I Grandi Matematici Italiani online

Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle

Alcune osservazioni ed una rettifica alla Memoria «Appunti di Calcolo funzionale»

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **18** (1913-1914), p. 20–22

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 445–447

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_445>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

34 [155].

Alcune osservazioni ed una rettifica alla Memoria « Appunti di Calcolo funzionale ».

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; (Nuova Serie) **18**, 20-22 (1913-1914).

1. — Nel Capitolo I della detta Memoria (*) sono svolti alcuni concetti, secondo me fondamentali, e del resto assai semplici, relativi ai possibili comportamenti delle operazioni lineari applicabili ad un insieme lineare di funzioni. Per comodità, si considerano funzioni di una variabile reale date in un intervallo, che verrà designato con J, ma non vi è difficoltà ad estendere quei concetti sia agli insiemi di funzioni di più variabili, sia a quelli di funzioni dei punti di un aggregato. Alle cose dette nei §§ 4-11 della citata Memoria, aggiungo qui alcune osservazioni destinate a recare loro anche maggiore semplicità.

Un insieme lineare *denso* $\mathcal{S}$ (§ 4) può anche dirsi « insieme contenente un campo *infinitesimo* ». Si intende con ciò che, preso un numero positivo e arbitrariamente piccolo, esistono, nell'insieme dato, elementi α tali da mantenersi, in tutto J, inferiori ad e in valore assoluto. Se l'insieme $\mathcal{S}$ contiene un campo infinitesimo, contiene anche un *intorno* di ogni suo elemento α, cioè elementi che differiscono da α in valore assoluto per meno di un numero arbitrariamente piccolo. In alcune ricerche potrà essere opportuno considerare come infinitesimo il campo delle funzioni che si mantengono minori di e in valore assoluto in tutto J, salvo un aggregato di punti di J avente misura nulla. L'elemento limite una successione $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ di elementi di $\mathcal{S}$, se contenuto in $\mathcal{S}$, porta l'esistenza in $\mathcal{S}$ di un campo infinitesimo.

(*) (*R.*) È il lavoro n. **30** [**145**] di questo Volume.

La continuità di un'operazione distributiva A (§ 6) consiste nel fatto che mediante questa operazione si fa corrispondere un campo infinitesimo ad un campo infinitesimo: a questo concetto si collega subito l'altro, di eguale continuità di una successione di operazioni (§ 12) od anche di un insieme non numerabile di operazioni.

L'insieme degli elementi di $\mathfrak{S}$ per i quali una data successione (A_n) di operazioni ammette limite viene indicato con $\mathfrak{S}_1$; esso è pure un insieme lineare. L'operazione di limite si è indicata con L. Ora, se $\mathfrak{S}_1$ è denso, ogni suo elemento α avrà un intorno in $\mathfrak{S}_1$: cioè, preso q positivo arbitrariamente piccolo, vi saranno elementi α' appartenenti ad $\mathfrak{S}_1$ e tali che sia $|\alpha' - \alpha| < q$. Essendo e piccolo a piacere, può darsi che il numero $\bar{n}$, a partire dal quale è

$$|L(\alpha') - A_n(\alpha')| < e \qquad (n > \bar{n}),$$

vari al variare di α'. Quando, per un intorno abbastanza piccolo di α, il numero $\bar{n}$ è indipendente da α', ho detto che la (A_n) *è convergente uniformemente nell'intorno di* α. Il Dr. S. JANISZEWSKI di Varsavia mi suggerisce di usare senz'altro la dicitura più semplice: *convergente uniformemente in* α.

2. — Il teorema del § 14 non è esatto nella forma in cui è enunciato, come mi ha fatto osservare il Dr. JANISZEWSKI in una cortese comunicazione epistolare, ma l'enunciato si rettifica nella forma seguente:

Se le A_n sono egualmente continue ed $\mathfrak{S}_1$ è denso, la successione (A_n) converge uniformemente in ogni elemento α di $\mathfrak{S}_1$.

Ed infatti, essendo e un numero positivo piccolo a piacere, per l'eguale continuità di A_n si può determinare un numero q tale che per $|\alpha - \alpha'| < q$ (α' esistente in $\mathfrak{S}_1$ per l'ipotesi che $\mathfrak{S}_1$ è denso) sia, per ogni indice ν,

$$\text{(a)} \qquad |A_\nu(\alpha) - A_\nu(\alpha')| < e/3.$$

Ma per essere α elemento di $\mathfrak{S}_1$, preso e, si può determinare un numero $\bar{n}$ tale che, per gli interi positivi n ed r con $n > \bar{n}$ ed r qualunque, sia

$$\text{(b)} \qquad |A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)| < e/3\ .$$

Ora, è

$$|A_{n+r}(\alpha') - A_n(\alpha')| \leq |A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)| +$$
$$+ |A_{n+r}(\alpha') - A_{n+r}(\alpha)| + |A_n(\alpha) - A_n(\alpha')|.$$

I due ultimi moduli sono in valore assoluto, per la (a), minori di $e/3$; il primo è minore di $e/3$ per la (b), onde risulta, per $n > \overline{n}$,

$$|A_{n+r}(\alpha') - A_n(\alpha')| < e;$$

così per tutto l'intorno $|\alpha - \alpha'| < q$ in $\mathcal{S}_1$ vale uno stesso numero n a verificare la diseguaglianza precedente: si ha cioè la convergenza uniforme in α.

Nell'enunciato del § 14 era asserito che $\mathcal{S}_1$ è denso: ed in ciò consisteva l'inesattezza, dovuta ad una svista e precisamente ad una falsa interpretazione dell'ultima diseguaglianza della pag. 132. Le conseguenze che, nel seguito della Memoria, si traggono dal teorema del § 14 non vengono però alterate dalla modificazione dell'enunciato.

Il Dr. JANISZEWSKI dà esempi, molto interessanti anche di per sè, del fatto che per successioni egualmente continue può accadere che lo spazio $\mathcal{S}_1$ non sia denso: sarebbe desiderabile che Egli volesse pubblicarli.