieme lineare. Le denominazioni di spazio funzionale, di operazioni funzionali sono state poi generalmente adottate, ed i concetti che vi si connettono sono stati sviluppati in varie direzioni; ma, mentre io mi occupavo del lato algoritmico o qualitativo di questi concetti, maestri della scienza ne sviluppavano i lati quantitativi: si ricordino la teoria delle funzioni di linee del VOLTERRA, alla quale il compianto ARZELÀ ha portato contributi di considerevole importanza; il calcolo di composizione dovuto pure al VOLTERRA, le belle sue applicazioni alla teoria delle equazioni inte-

grali ed integrodifferenziali e per conseguenza a numerose questioni di Fisica matematica; le interessanti ricerche iniziate da HADAMARD e sapientemente continuate da FRÉCHET; gli studi di HILBERT e della sua scuola; il recente libro di P. LÉVY, ecc. .

3. — Ma il punto di vista al quale mi sono posto, e che direi *qualitativo* (si potrebbe quasi dire *geometrico*), ha avuto minore successo: ed infatti meno dirette e meno immediate ne sono le applicazioni. Purtuttavia, esso non è privo d'interesse: numerosi problemi si riattaccano anche ad esso e, fra altri, ve n'è uno che, a mio parere, lo rende degno dell'attenzione dei matematici, ed è che esso lascia intravedere un metodo atto ad avviare una graduale classificazione delle trascendenti analitiche, questione quanto mai interessante, ma per la quale mancano per ora gli strumenti opportuni.

4. — Consideriamo uno spazio S di funzioni, e l'insieme delle operazioni lineari (cioè distributive rispetto all'addizione) che, applicate a questo spazio, lo riproducono: queste operazioni, alla lor volta, costituiscono un insieme lineare avente carattere di gruppo. Si viene così a generalizzare, in modo concreto, la teoria delle omografie, estendendole ad uno spazio ad infinite dimensioni e la generalizzazione dei problemi classici sulle omografie si presenta spontanea; ad esempio:

a) Data un'operazione A, ammette essa radici? esistono cioè elementi α dello spazio funzionale, per i quali sia $A(\alpha) = 0$?

b) Date due operazioni A, B, si consideri il fascio di operazioni $A - kB$: esistono valori di k, e quali, tali che $A - kB$ ammetta radici?

Come caso particolare, questo problema contiene quello della risoluzione dell'equazione integrale di seconda specie omogenea di FREDHOLM, cioè la ricerca dei numeri caratteristici e delle funzioni caratteristiche di un'operazione integrale.

c) Riduzione di un'omografia alla sua forma canonica, cioè ricerca della base dello spazio S rispetto ad un'operazione data.

5. — Lo studio delle omografie così generalizzate dà luogo ad un'osservazione importante, che io ho pubblicata nel 1897 e che è stata ritrovata, una dozzina d'anni più tardi, da HELLINGER e TOEPLITZ: questa osservazione è la seguente.

Una omografia applicata ad uno spazio S ad un numero finito di dimensioni, se non ammette una inversa unica, è degenere; ciò significa:

1°) che essa ammette radici,

2°) che essa trasforma lo spazio su cui opera in una parte dello spazio medesimo, cioè in un sottospazio di S non coincidente con S. Orbene, quando l'omografia opera su uno spazio ad un numero infinito di dimensioni, queste due proprietà non sono più conseguenza l'una dell'altra: oltre alla degenerescenza di cui si è ora parlato, si hanno operazioni che ammettono radici, pur riproducendo l'intero spazio S, e questa è la degenerescenza parziale di prima specie; mentre altre non ammettono radici, ma trasformano S in un suo sottospazio, e questa è la degenerescenza parziale di seconda specie.

6. — È facile dare esempi, non meno semplici che suggestivi, del fatto ora ricordato. Sia S lo spazio funzionale delle serie di potenze, di cui

$$(1) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^n, \quad \ldots$$

può dirsi *la base*. Una operazione lineare P sia definita, con le a_n non nulle, da

$$P(1) = a_0, \quad P(x^n) = a_n x^n - x^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Questa operazione applicata alla serie

$$\alpha = \Sigma h_n x^n$$

dà

$$P(\alpha) = (h_0 a_0 - h_1) + (h_1 a_1 - h_2) x + \ldots + (h_n a_n - h_{n+1}) x^n + \ldots,$$

e qui i coefficienti $h_1, h_2, \ldots$ si possono determinare in modo che sia $P(\alpha) = 0$: l'operazione P ammette dunque radici nello spazio S; ma d'altra parte ogni elemento di S può essere rappresentato da $P(\alpha)$: l'operazione P riproduce dunque tutto lo spazio S.

Sia definita invece, nel medesimo spazio, con le a_n non nulle, un'operazione Q da

$$Q(1) = a_0 - x, \qquad Q(x^n) = a_n x^n - x^{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si avrà:

$$Q(\alpha) = \Sigma k_n x^n \qquad (k_0 = h_0 a_0\,, \ k_n = h_n a_n - h_{n-1} \text{ per } n \geq 1),$$

e qui si può avere $Q(\alpha) = 0$ solo se α è identicamente nullo; mentre d'altra parte, sotto ovvie condizioni di convergenza, è

$$\Sigma k_n a_0 a_1 \dots a_n = 0;$$

per modo che le serie $Q(\alpha)$ dànno soltanto una parte dello spazio S.

7. — L'operazione D di derivazione, nello spazio S ora considerato, è operazione degenere della prima specie poichè ammette come radice la costante, mente trasforma in sè tutto S; invece, nello spazio funzionale la cui base è

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \tag{2}$$

è un'operazione degenere di seconda specie, poichè essa genera il sottospazio

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}, \dots,$$

mentre non vi ha radici. Infine, in uno spazio avente come base

$$e^{a_1 x}, \quad e^{a_2 x}, \quad \dots, e^{a_n x}, \quad \dots, \tag{3}$$

dove $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sono numeri fra loro diversi, l'operazione D non è degenere, e gli elementi (3) ne dànno senz'altro la forma canonica.

8. — Fra le operazioni lineari che si applicano ad uno spazio S determinato e riproducono lo spazio stesso, si può fissare l'attenzione su una di esse in particolare, sia H, che si dirà *operazione principale*, indi classificare le altre a seconda dei loro rapporti con quella. In primo luogo, si possono considerare le operazioni permutabili con H, cioè quelle per le quali è

$$AH - HA = 0; \tag{4}$$

indi, il primo membro di (4) può considerarsi come una nuova operazione, che dà, per così dire, lo *scarto* della permutabilità di A rispetto ad H. Indicando questo scarto con A'_H, e detto questo di *indice* 1, si potranno considerare gli scarti di indici 2, 3, ..., ossia:

$$A''_H = A'_H H - HA'_H = AH^2 - 2HAH + H^2A,$$
$$A'''_H = AH^3 - 3HAH^2 + 3H^2AH - H^3A\ ,$$

e così via. E mentre $A'_H = 0$ caratterizza la permutabilità ordinaria con H, si potrà dire che le operazioni per le quali è $A_H^{(n)} = 0$ hanno, rispetto ad H, una permutabilità di ordine n.

Lo scarto ha, nel Calcolo delle operazioni, un'analogia formale notevole con la derivazione nel Calcolo delle funzioni. Così, lo scarto di un prodotto AB di operazioni è dato da

$$(AB)'_H = A'_H B + A B'_H$$

e per gli scarti d'ordine superiore si ha

$$(AB)''_H = A''_H B + 2A'_H B'_H + A B''_H,$$

$$(AB)'''_H = A'''_H B + 3A''_H B'_H + 3A'_H B''_H + A B'''_H,$$

ecc., e la legge è evidente.

9. — Sia S uno spazio funzionale tale che il prodotto di due suoi elementi appartenga ancora ad S. Non si può davvero immaginare, in S, un'operazione più semplice della moltiplicazione degli elementi generici di S per un suo elemento fisso α. In particolare, se S è lo spazio, già considerato, delle serie di potenze, si può assumere x come moltiplicatore, ed ogni altra operazione di moltiplicazione sarà permutabile con questa. Lo scarto della permutabilità di un'operazione A sarà allora dato da

$$A(x\alpha) - xA(\alpha),$$

α essendo un elemento qualsiasi in S: questo scarto verrà indicato semplicemente con A', e con $A^{(n)}$ lo scarto d'ordine n. Orbene, la considerazione di questi scarti dà luogo ad una formula assai notevole. Se, essendo α e β due elementi di S, si pone

$$A(\alpha\beta) = \lambda_0\, \alpha + \lambda_1\, D\alpha + \lambda_2\, D^2\alpha + \dots,$$

si trova che i coefficienti λ_0, λ_1, λ_2, ... dipendono esclusivamente da β, e che è precisamente

$$\lambda_0 = \beta, \quad \lambda_1 = A'(\beta), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2!} A''(\beta), \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{1}{n!} A^{(n)}(\beta), \quad \dots;$$

talchè vale la formula

$$A(\alpha\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(\beta)\, D^n \alpha \tag{5}$$

e per questa serie (che nel Calcolo delle operazioni funzionali ha un ufficio analogo alla serie di TAYLOR nella teoria delle funzioni), esiste in ogni caso un dominio funzionale di convergenza.

Un'espressione differenziale lineare, i cui coefficienti siano serie di potenze, gode, rispetto alla moltiplicazione per x, della permutabilità di ordine $m+1$ se m è il suo ordine; essendo A una tale espressione si ha dunque $A^{(m+1)}=0$. Inoltre lo scarto per una tale espressione si costruisce mediante una regola che è formalmente quella stessa della derivazione dei polinomi, gli esponenti essendo sostituiti dagli indici di derivazione. Se A è una simile espressione, la formula (5) si riduce ad un numero finito di termini: ed il caso particolare della (5) così ottenuto risale a D'ALEMBERT.

10. — Alla moltiplicazione per x sostituiamo ora, come operazione principale in S, la derivazione; indichiamo con A'_D lo scarto della operazione A dalla permutabilità con D. La permutabilità propriamente detta, cioè $A'_D=0$, si ha per le espressioni differenziali lineari (anche d'ordine infinito, in ispecie per le espressioni lineari alle differenze) a coefficienti costanti; la permutabilità d'ordine $m+1$, cioè $A_D^{(m+1)}=0$, si ha per le espressioni differenziali lineari d'ordine finito od infinito, aventi per coefficienti polinomi di ordine non superiore ad m.

11. — Fin qui abbiamo considerato operazioni lineari che riproducono lo spazio su cui operano, o parti di esso. Ma si possono anche studiare operazioni lineari che trasformino uno spazio funzionale S in un altro T: le omografie di T sono allora le trasformate mediante una tale operazione, sia B, delle omografie di S. Da questo punto di vista, occupiamoci di una di queste trasformazioni B delle omografie di S; è in questa direzione che ho studiato una di tali trasformazioni B, la più nota e la più interessante: la trasformazione di LAPLACE, studiata pure da ABEL, e di cui BOREL ha fatto uso con tanta efficacia nella teoria moderna delle funzioni. Questa operazione ha, come proprietà caratteristica, quella di far passare dalle operazioni permutabili di un dato ordine rispetto alla moltiplicazione, alle operazioni permutabili dello stesso ordine rispetto alla derivazione. Mi sia permesso trattenermi un istante sul caso più semplice, quello della permutabilità propriamente detta.

12. — Consideriamo come spazio S quello delle funzioni intere *di tipo esponenziale* (secondo l'espressione di PÒLYA) di una varia-

bile t, come spazio T quello delle serie di potenze di $1/x$, senza termine costante. Indico con $\varphi, \psi, \ldots$ gli elementi di S, con $f, g, \ldots$ gli elementi di T. L'operazione B (trasformazione di LAPLACE-ABEL-BOREL) è data da

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \tag{6}$$

o brevemente

$$B(\varphi) = f;$$

φ è la funzione generatrice, f la sua determinante. La moltiplicazione per t, eseguita in S, si muta, in T, nella derivazione cambiata di segno, $-D$. Sia $\alpha(-D)$ un polinomio razionale intero a coefficienti costanti in $-D$, e sia la equazione, in g,

$$\alpha(-D)\,\{g\} = f. \tag{7}$$

Questa equazione è risoluta da

$$g(x) = \int e^{-xt}\,\frac{\varphi(t)}{\alpha(t)}\,\mathrm{d}t; \tag{8}$$

qui il cammino d'integrazione è formato da una linea che, partendo da 0, tende all'infinito secondo un azimut determinato θ, tracciata però in modo da evitare le radici di $\alpha(t)$. L'espressione (8) rappresenta un ramo ad un valore di funzione analitica in un semipiano contenente il semiasse reale positivo e limitato da una perpendicolare al raggio di azimut $-\theta$; variando il cammino di integrazione senza oltrepassare le radici di $\alpha(t)$, si ottiene il prolungamento analitico di quel ramo; oltrepassando le radici, si aggiungeranno termini esponenziali, integrali dell'equazione

$$\alpha(-D) = 0 \tag{9}$$

priva di secondo membro. Di questa $g(x)$, la teoria delle funzioni determinanti dà, in modo semplicissimo, lo sviluppo asintotico.

13. — Al caso elementare che ho così considerato si può riattaccare, a quanto mi sembra, un avviamento ad una graduale classificazione di numerose trascendenti.

Sia $f(x)$ un elemento dello spazio T, $\varphi(t)$ la sua generatrice, $\varrho(t)$ una funzione razionale qualsiasi, escludendo solo, ciò che non ha nulla di essenziale, che $t = 0$ ne sia un polo. La

$$g(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \varrho(t)\, \varphi(t)\, e^{-kt}\, \mathrm{d}t$$

dà il risultato di un'operazione $A(f)$ eseguita su f e trasformata mediante B della moltiplicazione per $\varrho(t)$, risultato che è una trascendente il cui carattere essenziale è facile a stabilirsi: esso dipende infatti esclusivamente dalla funzione

$$\lambda(x, z) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{\varphi(t)\, e^{-xt}}{t - z}\, \mathrm{d}t, \tag{10}$$

poichè $g(x)$ non è altro che una combinazione lineare a coefficienti costanti di $\lambda(x, z)$ ed eventualmente delle sue derivate rispetto a z, calcolate per i valori di z che sono i poli di $\varrho(t)$.

Ora, quando $\varphi(t)$ varia nello spazio S, una classe di trascendenti è costituita nello spazio T, e questa classe riconosce a capofila, per così dire, quella trascendente che si ha per $\varphi(t) = 1$, cioè quella in cui $\varphi(t)$ è l'elemento più semplice in S; e questa trascendente capofila è

$$l(x, z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t - z}\, \mathrm{d}t, \tag{11}$$

trascendente ben nota, poichè essa non è altro che

$$e^{-zx} \ \mathrm{li}\ e^{zx},$$

dove «li» indica il logaritmo integrale. Le varie $\lambda(x, z)$ hanno un comportamento analitico che offre con quello della (11) la più grande analogia. Le trascendenti di questa categoria forniscono gli integrali delle equazioni lineari differenziali, a coefficienti costanti, d'ordine finito od infinito; in particolare, si hanno soluzioni delle equazioni alle differenze finite che sono in stretta relazione con le soluzioni, dette principali, che NÖRLUND ha considerato nei suoi recenti ed importanti lavori.

14. — Ho accennato così al caso più semplice della utilizzazione della trasformazione B nel calcolo funzionale qualitativo; ma questo caso si può generalizzare in varie direzioni, alcune delle quali passo ora ad indicare.

Anzitutto, si può sostituire alle generatrici del precedente spazio S classi più generali di funzioni: analitiche lungo una striscia comprendente il cammino d'integrazione, ed anche non analitiche. La funzione determinante è tuttavia analitica, regolare in un semipiano determinato se la generatrice ha un andamento asintotico di carattere esponenziale; essa può ancora venire assoggettata alle operazioni di tipo A_ϱ: in particolare, si può dare la soluzione di equazioni lineari differenziali o alle differenze a coefficienti costanti il cui secondo membro sia una tale funzione determinante, e decomporre questa soluzione in termini della forma

$$\lambda(x, z_i), \qquad \frac{\partial^r \lambda(x, z_i)}{\partial z_i^r}.$$

Oppure, si può generalizzare l'operazione eseguita su $\varphi(t)$; considerare, ad esempio, in luogo della moltiplicazione per $\varrho(t)$ l'applicazione a $\varphi(t)$ di un'espressione differenziale lineare normale e dedurne le soluzioni della trasformata mediante B: una questione di tale genere risale al POINCARÉ.

15. — Ma, rimanendo alla considerazione della moltiplicazione operata sulla funzione generatrice, si prenda come moltiplicatore la potenza t^α, α essendo un esponente di parte reale > -1. La trasformata mediante B di questa semplice moltiplicazione è, per ogni elemento $f(x)$ di T, un'operazione che, per tutti i motivi che guidano nell'applicazione del principio di permanenza, definisce la derivata d'indice α di $f(x)$, moltiplicata per $e^{\pi i \alpha}$. La proprietà $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ viene da sè soddisfatta, ed una relazione che si deduce immediamente da

$$e^{\pi i \alpha} D^\alpha f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^\alpha \varphi(t) \, dt \tag{12}$$

permette di estendere la definizione agli indici α la cui parte reale è < -1. Vi è eccezione solo per i valori interi negativi di α; si vede però che il secondo membro di (12) definisce una funzione meromorfa di α che ha, per $\alpha = -1, -2, -3, \ldots$, poli di primo ordine. Se ci riferiamo ancora all'elemento più semplice di T, ad $1/x$, l'operazione (12) dà come risultato

$$\frac{e^{\pi i\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}.$$

Le operazioni $D^\alpha(-1)^\alpha$ così definite formano un gruppo ad un parametro, e non è senza interesse il notare l'operazione infinitesima di questo gruppo:

$$\int_0^\infty e^{-xt}\,\varphi(t)\log t\,dt.$$

16. — Questo caso suggerisce lo studio delle trasformate mediante B di moltiplicazioni in cui il moltiplicatore abbia forma meno semplice. Un tale studio è stato tentato solo in qualche caso speciale: se il moltiplicatore è una irrazionale quadratica della forma $(t+\sqrt{1+t^2})^n$, si ottiene una classe di operazioni che, applicate agli elementi di T, dànno una categoria di trascendenti che riconoscono come capofila le funzioni di BESSEL, cioè che si riducono a queste se l'elemento di T al quale si applicano è la semplice $1/x$; se l'irrazionale è della forma

$$\{(1+t^2)(1+k^2t^2)\}^{n/2},$$

n essendo intero, si ottiene una categoria di trascendenti che hanno proprietà analoghe e di cui le capofila dànno una notevole generalizzazione delle besseliane.

Uno studio generale in questo ordine di idee è ancora da farsi, ma non mi pare dubbia l'utilità di un tentativo per una classificazione delle trascendenti.

17. — Concludo questa conversazione, che forse ha abusato della Vostra cortesia, riprendendo, per un istante l'operazione che, appli cata allo spazio S delle serie di potenze, era definita da

$$Q(1)=a_0-x, \qquad Q(x^n)=a_n x^n - x^{n+1} \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

ammettendo, per fissare le idee, che sia

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

L'operazione Q applicata ad una serie di potenze avente un raggio di convergenza $r > |a|$ dà come risultato una serie avente il medesimo cerchio di convergenza; ma se è

$$Q(\Sigma\, h_n\, x^n) = \Sigma\, k_n\, x^n,$$

si ha

$$\Sigma\, k_n\, a_0\, a_1 \dots a_{n-1} = 0, \tag{13}$$

la serie del primo membro essendo per altro assolutamente convergente: per modo che, come si è già osservato, l'operazione Q, nello spazio S_a delle serie di potenze convergenti in cerchi di raggio $> |a|$, è degenere di seconda specie. Se ψ è un elemento di S_a, alla sua volta $Q^{-1}(\psi)$ sarà elemento di S_a soltanto sotto la condizione che i coefficienti k_n di ψ verifichino l'eguaglianza (13). Senza di ciò, l'espressione di $Q^{-1}(\psi)$, cioè, la soluzione dell'equazione

$$Q(\omega) = \psi \tag{14}$$

può ottenersi soltanto con l'*aggiunzione* di un elemento non appartenente ad S_a, e precisamente con l'aggiunzione della funzione

$$\theta_a(x) = \Sigma\, \frac{x^n}{a_0\, a_1 \dots a_n}, \tag{15}$$

di cui $|a|$ è esattamente il raggio di convergenza.

Tutte le funzioni $Q^{-1}(\psi)$, qualunque sia l'elemento ψ per il quale la (13) non sia soddisfatta, hanno sulla circonferenza di raggio $|a|$ la stessa singolarità, nel senso che è

$$Q^{-1}(\psi) = k\, \theta_a(x) + \psi_1(x), \tag{16}$$

dove $\psi_1(x)$ è un elemento di S_a e k una costante.

L'analogia della (13) con la condizione di divisibilità di una serie di potenze per $x - a$ è manifesta; la condizione (13) si riduce appunto, per $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = a$ alla condizione $\Sigma\, k_n\, a^n = 0$, di divisibilità; il termine $k\, \theta_a(x)$ in (16) isola le singolarità di $Q^{-1}(\psi)$ sulla circonferenza, come il termine $(x - a)^{-1}$ isola il polo nel quoziente $\psi(x)/(x - \alpha)$, ed infine la costante k ha l'ufficio stesso del residuo.

Non abuserò più oltre della Vostra pazienza; mi basti aggiungere che questa analogia con la divisibilità può proseguirsi assai oltre, permettendo, in casi notevoli, di separare e di isolare le singolarità in varie classi di funzioni analitiche.