Salvatore Pincherle

Appunti di Calcolo funzionale

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 6, Vol. **8** (1911), p. 117–152

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 362–404

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_362>

30 [145].

Appunti di Calcolo funzionale.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(6) **8**, 117-152 (1911).

Introduzione.

Parecchi anni or sono, lo studio di qualche problema d'inversione d'integrali definiti mi conduceva a considerare l'espressione

$$\int a(x, y)\, f(y)\, \mathrm{d}y \tag{1}$$

come un'operazione applicabile all'elemento variabile $f(y)$, nella stessa guisa che una funzione è applicata alla sua variabile indipendente (1). Questo concetto, analogo a quello che signoreggia il Calcolo delle variazioni, veniva da me ripreso e svolto in varie Note e poi in un Volume (2) pubblicato in collaborazione con un valente mio discepolo, ora mio egregio Collega. Secondo questo concetto, *le funzioni di una determinata classe, più o meno estesa, sono da considerarsi come punti di uno spazio ad infinite dimensioni, e le operazioni distributive, o lineari, sono le omografie operanti su questo spazio.* Per meglio delimitare la questione, mi ero trattenuto specialmente su quello spazio i cui elementi sono le serie di potenze di una variabile; ogni tale serie si considerava come un punto di quello spazio, ed i coefficienti ne rappresentavano le coordinate: anche limitato in

---

(1) La prima Nota in cui io abbia accennato a questo concetto è comparsa negli «Acta Math., T. VII, pag. 381 (1855)».

(2) S. Pincherle e U. Amaldi, *Le operazioni distributive,* Zanichelli, Bologna 1911.

questi termini, il concetto di spazio funzionale e di operazione geometrica sugli elementi di questo spazio si rivelava fecondo e metteva in luce inattese analogie fra la teoria delle funzioni analitiche ed il calcolo delle operazioni ([1]).

D'altra parte, dopo le notevoli ricerche del VOLTERRA, lo studio delle equazioni integrali, al quale ha dato un meraviglioso sviluppo la Memoria ormai classica del FREDHOLM ([2]), ha aperto all'indagine matematica nuovi campi, nei quali si vanno giornalmente raccogliendo risultati di grande e riconosciuta importanza. Fra questi risultati, i più notevoli ed acquisiti nel modo più completo e definitivo, sono quelli che riguardano le equazioni integrali lineari: queste, e con esse lo studio, che vi si connette intimamente, delle operazioni funzionali della forma (1), che si chiameranno *operazioni integrali*, hanno dato un'estensione inattesa alle ricerche sulle operazioni lineari che agiscono in un campo funzionale. In codeste ricerche, lo spazio funzionale è quello delle funzioni continue, o quelli, più estesi ancora, delle funzioni integrabili nel senso di RIEMANN o delle funzioni sommabili nel senso di LEBESGUE; dalle ricerche stesse, le operazioni lineari che un tempo primeggiavano, come le forme lineari differenziali o alle differenze, vengono in qualche modo ricacciate in seconda linea. Nei lavori ai quali alludiamo, e fra i quali il posto più cospicuo è occupato da quelli di HILBERT e della sua Scuola, le equazioni integrali e le operazioni che ad esse si collegano vengono considerate sopratutto da un punto di vista che in altra occasione ho chiamato *quantitativo*; questo punto di vista è prevalente nelle questioni di meccanica e di fisica matematica che hanno dato origine a simili equazioni e ad esso si sono specialmente attenuti i numerosi autori che si sono occupati della loro risoluzione e dei problemi affini, fra cui principalissimo quello della sviluppabilità di una funzione arbitraria in serie procedente secondo una successione di funzioni determinate: problema che a buon diritto si può considerare come quello della rappresentazione lineare di un elemento arbitrario di uno spazio funzionale mediante una data base.

Ma se è grandissima in sè, e per le applicazioni, l'importanza di questo punto di vista quantitativo od *aritmetico* sotto il quale si suole considerare il calcolo funzionale, non per questo è privo

---

([1]) Si noti come questo concetto abbia giovato al compianto T. CAZZANIGA nei suoi lavori sui *determinanti infiniti* secondo H. VON KOCH; vedasi, in particolare, « Atti della R. Accad. di Torino, T. 34 (16 Aprile 1898) ».

([2]) Acta Math., T. XXVII, p. 365 (1903).

d'interesse il punto di vista *qualitativo*, che si potrebbe anche dire *geometrico*; è sotto questo punto di vista che deve venire tentata la classificazione delle operazioni lineari; a questo appartiene lo studio delle proprietà delle operazioni integrali (1) in corrispondenza delle proprietà analitiche del loro *nucleo* $a(x, y)$, la natura analitica del risultato di una tale operazione in relazione con quelle dell'ente su cui si opera (*corrispondenza funzionale*), le condizioni che regolano la distribuzione degli elementi invarianti, ecc.. Questo secondo modo di considerare la teoria delle operazioni integrali starebbe di fronte al primo, all'incirca in quella relazione in cui la teoria delle funzioni analitiche sta rispetto alla teoria delle funzioni arbitrarie di variabili reali; che, per altro, i due modi di considerare la teoria delle operazioni o delle equazioni funzionali lineari abbiano fra di loro stretti legami, è ben naturale a priori, ed è dimostrato, per esempio, da quei risultati del POINCARÉ, del RIESZ e di altri, che fanno dipendere la possibilità della risoluzione di un'equazione funzionale, cioè, una questione di indole morfologica, da un criterio puramente aritmetico, ad esempio dalla convergenza di una data serie.

Il presente lavoro, al quale, per molte ragioni, non posso dare che il carattere di semplice abbozzo, è il primo di un gruppo destinato ad illustrare il punto di vista al quale ho per ultimo accennato. I risultati che esso contiene saranno, senza dubbio, giudicati incompleti; mi si permetta solo di ritenere non infondata la speranza che, nella direzione che vi è indicata, siano da incontrarsi argomenti di interessanti ricerche. Questa Memoria è dedicata allo studio di operazioni lineari per le quali si ammette l'esistenza di una risolvente di FREDHOLM che sia una funzione analitica di forma determinata del parametro; ci si propone di vedere quali conseguenze, per l'operazione stessa e per la ripartizione che essa effettua nello spazio funzionale su cui agisce, nascano dall'ammissione di una risolvente di questa o di quella forma. Codesto studio, premesse nell'art. I alcune considerazioni generali sulle operazioni lineari in relazione specialmente con le continuità e nell'art. II alcune nozioni sulla risolvente, si svolge negli articoli III-V, in cui vengono esaminati tre casi che forniscono altrettanti tipi interessanti; nell'art. III, il tipo, che si può dire del VOLTERRA, in cui l'operazione non ammette nello spazio considerato elementi invarianti ed è base di un calcolo che procede con le regole del calcolo ordinario ed ha una validità assai estesa; nell'art. IV, il tipo in cui la risolvente è meromorfa rispetto al parametro e al quale ha condotto il caso classico studiato dal FREDHOLM; infine, nell'art. V, un'operazione che si distacca dalle precedenti per avere una risolvente, che, come funzione del parametro, ammette una linea di discontinuità e per presentare quindi, secondo la nomenclatura dell'HILBERT, uno *spettro* continuo.

I.

1. — Le considerazioni che seguono si potrebbero riferire a tutte quelle classi di enti per i quali si immaginano definiti il concetto di eguaglianza e diseguaglianza, quello di addizione, quello di moltiplicazione per un numero, quello di passaggio al limite : ciascuno di questi concetti essendo caratterizzato dalle sue proprietà elementari. Non sarebbe necessario particolarizzare maggiormente tali enti, e la trattazione potrebbe condursi in modo astratto : però, per meglio fissare le idee, ci pare opportuno specificarne la natura, e nella scelta di questa specificazione vi è una notevole arbitrarietà: ad esempio, si potrebbero considerare classi di vettori di un numero indeterminato di dimensioni, o funzioni di un numero arbitrario di variabili date in un dominio comune di variabilità. Per brevità di linguaggio, e anche in vista delle applicazioni, ci restringeremo — la restrizione non ha nulla di essenziale — al caso in cui gli enti in discorso sono funzioni di una variabile x, date in un intervallo J; tali funzioni saranno gli elementi di un insieme, che nei singoli casi verrà definito da un conveniente sistema di proprietà, e che diremo *spazio funzionale* $\mathcal{S}$.

2. — Gli elementi di $\mathcal{S}$ verranno di norma, in ciò che segue, designati con lettere greche minuscole; useremo talvolta anche lettere minuscole latine stampatelle. Le lettere latine minuscole corsive ci serviranno a rappresentare numeri. Un elemento α di $\mathcal{S}$ è dunque una funzione della variabile x data nell'intervallo J; non è però escluso che α, oltre che di x, possa essere funzione di altre variabili y, z, ... Se ciò accade, si ammetterà che α sia elemento di $\mathcal{S}$ per ogni sistema di valori dati ad y, z, ... nei rispettivi loro campi di variabilità.

3. — Ammetteremo che lo spazio $\mathcal{S}$ sia *lineare*. Intendiamo con ciò che se $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ appartengono ad $\mathcal{S}$, vi appartenga anche

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

per ogni sistema di funzioni α, β, γ, ...

4. — Ammetteremo ancora che lo spazio $\mathcal{S}$ sia *denso*. Intendiamo con ciò che, preso un numero positivo e arbitrario, esso contenga funzioni che, in tutto l'intervallo J, si mantengano in valore assoluto inferiori ad e. Questa condizione è pochissimo restrittiva; basta infatti che fra gli elementi di $\mathcal{S}$ vi sia una funzione α limitata in tutto J, perchè la condizione sopra detta sia verificata, poichè, se è $|\alpha| < m$, la funzione $\alpha e/m$, che appartiene ad $\mathcal{S}$, è in valore assoluto inferiore ad e. Se è denso, esso contiene, insieme ad un suo qualunque elemento α, infiniti elementi α' tali che sia $|\alpha' - \alpha| < e$; questi si diranno appartenere all'*intorno* (e) di α.

5. — Diremo che ϱ è *elemento limite* di $\mathcal{S}$ se è possibile estrarre da $\mathcal{S}$ una successione $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ di elementi avente per limite ϱ e tale che la convergenza al limite sia uniforme nell'intervallo J. Scriveremo in tale caso:

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \varrho;$$

con questa scrittura intenderemo dunque, senza che sia necessario ripeterlo esplicitamente, la convergenza uniforme al limite in tutto J. Lo spazio $\mathcal{S}$ si dirà *chiuso* se contiene i suoi elementi limiti.

6. — Le operazioni che si possono applicare agli elementi di $\mathcal{S}$ si dicono *operazioni funzionali*. Noi ci occuperemo specialmente di quelle, fra codeste operazioni, che ammettono le seguenti proprietà:

a) Applicate ad un elemento di $\mathcal{S}$, esse dànno origine ad uno o più elementi di $\mathcal{S}$ medesimo. Considereremo il caso più semplice in cui l'operazione applicata ad un elemento di $\mathcal{S}$ genera un solo elemento dello spazio medesimo. L'operazione viene detta allora *univoca*.

b) Se A è l'operazione considerata ed $A(\alpha)$ il risultato che si ottiene applicandola ad un elemento di α, deve essere, per ogni coppia di elementi α, β e per ogni numero c,

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta), \qquad A(c\alpha) = c\,A(\alpha).$$

L'operazione A è cioè *distributiva*.

c) Preso un numero e arbitrario positivo, deve esistere in corrispondenza ad e e all'operazione A un tal numero q che, se l'elemento α di $\mathcal{S}$ soddisfa in tutto J alla diseguaglianza

$$|\alpha| < q,$$

consegua

$$|A(\alpha)| < e.$$

L'operazione A si dice con ciò *continua.*

Diremo *lineare* un'operazione che soddisfa alle tre proprietà precedenti a), b), c).

Indicheremo le operazioni dello spazio $\mathcal{S}$ con le maiuscole latine.

7. — Osserviamo subito che se A è un'operazione lineare, da

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \beta$$

segue immediatamente

$$\lim_{n=\infty} A(\alpha_n) = A(\beta).$$

In particolare, se la serie

$$\sum_1^\infty \alpha_n$$

è convergente uniformemente in I, è

$$A \Sigma \alpha_n = \Sigma A (\alpha_n),$$

cioè l'operazione A è distributiva ai termini della serie.

8. — Come esempi di operazioni lineari si possono citare, fra le più ovvie, le seguenti:

a) la moltiplicazione di qualsiasi elemento di $\mathcal{S}$ per un numero costante, le seguenti:

b) l'integrazione definita

$$\int_{J_1} a(x, y)\, \alpha(y)\, dy\ ,$$

dove gli elementi α di $\mathcal{S}$ si suppongono limitati ed integrabili in un intervallo J_1 contenuto in J, ed $a(x, y)$ è una funzione limitata di x, y, data, per la variabile x nell'intervallo J, per la variabile y nell'intervallo J_1, ed integrabile in questo intervallo.

9. — Per le operazioni lineari univoche si definiscono nel modo più immediato l'eguaglianza e la somma. Le operazioni A e B si diranno *eguali* nello spazio $\mathcal{S}$ se, per ogni elemento α di $\mathcal{S}$, è $A(\alpha) = B(\alpha)$; l'operazione C si dirà *somma* di A e B, e si porrà

$$C = A + B$$

se per ogni elemento α di $\mathcal{S}$ la $C(\alpha)$ è la somma delle funzioni $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$. Le leggi formali dell'eguaglianza e dell'addizione sono manifestamente conservate.

10. — Il prodotto di due o più operazioni lineari univoche in $\mathcal{S}$ verrà definito nel modo solito. Se A e B sono le due operazioni lineari date, si vede subito che AB applicata ad un elemento di $\mathcal{S}$ dà un elemento di $\mathcal{S}$; e che è operazione univoca, distributiva e continua. Pertanto le operazioni lineari in $\mathcal{S}$ formano un gruppo, in generale non commutativo. Per le operazioni univoche si vede subito che la moltiplicazione è associativa.

Dalla definizione di prodotto si deduce subito quella di potenza di un'operazione lineare, e dalla proprietà associativa risulta la *legge degli indici*

$$A^m A^n = A^{m+n},$$

onde la interpretazione dell'esponente *uno*, dell'esponente *zero* e dell'esponente intero negativo: sarà $A^1 = A$, A^0 rappresenta l'operazione identica, A^{-m} è l'inversa di A^m.

11. — a) Sia data in $\mathcal{S}$ una successione di operazioni lineari

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, \tag{1}$$

e per un elemento α di $\mathcal{S}$ le $A_n(\alpha)$ tendano ad un limite β pure appartenente ad $\mathcal{S}$. Scriveremo

$$\lim_{n=\infty} A_n(\alpha) = \beta; \tag{2}$$

per quanto è stabilito al § 5 s'intende con ciò che la convergenza al limite β sia uniforme rispetto ad x in tutto l'intervallo J. Gli elementi α di $\mathcal{S}$ per i quali è soddisfatta una relazione della forma (2), cioè per i quali la $A_n(\alpha)$ ammette limite, formano un insieme $\mathcal{S}_1$ contenuto in $\mathcal{S}$, ed evidentemente lineare; l'elemento β limite di

$A_n(\alpha)$ si può riguardare come ottenuto da α mediante un'operazione $L = \lim_{n=\infty} A_n$, valida in $\mathcal{S}_1$ ed evidentemente distributiva.

b) La successione (1) converge *uniformemente per un intorno di* α se, preso un numero positivo arbitrario e, esistono due numeri positivi $\bar{n}$, g, tali che, per ogni $n > \bar{n}$ e per ogni elemento α' di $\mathcal{S}_1$ soddisfacente alla condizione $|\alpha' - \alpha| < g$, sia

$$|L(\alpha') - A_n(\alpha')| < e.$$

12. — Le A_n si diranno *egualmente continue* se, preso e positivo arbitrario, esiste un numero positivo g tale che, per $|\alpha| < g$ e per qualunque n, sia $|A_n(\alpha)| < e$.

13. — *Se* $\mathcal{S}_1$ *è denso, e la* (1) *converge uniformemente in un intorno di ogni elemento* α *di* $\mathcal{S}_1$, L *è un'operazione lineare in* $\mathcal{S}_1$.

La L è operazione distributiva; basta mostrare che è continua. Ora, la differenza $L(\alpha) - L(\alpha')$ può scriversi:

$$L(\alpha) - A_n(\alpha) + A_n(\alpha') - L(\alpha') + A_n(\alpha) - A_n(\alpha')$$

onde

$$(3) \qquad |L(\alpha) - L(\alpha')| \leq |L(\alpha) - A_n(\alpha)| + |L(\alpha') - A_n(\alpha')| + \\ + |A_n(\alpha) - A_n(\alpha')|.$$

Si scelga un numero positivo arbitrario e. Preso un elemento α in $\mathcal{S}_1$, per le ipotesi esistono due numeri n_1 e g tali che, per un α' di $\mathcal{S}_1$ tale che sia $|\alpha - \alpha'| < g$ e per $n > \bar{n}$, sia

$$|L(\alpha) - A_n(\alpha)| < e/3, \qquad |L(\alpha') - A_n(\alpha')| < e/3.$$

Fissato il valore n, poichè A è continua, esiste un intorno (g') di α tale che per ogni α'' contenuta in quest'intorno, sia

$$|A_n(\alpha) - A(\alpha'')| < e/3.$$

Ma $\mathcal{S}_1$ essendo denso, si può prendere α' in $\mathcal{S}_1$ tale che sia ad un tempo in (g) ed in (g_1), e sarà allora, per la (3),

$$|L(\alpha) - L(\alpha')| < e.$$

Con ciò è dimostrato che L è continua, ed è pertanto un'operazione lineare.

14. — Se le A_n sono egualmente continue, lo spazio $\mathcal{S}_1$ è denso, e la (1) converge uniformemente in un intorno di ogni α di $\mathcal{S}_1$ (¹).

Essendo e un numero positivo arbitrario, esiste, per l'eguale continuità, un numero g tale che, per $|\alpha-\alpha'| < g$, è $|A_n(\alpha')-A_n(\alpha)| < e/3$ qualunque sia n. Sia ora α un elemento di $\mathcal{S}_1$; le $A_n(\alpha)$ avendo limite, vi sarà un $\bar{n}$ tale che, per $n > \bar{n}$ e per ogni intero r, sia in tutto J:

$$|A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)| < e/3.$$

Si consideri un elemento α' di $\mathcal{S}$ per il quale sia

$$|\alpha' - \alpha| < g \tag{4}$$

e si formi

$$A_{n+r}(\alpha') - A_n(\alpha') = A_{n+r}(\alpha') - A_{n+r}(\alpha) + \\ + A_n(\alpha) - A_n(\alpha') + A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha).$$

Ne viene:

$$|A_{n+r}(\alpha') - A_n(\alpha')| \leq |A_{n+r}(\alpha') - A_{n+r}(\alpha)| + \\ + |A_n(\alpha') - A_n(\alpha)| + |A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)|.$$

Qui, per la (4), in seguito alla eguale continuità delle A_n, i due primi valori assoluti del secondo membro sono entrambi minori di $e/3$; per la scelta di $\bar{n}$, è minore di $e/3$ il terzo valore assoluto, onde è, per $n > \bar{n}$ e per qualunque r,

$$|A_{n+r}(\alpha') - A_n(\alpha')| < e.$$

(¹) (*R.*) Questo enunciato va modificato così: *Se le A_n sono egualmente continue ed $\mathcal{S}_1$ è denso, la* (1) *converge uniformemente in ogni elemento α di $\mathcal{S}_1$.*

Tale modifica è stata apportata dal PINCHERLE nella Nota n. **34** [**155**] di questo stesso Volume. In detta Nota si afferma anche che il seguito della presente Memoria non subisce con ciò alcun mutamento.

Ne risulta anzitutto che α' appartiene ad $\mathcal{S}_1$, il quale è pertanto denso; inoltre, ne viene ancora che la (1) converge uniformemente in tutto l'intorno (g) di α.

15. — Se le A_n sono uniformemente convergenti in un intorno di ogni α di $\mathcal{S}_1$, e se $\mathcal{S}_1$ si suppone denso, le A sono egualmente continue.

Vi sia la convergenza uniforme per ogni α. Preso e positivo arbitrario, gli corrispondono dunque due numeri positivi g, $\overline{m}$ tali che, per ogni α' di $\mathcal{S}_1$ con $|\alpha - \alpha'| < g$ e per ogni $n > \overline{m}$, sia

$$|A_n(\alpha') - A_{n+r}(\alpha')| < e/3.$$

Ora è

$$|A_{n+r}(\alpha) - A_{n+r}(\alpha')| \leq |A_n(\alpha') - A_{n+r}(\alpha')| + \\ + |A_n(\alpha) - A_{n+r}(\alpha)| + |A_n(\alpha) - A_n(\alpha')|.$$

Ciò posto, si fissi $n > \overline{m}$. Essendo A_n continua, vi è un numero positivo g' tale che, per $|\alpha - \alpha'| < g'$, sia $|A_n(\alpha) - A_n(\alpha')| < e/3$.

Preso dunque α' nel più piccolo dei due intorni (g) e (g') di α, si ha pertanto

$$|A_{n+r}(\alpha) - A_{n+r}(\alpha')| < e$$

per $r = 1, 2, \ldots$. Ma, n essendo stato fissato, per ognuna delle A_1, A_2, ..., A_{n-1} vi è un intorno di α, rispettivamente (g_1), (g_2), ..., (g_{n-1}), tale che, per α in g_i, sia

$$|A_i(\alpha') - A_i(\alpha)| < e \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Preso pertanto il minimo fra gli intorni (g), (g'), (g_i) $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, in questo intorno minimo è $|A_n(\alpha') - A_n(\alpha)| < e$ per tutti i valori di n. Le $A_n(\alpha)$ sono dunque egualmente continue.

Dalla proposizione del §14 e da quella del §13 segue che *se le A_n sono egualmente continue, la L è una operazione lineare.*

16. — *Se le A_n sono egualmente continue, lo spazio $\mathcal{S}_1$ è chiuso.*

Ciò significa che se una successione

$$(5) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

di elementi di $\mathcal{S}_1$ tende al limite γ, esiste in $\mathcal{S}_1$ il limite di $A_n(\gamma)$

per $n = \infty$. Per dimostrare ciò, scelto un numero positivo e, assegnamo il numero positivo g che, per l'eguale continuità, rende, qualunque sia n, $|A_n(\sigma)| < e/3$ se è $|\sigma| < g$. Nella successione (5) scegliamo ora una α_p tale che sia, in tutto J,

$$|\alpha_p - \gamma| < g.$$

Considerata allora la differenza

$$A_{n+r}(\gamma) - A_n(\gamma),$$

essa si può scrivere:

$$\{A_{n+r}(\gamma) - A_{n+r}(\alpha_p)\} + \{A_n(\alpha_p) - A_n(\gamma)\} + \{A_{n+r}(\gamma_p) - A_n(\alpha_p)\}.$$

Qui i valori assoluti delle due prime parentesi sono entrambi inferiori ad $e/3$, qualunque sia n; si scelga poi n tale che la terza parentesi risulti, per ogni r, inferiore ad $e/3$, il che è possibile poichè α_p appartiene ad $\mathcal{S}_1$; risulterà

$$|A_{n+r}(\gamma) - A_n(\gamma)| < e,$$

cioè γ appartiene ad $\mathcal{S}_1$.

17. — Se α appartiene ad $\mathcal{S}_1$, non ne viene in generale che vi appartenga $A_n(\alpha)$. Ciò accade però se le $A_1, A_2, \ldots$ sono operazioni fra loro permutabili. Infatti, essendo A_p un'operazione qualunque della successione (1), è in tale ipotesi

$$A_{n+r} A_p(\alpha) - A_n A_p(\alpha) = A_p\{A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)\};$$

essendo e un numero positivo arbitrario, sia g il numero tale che per $|\sigma| < g$ è $|A_p(\sigma)| < e$; basterà fare $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ sia

$$|A_{n+r}(\alpha) - A_n(\alpha)| < g,$$

perchè ne risulti

$$|A_{n+r} A_p(\alpha) - A_n A_p(\alpha)| < e,$$

e con ciò si vede che $A_p(\alpha)$ appartiene ad $\mathcal{S}_1$.

Da queste e dal § 16 risulta che *se le A_n sono permutabili ed α è un elemento di $\mathcal{S}_1$, anche $L(\alpha)$ è elemento di $\mathcal{S}_1$, qualora le A_n siano egualmente continue.*

18. — Delle cose dette nei §§ precedenti facendo l'applicazione alle serie di operazioni [1], si ha:

a) Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, uniformemente convergente in un intorno di ogni elemento di uno spazio denso $\mathcal{S}_1$ (§ **11**), rappresenta in $\mathcal{S}_1$ una operazione lineare.

b) Se le somme parziali della serie sono egualmente continue, lo spazio in cui converge la serie è denso, e la serie vi converge uniformemente in un intorno di ogni elemento dello spazio stesso.

c) Se la serie ΣA_n è convergente e B è una operazione lineare, anche ΣBA_n è convergente ed è

$$B(\Sigma A_n) = \Sigma BA_n.$$

d) Se la serie ΣA_n converge per l'elemento α e le A_n sono permutabili, la serie è convergente per ognuno degli elementi $A_p(\alpha)$ $(p = 1, 2, 3, ...)$.

II.

19. — Sia A un'operazione funzionale lineare data per uno spazio fnnzionale $\mathcal{S}$. La serie di operazioni

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n \tag{1}$$

rappresenta, per gli elementi α di $\mathcal{S}$ per i quali converge, un'operazione distributiva; se consideriamo uno spazio denso di elementi α in cui la R converga uniformemente nell'intorno di ogni elemento, essa rappresenterà in codesto spazio un'operazione lineare (§ **13**). È appena necessario ricordare che se per un valore $\overline{k}$ del *parametro* k la (1) converge, essa converge (assolutamente, ed uniformemente rispetto a k) per tutti i valori di k tali che sia $|k| < |\overline{k}|$.

Detto $\mathcal{S}_1$ l'insieme degli elementi per i quali (1) converge, se α è un elemento di $\mathcal{S}_1$, convergerà anche la

$$AR = \Sigma k^{n-1} A^{n+1}; \tag{2}$$

---

[1] Dicendo che la serie di operazioni $\sum A_n$ converge per un elemento α di $\mathcal{S}$ si intende, conformemente a quanto si è stabilito al § **5**, che essa converge uniformemente rispetto ad x in tutto l'intervallo J.

ne risulta che A ed R sono permutabili, e che $A(\alpha)$, $A^2(\alpha), \ldots$ appartengono pure ad $\mathcal{S}_1$ [§ 18, c), d)]. Per tali elementi α si ha dunque

$$R(\alpha) - kAR(\alpha) = A(\alpha).$$

Ad una operazione R che soddisfi alla relazione precedente si dà il nome di *risolvente di Fredholm dell'operazione* A. La ragione di questa denominazione sta in ciò: se si ha l'equazione funzionale

$$\varphi - kA(\varphi) = \alpha, \tag{3}$$

in cui α è un elemento dato e φ un elemento incognito (detta *equazione di Fredholm* nel caso, maggiormente studiato, in cui A sia un'operazione integrale) e se α appartiene ad $\mathcal{S}_1$, la soluzione ne è data da

$$\varphi = \alpha + k\,R(\alpha), \tag{4}$$

come si verifica immediatamente.

20. — Non si può dire molto di più sulla natura delle operazioni lineari, sulle ripartizioni che esse producono nello spazio su cui operano e sulla risoluzione delle equazioni funzionali in cui esse figurano, se non si specificano maggiormente, mediante opportune limitazioni [1]. In questo lavoro vogliamo mostrare, in particolare, come l'assunzione di speciali ipotesi circa la natura della risolvente R, riguardata come funzione analitica del parametro k, permetta di giungere a notevoli conclusioni circa la classificazione delle operazioni lineari.

Fra le ipotesi alle quali accenniamo, ha particolare importanza quella che le singolarità della R, in quanto è funzione analitica di k, siano indipendenti per posizione e per natura dalla scelta dell'elemento α su cui si opera e dai valori della variabile x: se, a prima vista, questa ipotesi può sembrare troppo restrittiva ed arbitraria,

---

[1] Fondandomi su considerazioni alquanto diverse da quelle che ispirano il presente lavoro, ho già indicata una di queste limitazioni, che permette di trattare, in modo astratto, un caso particolare comprendente le operazioni integrali lineari regolari (o di FREDHOLM). (Vedasi la Memoria dell'« Accad. delle Scienze di Bologna, S. VI, T. III, 1906, p. 143 ».) (*R.*) Tale Memoria è il lavoro n. **27** [**129**] del presente Volume.

la sua considerazione viene però giustificata dal fatto che essa si è trovata verificata nei casi più notevoli studiati fin qui e nelle ricerche che ora si proseguono sulle equazioni integrali (1).

III.

21. — Come primo caso nell'accennato ordine di idee, ci proponiamo di studiare il seguente:

L'operazione lineare non degenere A, data in un $\mathcal{S}$, ha una risolvente R che, per ogni α di $\mathcal{S}$,

1⁰) è trascendente intera rispetto al parametro k;

2⁰) come funzione di x, è convergente uniformemente in J;

3⁰) come operazione, è uniformemente convergente [§ **11**, b)] per un'intorno di ogni elemento α.

Come si è visto, la terza di queste ipotesi significa che, preso il numero positivo e arbitrario, esistono per ogni $\bar{\alpha}$ di $\mathcal{S}$ due numeri positivi g, $\bar{m}$ tali che, per tutte le α con $|\alpha - \bar{\alpha}| < g$ (inclusavi $\bar{\alpha}$ stessa) e per $m > \bar{m}$, sia

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} k^{n-1} A^n(\alpha) \right| < e.$$

Ne risulta che, preso un numero positivo s arbitrariamente grande, esiste un numero c tale che, per tutti i valori di m e per gli ele-

(1) Non è però da tacere come in casi, anche assai semplici, di operazioni distributive non si verifichino tali ipotesi. Ad esempio, l'operazione che consiste nella semplice moltiplicazione dell'elemento arbitrario $\alpha(x)$ per una funzione fissa $\eta(x)$, ha per risolvente

$$R(\alpha) = \frac{\alpha(x)\, \eta(x)}{1 - k\, \eta(x)},$$

le cui singolarità, come funzione analitica di k, sono indipendenti da α ma dipendono da x; mentre l'operazione di derivazione, applicata alle funzioni della forma $\alpha(x) = e^{cx}$, ha per risolvente

$$R(\alpha) = \frac{c\, \alpha(x)}{1 - k c},$$

le cui singolarità sono indipendenti da x, ma dipendenti da c, cioè dall'elemento funzionale α.

menti α tali che $|\alpha - \overline{\alpha}| < g$, si ha:

$$|A^m(\alpha)| < c/s^m\,; \tag{1}$$

ossia adoperando un termine già altre volte usato, si può dire che per ogni α la successione $A^m(\alpha)$ è *ologena.*

Inversamente, se si suppone che la A verifichi la (1), ne segue che la risolvente R è trascendente intera in k e che essa converge uniformemente per un intorno di ogni elemento di $\mathcal{S}$.

Le operazioni che soddisfano alle condizioni enunciate in principio di questo §, o alla equivalente proprietà (1), si diranno *operazioni del tipo di Volterra* o semplicemente *operazioni di tipo* V.

Per queste operazioni lo spazio $\mathcal{S}_1$, indicato al § 19, coincide con $\mathcal{S}$.

22. — Risulta immediatamente dalla (1) che ogni elemento $A(\alpha)$ appartiene ad $\mathcal{S}$; si verifica pure senz'altro che vi appartiene anche $R(\alpha)$.

L'equazione funzionale, in φ,

$$\varphi - k\,A(\varphi) = \alpha \tag{2}$$

ha, per qualsiasi valore di k e per qualsivoglia elemento α di $\mathcal{S}$, una soluzione espressa da

$$\varphi = \alpha + k\,R(\alpha) \tag{3}$$

appartenente pure ad $\mathcal{S}$; in questa formula, R essendo la risolvente,

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n, \tag{4}$$

si ha per φ l'espressione:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(\alpha). \tag{5}$$

Questa soluzione è unica. Se infatti l'equazione (2) ammettesse una seconda soluzione φ', posto $\varphi' - \varphi = \omega$, si avrebbe un elemento ω (*elemento invariante* di A relativo al numero k) tale che

$$\omega = k\,A(\omega),$$

onde

$$A^n(\omega) = \omega / k^n,$$

che è in contraddizione con la (1). Possiamo quindi notare che le operazioni di tipo V non ammettono elementi invarianti per alcun valore finito del parametro k.

23. — La proprietà (1), che caratterizza le operazioni del tipo V, permette di stabilire, per sistemi di un numero arbitrario di simili operazioni fra loro permutabili, un calcolo di una singolare semplicità, generalità ed efficacia. Questo calcolo è stato sviluppato dal VOLTERRA, in alcune recenti Note [1], per le operazioni date sotto forma di « operazioni integrali fra limiti variabili » nel caso della loro permutabilità. Le proposizioni date dal VOLTERRA per le operazioni integrali, sono qui considerate nel caso generale astratto di operazioni lineari che abbiano la proprietà (1).

24. — Si consideri dapprima una serie di potenze di una variabile z, soggetta alla sola condizione di non essere sempre divergente (di avere un raggio di convergenza non nullo); sia essa

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{6}$$

Si costruisca un simbolo operatorio sostituendo nella (6), al posto di z, il simbolo A rappresentante un'operazione di tipo V; si ottiene così:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n. \tag{7}$$

In forza della (1), la serie (7) risulta assolutamente ed uniformemente convergente in J, e uniformemente convergente in un intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$; essa rappresenta pertanto (§ 13) una operazione lineare applicabile a tutto $\mathcal{S}$, ed è inoltre permutabile con A. Si verifica immediatamente che $P(\alpha)$ appartiene ad $\mathcal{S}$.

25. — Se nella serie (6) è nullo il coefficiente c_0, la operazione P è del tipo V.

---

[1] Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 20 febbraio, 3 e 17 aprile, 1910.

Si ponga infatti

$$p(z) = z\,q(z) = z \cdot (c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + \dots);$$

facendone la potenza r^{sima}, viene

$$p^r(z) = z^r q^r(z) = z^r \cdot (c_{r0} + c_{r1} z + c_{r2} z^2 + \dots)$$

convergente nello stesso cerchio di $p(z)$. Sia t un numero positivo inferiore al raggio di convergenza di $p(z)$, e sia h il massimo valore assoluto di $p(z)$ per $|z| \leq t$.

Preso un numero s grande a piacere, si determini un s_1 tale che sia ad un tempo

$$\frac{s_1}{h} > s, \qquad s_1 t > s; \tag{8}$$

allora, per le ipotesi fatte su A, preso un $\bar{\alpha}$ in S, esisterà un numero c tale che, per ogni m e per ogni α in un intorno di $\bar{\alpha}$, sarà

$$|A^m(\alpha)| < c/s_1^m. \tag{9}$$

Ciò posto, le regole formali di moltiplicazione delle serie di potenze di P essendo le stesse di quelle delle serie di potenze di una variabile, si avrà

$$P^r(\alpha) = c_{r0} A^r + c_{r1} A^{r+1} + c_{r2} A^{r+2} + \dots.$$

Ora, essendo

$$|c_{rn}| \leq h^r/t^n,$$

avremo, per le (9),

$$|P^r(\alpha)| \leq c\,h^r \cdot \left(\frac{1}{s_1^r} + \frac{h}{t\,s_1^{r+1}} + \frac{h^2}{t^2 s_1^{r+2}} + \dots\right),$$

o, tenuto conto delle (8),

$$|P^r(\alpha)| < c \cdot \left(\frac{1}{s^r} + \frac{1}{s^{r+1}} + \dots\right) = \frac{c}{s^r}\,\frac{s}{s-1}.$$

Esiste dunque un numero

$$c' = \frac{c\,s}{s-1}$$

tale che, per tutto l'intorno considerato di $\overline{\alpha}$, sia

$$|P^r(\alpha)| < c'/s^r\,;$$

la P soddisfa dunque alla (1), ed è pertanto del tipo V.

26. — Se due operazioni A, B permutabili sono del tipo V, è tale anche il loro prodotto.

Si consideri l'elemento di $\mathcal{S}$ rappresentato da

$$\beta = \alpha + s\,B(\alpha) + s^2\,B^2(\alpha) + \dots \quad ,$$

essendo s un numero positivo grande a piacere. Essendo s' pure positivo arbitrario, esiste un numero c tale che per ogni m sia

$$|A^m\,(\beta)| < c/s'^m\,,$$

ossia

$$|A^m\,(\alpha) + s\,A^m\,(\alpha) + s^2\,A^m\,B^2\,(\alpha) + \dots| < c/s'^m\,.$$

Ne viene, per una nota proprietà delle serie di potenze,

$$|A^m\,B^n\,(\alpha)| < c/(s^n\,s'^m). \tag{10}$$

Se in particolare si fa $s = s'$, $m = n$, viene, poichè A e B sono permutabili,

$$|(A\,B)^m\,(\alpha)| < c/s^{m+m} \tag{11}$$

e, questa diseguaglianza valendo in tutto un intorno di α, la AB verifica la (1) ed è quindi del tipo V.

27. — Estendendo ora quanto è stato detto al § 24, consideriamo una serie di potenze, di più variabili $z_1, z_2, \dots, z_q$,

$$p\,(z_1, z_2, \dots, z_q) = \Sigma_{n_1}\,\Sigma_{n_2} \dots \Sigma_{n_q}\,c_{n_1, n_2,\, \dots\,,\, n_q}\,z_1^{n_1}\,z_2^{n_2} \dots z_q^{n_q}\,, \tag{12}$$

la quale non sia sempre divergente; consideriamo poi un sistema di

q operazioni del tipo V, fra loro permutabili: siano esse $A_1, A_2, \dots, A_q$. Si costruisca il simbolo operatorio

$$(13) \qquad P(A_1, A_2, \dots, A_q) = \Sigma_{n_1} \Sigma_{n_2} \dots \Sigma_{n_q} c_{n_1,n_2, \dots, n_q} A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots A_q^{n_q};$$

in forza della proprietà (1), alla quale soddisfano le A_i, e della proposizione del § precedente, la serie del secondo membro di (13) risulta assolutamente ed uniformente convergente in un intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$; essa rappresenta quindi, in $\mathcal{S}$, un'operazione lineare, permutabile con ciascuna delle $A_1, A_2, \dots, A_q$.

28. — Se nella serie (12) il coefficiente $c_{00\dots0}$ è nullo, l'operazione P è pure del tipo V.

Per semplicità, dimostreremo questa proposizione nel caso di $q = 2$: salvo le maggiori complicazioni di scrittura, la dimostrazione si estende senza difficoltà al caso di q qualunque. Sia dunque

$$p(z, u) = \sum_{m,n} c_{m,n} z^m u^n \qquad (c_{0,0} = 0)$$

una serie di potenze non sempre divergente, e si costruisca, con le operazioni A e B, permutabili e di tipo V, l'operazione

$$P(A, B) = \sum_{m,n} c_{m,n} A^m B^n.$$

La $p(z, u)$ non essendo sempre divergente, si possono assegnare (ed in infiniti modi) due cerchi aventi i centri nell'origine, l'uno nel piano z, l'altro nel piano u, e tali che la serie converga per ogni coppia (z, u) interna ai cerchi medesimi. Si prenda un numero positivo t, dove il punto indice t sia interno ad entrambi i cerchi; la serie sarà convergente per i valori $|z| < t$, $|u| \leq t$, e sia h il massimo valore assoluto di $p(z, u)$ per tali valori. Si formi ora la potenza r^{sima} (r intero positivo) di $p(z, u)$; ordinando per le potenze di z, u, verrà:

$$(14) \qquad p^r(z, u) = \sum_{m,n} c_{m,n}^{(r)} z^m u^n,$$

e sarà, per una nota proposizione,

$$(15) \qquad |c_{m,n}^{(r)}| \leq h^r / t^{m+n}.$$

D'altra parte, la potenza r^{sima} dell'operazione P si ottiene con le stesse regole formali della p^r, e si ha:

$$P^r(A, B) = \sum_{m,n} c^{(r)}_{m,n} A^m B^n. \tag{16}$$

Si noti infine che nella (14) e nella (16) i coefficienti $c^{(r)}_{m,n}$ sono tali che è $m + n \geq r$.

Ciò posto, scelto un numero s grande a piacere, si prenda un s_1 tale che sia

$$s_1 = s\,k \qquad (k > 1); \tag{17}$$

indi si prenda s_2 positivo abbastanza grande perchè sia ad un tempo:

$$t\,s_2 > s_1, \qquad ts_2/h > s_1. \tag{18}$$

In virtù della (10), c essendo opportunamente scelto, per ogni coppia m, n e per un intorno di ogni elemento α, è

$$|A^m B^n| < c/s_2^{m+n},$$

onde, per la (15),

$$|c^{(r)}_{m,n} A^m B^n| < ch^r/(s_2\,t)^{m+n},$$

ed essendo $m + n \geq r$ si avrà, per le (18),

$$|c^{(r)}_{m,n} A^m B^n| < c/s_1^{m+n}.$$

Da ciò segue che, poichè lo sviluppo (16) contiene termini omogenei di grado r, poi di grado $r + 1$, di grado $r + 2, \ldots$ in A e B, sarà

$$|P^r(A, B)| < \frac{c}{s_1^r}\left(r + 1 + \frac{r+2}{s} + \frac{r+3}{s^2} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{(r+1)\,c}{s_1^r}\left(1 + \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2} + \ldots\right) = \frac{(r+1)\,c}{s_1^r\,\{1-(1/s_1)\}^2}\,.$$

Posto $\dfrac{c}{\{1-(1/s_1)\}^2} = c'$, e tenuto conto della (17), viene:

$$|P^r(A, B)| < \frac{(r+1)\,c'}{s^r\,k^r};$$

ma poichè $(r + 1)/k^r$ tende a zero per $r = \infty$, così si può assegnare un numero c'' tale che per ogni valore di r sia

$$|P^r(A, B)| < c''/s^r.$$

La P appartiene dunque al tipo V. Si verifica immediatamente che $P^r(A, B)$, applicata ad α, dà un elemento di $\mathcal{S}$, e che l'operazione P è permutabile con A e B.

29. — Dato in uno spazio funzionale lineare $\mathcal{S}$ un sistema di operazioni di tipo V, fra loro permutabili, $A_1, A_2, \dots, A_p$, si possono dunque dedurne infinite espressioni operative mediante la sostituzione di $A_1, A_2, \dots, A_p$ in serie di potenze arbitrariamente prese di p variabili, soggette alla sola condizione di non essere sempre divergenti e di avere uguale a zero il termine indipendente dalle variabili. Reiterando indefinitamente il processo indicato, si ottiene un insieme (V) di operazioni, avente la potenza del continuo: tutte le operazioni del sistema sono definite, lineari in $\mathcal{S}$, appartenenti al tipo V, permutabili colle operazioni $A_1, A_2, \dots, A_p$ e permutabili fra loro. Per questo insieme (V) valgono le considerazioni fatte dal VOLTERRA per il caso delle operazioni integrali fra limiti variabili permutabili fra loro [1], considerazioni che permettono la risoluzione di infinite classi di equazioni integrali. Quando le considerazioni si vogliano estendere al caso di operazioni lineari qualunque di tipo V, per le quali non si presupponga alcuna rappresentazione integrale, converrà prendere le mosse da un'equazione

$$p(z_1, z_2, \dots, z_r, u) = 0, \tag{19}$$

dove il primo membro è una serie di potenze delle $z_1, z_2, \dots, z_r, u$; supposto che il punto $z_1 = z_2 = \dots = z_r = 0$ non sia punto critico per la u definita da (19) come funzione implicita di $z_1, z_2, \dots, z_r$. Se ne ricaverà nel modo noto

$$u = \sum_{n_1, \dots, n_r} c'_{n_1, n_2, \dots, n_r} \; z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r} \qquad (c'_{0, \dots, 0} = 0), \tag{20}$$

dove lo sviluppo sarà convergente in un intorno del punto $(z_1, z_2, \dots, z_r) = (0, 0, \dots, 0)$. Sostituendo ora nella (19), al posto di $z_1, z_2, \dots, z_r$ le

[1] Vedasi il § 4 della Nota in «Rendic. della R. Accad. dei Lincei, 20 febbraio 1910».

$A_1, A_2, \ldots, A_r$, e ponendo al posto di u un simbolo operatorio U, si avrà un'equazione

(21) $$p(A_1, A_2, \ldots, A_r, U) = 0,$$

equazione che si potrebbe dire *operazionale* rispetto ad U, poichè è equazione funzionale solo quando si intenda fissato l'elemento α al quale è applicato il sistema delle A. Questa è risoluta non solo formalmente, ma effettivamente in tutto lo spazio $\mathcal{S}$, da

$$U = \Sigma\, c'_{n_1, n_2, \ldots, n_r}\, A_1^{n_1} A_2^{n_2} \ldots A_r^{n_r},$$

che è operazione del tipo V.

30. — Come caso particolare, sia un'operazione di tipo V, permutabile con A, della forma

$$P = c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \ldots .$$

Nell'ipotesi che sia $c_1 \neq 0$, si calcoli la serie inversa di

$$u = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$$

con uno qualunque dei noti metodi che si hanno per il *ritorno* delle serie di potenze. Ne verrà

$$z = c'_1 u + c'_2 u^2 + c'_3 u^3 + \ldots;$$

pertanto, l'operazione A sarà espressa, in funzione di P, da

$$A = c'_1 P + c'_2 P^2 + c'_3 P^3 + \ldots .$$

Sui sistemi (V) di operazioni si presentano questioni varie ed interessanti, che però non è qui il luogo di considerare: accenniamo, fra queste, al problema [che il VOLTERRA dice *fondamentale* nel suo studio sulle operazioni integrali permutabili [1]] della ricerca di tutte le operazioni di tipo V permutabili con una data, e alla discussione della polidromia alla quale dànno luogo le equazioni della forma (21) nel caso in cui il punto $z_1 = z_2 = \ldots = z_r = 0$ sia critico per la u definita dalla equazione (19).

---

[1] Nota citata, del 20 febbraio 1910.

IV.

31. — Considereremo, sempre in astratto, un secondo tipo di operazioni lineari non degeneri. Esse saranno quelle per le quali « la risolvente R, in quanto dipende dal parametro k, è funzione meromorfa di questo parametro, a poli fissi, e in quanto è operazione sugli elementi α di $\mathcal{S}$, è tale che lo sviluppo in serie di potenze di $k - k_0$ che la rappresenta nell'intorno di un valore k_0, di k, che non sia un polo, converge uniformemente nell'intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$ ». Come è avvertito al § 5, è sottintesa la convergenza uniforme rispetto ad x in tutto l'intervallo J.

Le operazioni che ammettono una tale risolvente verranno dette *operazioni del tipo di Fredholm,* o, per brevità, *operazioni di tipo* F.

32. - 33. — Cominceremo dall'esame di un caso particolare molto semplice, ma altrettanto istruttivo. L'operazione A, data in $\mathcal{S}$ e priva di zeri, ammetta come risolvente una operazione R la quale, come funzione del parametro k, sia uniforme con un solo polo fisso (indipendente da α e da x), di primo ordine, $k = k_1$, oltre al punto singolare essenziale $k = \infty$. La R può pertanto scriversi:

$$R(\alpha) = \frac{B(\alpha)}{k_1 - k} + G(\alpha; k), \tag{1}$$

dove $G(\alpha; k)$, in quanto dipende dal parametro, è funzione intera, definita da uno sviluppo in serie

$$G(\alpha; k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\alpha)\, k^n \tag{2}$$

convergente in tutto il piano del parametro k; in quanto sono operazioni applicabili agli elementi di $\mathcal{S}$, la B, la G e le G_n sono distributive, e la serie (2) viene infine supposta uniformemente convergente in un intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$.

Queste ipotesi permettono di dedurre proprietà notevoli per l'operazione A.

a) Sappiamo dal § 19 che per $|k| < |k_1|$, la $R(\alpha)$ è rappresentata dallo sviluppo in serie

$$R(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n(\alpha); \tag{3}$$

dal confronto con (1) segue

(4) $$A(\alpha) = \frac{B(\alpha)}{k_1} + G_0(\alpha),$$

e in generale

(4′) $$A^n(\alpha) = \frac{B(\alpha)}{k_1^n} + G_{n-1}(\alpha) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

D'altra parte, essendo per definizione (§ 19)

$$R - kAR = A,$$

viene, per la (1),

$$B - kAB = (k_1 - k)(A - G + kAG),$$

onde, passando al limite per $k = k_1$,

(5) $$B = k_1 AB.$$

Prendendo dunque sui due membri della (4) l'operazione A^{n-1} e tenendo conto della (5), il confronto con la (4′) ci dà

$$G_{n-1} = A^{n-1} G_0,$$

e pertanto

(6) $$G(\alpha; k) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n G_0(\alpha).$$

La successione $A^{n-1}G_0$ è dunque ologena, cioè l'operazione A applicata agli elementi $G_0(\alpha)$ è del tipo V. Talchè:

Se l'operazione A ammette una risolvente della forma (1), *gli elementi $B(\alpha)$ sono invarianti di A relativi al numero k_1, e gli elementi $G_0(\alpha)$ sono tali che, per essi, l'operazione A è del tipo* V.

b) Vediamo sotto quali condizioni un elemento η di $\mathcal{S}$ possa essere invariante per A. Dovrà aversi, se l'elemento è invariante rispetto al numero h,

$$\eta = h\, A(\eta),$$

onde

$$A^n(\eta) = \eta / h^n$$

e quindi, per $|k|$ inferiore al più piccolo dei due numeri $|k_1|$ ed $|h|$, da (3) si ha:

$$R(\eta) = \eta / (h - k).$$

Ma dal confronto con (1) risulta, per il principio di identità delle funzioni analitiche,

$$h = k_1, \qquad B(\eta) = \eta, \qquad G(\eta; k) = 0,$$

l'ultima delle quali equivale a

$$G_0(\eta) = 0. \tag{7}$$

Se ne conclude che *l'operazione A non può avere invarianti se non relativi al numero k_1; per questi, l'operazione B coincide con l'operazione identica; infine questi invarianti sono radici della operazione G_0.*

c) Vediamo ora sotto quali condizioni l'operazione A possa essere di tipo V per un elemento σ. Se è tale, $A^n(\sigma)$ è successione ologena e quindi la (3) è funzione intera in k. Dal confronto con (1), e dal citato principio d'identità, segue dunque:

$$B(\sigma) = 0, \qquad R(\sigma) = G(\sigma; k). \tag{8}$$

d) Indichiamo con $\mathcal{I}$ l'insieme degli elementi invarianti di A; con $\mathcal{S}_1$ l'insieme degli elementi pei quali A è del tipo V. Evidentemente, tanto $\mathcal{I}$ quanto $\mathcal{S}_1$ sono spazi lineari. Dalla conclusione di a), e dalle (7) ed (8), risulta: *Essendo α un elemento qualsiasi di $\mathcal{S}$, l'elemento $B(\alpha)$ appartiene ad $\mathcal{I}$, l'elemento $G_0(\alpha)$ appartiene ad $\mathcal{S}_1$; $\mathcal{I}$ è spazio di radici* (1) *per l'operazione G_0, e $\mathcal{S}_1$ è spazio di radici per l'operazione B.*

e) *Gli spazi $\mathcal{I}$ ed $\mathcal{S}_1$ non hanno elementi comuni.* Infatti, se α appartiene ad $\mathcal{I}$, è

$$A^n(\alpha) = \alpha / k_1^n;$$

se α appartiene ad $\mathcal{S}_1$ la successione $A^n(\alpha)$ è ologena, e queste due illazioni si contraddicono.

f) Tanto lo spazio $\mathcal{I}$ quanto lo spazio $\mathcal{S}_1$ rimangono invariati dall'applicazione dell'operazione A; infatti è chiaro che se α appartiene ad $\mathcal{I}$, vi appartiene anche $A(\alpha)$, e che se α appartiene ad $\mathcal{S}_1$ vi appartiene anche $A(\alpha)$.

---

(1) PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive*, Zanichelli, Bologna 1901, (cfr. pag. 31).

g) *Ogni elemento α di $\mathcal{S}$ può, ed in un solo modo, decomporsi nella forma*

$$\alpha = \eta + \sigma, \tag{9}$$

dove η è elemento di $\mathcal{B}$ e σ elemento di $\mathcal{S}_1$.

Si ha infatti, da a), che $B(\alpha)$ è un elemento di $\mathcal{B}$; sia indicato con η. Dalla (4) si ha:

$$A(\alpha - \eta) = A(\alpha) - (\eta/k_1) = G_0(\alpha);$$

onde

$$A^n(\alpha - \eta) = A^{n-1}G_0(\alpha).$$

Il secondo membro è, per a), una successione ologena e quindi $\alpha - \eta$ è elemento di $\mathcal{S}_1$; lo si ponga eguale a σ, e la (9) è così dimostrata. La decomposizione è poi possibile in un solo modo, poichè in caso contrario si avrebbero elementi comuni ad $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{S}_1$, contro quanto si è veduto in e).

Mediante la decomposizione di $\mathcal{S}$ nella forma

$$\mathcal{S} = \mathcal{B} + \mathcal{S}_1,$$

quale risulta da quanto si è ora esposto, si può dire di avere ottenuta *la struttura* dello spazio $\mathcal{S}$ rispetto all'operazione A.

34. — Veniamo alla risoluzione di alcune equazioni funzionali relative all'operazione A.

a) Per l'equazione lineare di prima specie

$$A(\varphi) = \alpha, \tag{10}$$

dove α è funzione data in $\mathcal{S}$ e φ funzione incognita, o in altri termini, per la determinazione dell'operazione A^{-1} inversa di A, la risoluzione è subordinata a quella della stessa equazione nello spazio $\mathcal{S}_1$, cioè all'inversione di una operazione del tipo V. Se infatti si pone

$$\alpha = \eta + \sigma$$

viene

$$A^{-1}(\alpha) = k_1\eta + A^{-1}(\sigma),$$

che dimostra l'asserto. Non si può aggiungere di più, non potendosi dire nulla di generale sull'inversione delle operazioni di tipo V.

b) Per l'equazione di seconda specie

$$\varphi - k\,A(\varphi) = \alpha, \tag{11}$$

o equazione di FREDHOLM, dove α è data in $\mathcal{S}$ e φ è incognita, la soluzione, come risulta dal § 19, è data da

$$\varphi = \alpha + k\, R(\alpha) = \alpha + \frac{k\, B(\alpha)}{k_1 - k} + k\, G(\alpha; k)$$

per ogni valore di k, eccettuato $k = k_1$. Per il caso $k = k_1$ la soluzione φ, se esiste σ, potrà decomporsi [§ 33, g)] in

$$\varphi = \eta + \sigma,$$

η elemento di $\mathcal{B}$, σ elemento di $\mathcal{S}_1$; ora, sostituendo, viene

$$\eta + \sigma - k_1\, A(\eta + \sigma) = \sigma - k_1\, A(\sigma) = \alpha;$$

l'elemento dato α deve dunque appartenere ad $\mathcal{S}_1$. E questa condizione necessaria è anche sufficiente per la possibilità dell'equazione; infatti, se α appartiene ad $\mathcal{S}_1$, una soluzione è data da

$$\bar{\varphi} = \alpha + k_1\, G(\alpha; k_1),$$

e da questa soluzione particolare si deduce la soluzione generale $\bar{\varphi} + \eta$, dove η è un elemento arbitrario di $\mathcal{B}$.

35. — Le combinazioni per somma e moltiplicazione di operazioni permutabili della specie definita al § 32 sono soggette alle leggi del calcolo ordinario, e si possono risolvere formalmente quei problemi la cui soluzione sia riconducibile alla costruzione di una serie di potenze. Il procedimento da seguire è quello stesso indicato dal VOLTERRA, nelle Note citate, per le operazioni integrali e che abbiamo richiamato per le operazioni astratte di tipo V al § 29 di questo lavoro. Ma per la validità degli sviluppi ottenuti, è da notare una differenza essenziale col caso allora considerato; in quel caso infatti, se, partendo da una serie di potenze (per semplicità, di una sola variabile)

$$\Sigma\, c_n\, z^n$$

avente un raggio non nullo r di convergenza, se ne deduceva la

$$\Sigma\, c_n\, A^n, \tag{12}$$

questa godeva della convergenza, uniforme in J ed in un intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$, senza restrizioni; nel caso attuale invece, lo sviluppo (12) può venire usato con sicurezza solo quando sia $r > |k_1|$. A questa osservazione è subordinata la validità dei risultati ottenuti mediante l'accennato calcolo funzionale.

36. — Lasciando al Lettore la facile estensione dei risultati precedenti al caso delle operazioni A la cui risolvente sia della forma

$$R(\alpha) = F(\alpha; k) + G(\alpha; k),$$

dove F è, rispetto a k, una funzione razionale a poli fissi e G una funzione intera in k, passiamo ad abbozzare lo studio delle operazioni generali di tipo F, definite al § 31, in cui R è funzione meromorfa del parametro k. Supporremo, per semplicità, che i poli della detta funzione meromorfa siano del primo ordine; la complicazione maggiore che porterebbe il caso di poli di ordine qualunque dà luogo a difficoltà di forma che si superano con procedimenti ben noti, e che non toccano l'essenza della questione, specie dal punto di vista nel quale ci siamo posti.

La risolvente meromorfa R di A si ponga sotto la forma nota che le si può dare in base al classico teorema di MITTAG-LEFFLER. Essendo $k_1, k_2, \dots, k_\nu, \dots$ i poli della detta funzione, ordinati in modo che sia (k_1 differente da zero)

$$|k_\nu| \leq |k_{\nu+1}| \qquad \text{con} \qquad \lim_{\nu=\infty} k_\nu = \infty,$$

si avrà:

$$R = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(\alpha)\left(\frac{1}{k_\nu - k} - \frac{1}{k_\nu} - \frac{k}{k_\nu^2} - \dots - \frac{k^{m_\nu - 1}}{k_\nu^{m_\nu}}\right) + G(\alpha; k); \tag{13}$$

gli interi (non decrescenti) m_ν sono scelti in modo che la serie del secondo membro converga uniformemente rispetto a k entro un campo grande a piacere ma finito, da cui i punti interni k_ν siano esclusi con cerchi aventi i centri in questi punti e raggi piccoli a piacere. La $G(\alpha, k) = \sum_{n=\nu}^{\infty} G_n(\alpha)\, k^n$ è funzione intera di k. Si ammette, come è stabilito, la convergenza dello sviluppo in quel campo come uniforme rispetto ad x in tutto J e uniforme in un intorno di ogni elemento α di $\mathcal{S}$. Evidentemente, le B_ν e le G_n sono operazioni distributive in $\mathcal{S}$.

37. — a) Per $|k| < |k_1|$ lo sviluppo (13) si può ordinare per le potenze crescenti di k:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} \left\{ \frac{B_1(\alpha)}{k_1^n} + \frac{B_2(\alpha)}{k_2^n} + \ldots + \frac{B_q(\alpha)}{k_q^n} + G_{n-1}(\alpha) \right\}, \tag{14}$$

dove $q = q(n)$ è un intero variabile con n e tale che sia

$$m_q \leq n - 1, \qquad m_{q+1} > n - 1.$$

D'altra parte, se la R ammette uno sviluppo convergente in serie di potenze di k, esso non può differire da

$$R(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n(\alpha), \tag{3}$$

come sappiamo dal § 19. Abbiamo dunque

$$A^n(\alpha) = \frac{B_1(\alpha)}{k_1^n} + \frac{B_2(\alpha)}{k_2^n} + \ldots + \frac{B_q(\alpha)}{k_q^n} + G_{n-1}(\alpha). \tag{15}$$

b) La R essendo definita da

$$R - kAR = A,$$

sostituendovi la (13), moltiplicando per $k - k_i$ e passando al limite per $k = k_i$, viene

$$B_i(\alpha) = k_i\, AB_i(\alpha) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Onde *l'operazione B_i, applicata agli elementi di $\mathcal{S}$, genera elementi invarianti di A rispetto a k_i.*

c) Sia η un elemento invariante di A rispetto ad un numero h. Si avrà:

$$\eta = hA(\eta), \qquad \eta = h^n A^n(\eta), \qquad R(\eta) = \frac{\eta}{h - k}. \tag{16}$$

Dal confronto con (13), segue che h non può differire da uno dei numeri k_ν, sia $h = k_s$; ne viene:

$$R(\eta) = B_s(\eta) \left(\frac{1}{k_s - k} - \frac{1}{k_s} - \frac{k}{k_s^2} - \ldots - \frac{k^{m_s - 1}}{k_s^{m_s}} \right) + G_0(\eta) + G_1(\eta) k + \ldots.$$

Onde, dal confronto con le (16), viene

$$B_s(\eta) = \eta, \qquad B_\nu(\eta) = 0 \qquad \text{per} \qquad \nu \neq s, \tag{17}$$

$$\begin{gathered} G_0(\eta) = \eta/k_s, \quad G_1(\eta) = \eta/k_s^2, \quad \dots, \; G_{m_s-1}(\eta) = \eta/k_s^{m_s}, \\ G_n(\eta) = 0 \qquad \text{per} \qquad n \geq m_s. \end{gathered} \tag{18}$$

Talchè *l'operazione A non ha invarianti, all'infuori di quelli riconosciuti a* b)*; per gli invarianti η_s relativi al polo k_s, l'operazione B_s è l'operazione identica; gli elementi η_s sono radici per le operazioni G_n di indice non inferiore ad m_s e per le operazioni B_ν dove ν è diverso da s.*

d) Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme degli elementi invarianti di A. Lo spazio $\mathcal{B}$ si divide negli spazi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ degli invarianti relativi ai singoli numeri $k_1, k_2, \dots$; due spazi $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j$ non hanno elementi comuni se è $i \neq j$, come risulta subito dalle (17).

Ogni spazio $\mathcal{B}_{r_1} + \mathcal{B}_{r_2} + \dots + \mathcal{B}_{r_p}$ è mutato in sè dalla operazione A.

e) *Se ϱ è radice delle operazioni $B_1, B_2, \dots, B_p$, è*

$$A^n(\varrho) \backsim k_{p+1}^{-n} \qquad (^1). \tag{19}$$

Infatti, se ϱ è radice delle B_ν $(\nu = 1, 2, \dots, p)$, dalla (13) si ha:

$$R(\varrho) = \sum_{\nu=p+1}^{\infty} B_\nu(\varrho) \frac{k^{m_\nu}}{k^{m_\nu}(k_\nu - k)} + G(\varrho; k)$$

ed il secondo membro converge per $|k| < |k_{p+1}|$; ma si ha pure

$$R(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n(\varrho),$$

e ciò dimostra la (19).

38. — a) In base alle osservazioni del § precedente, si scorge facilmente che *ogni elemento α di $\mathcal{S}$ può porsi nella forma*

$$\alpha = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p + \varrho, \tag{20}$$

---

(1) La scrittura

$$a_n \backsim c^n$$

è stata usata da vari autori per indicare che la serie di potenze $\Sigma\, a_n z^n$ ha per raggio di convergenza $1/|c|$.

dove $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ *sono elementi di* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p$ *rispettivamente, e* ϱ *è zero di* $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

Si formi infatti $B_i(\alpha)$; il risultato sarà un elemento η_i di $\mathcal{B}_i$ [§ 37, b)]. Considerando allora

$$\varrho = \alpha - \eta_1 - \eta_2 - \ldots - \eta_p,$$

verrà, per le (17),

$$B_i(\varrho) = B_i(\alpha) - B_i(\eta_i) = 0.$$

Inoltre la decomposizione di α nella forma (20) è possibile in un sol modo; in altre parole, una somma

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_p + \varrho$$

non può essere nulla se non ne sono nulli tutti i termini, come si vede applicandole una qualunque delle operazioni B_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

b) Se β è zero di B_i, è tale anche $A(\beta)$; infatti è

$$R(\beta) = \sum_\nu^{(i)} B_\nu(\beta) \frac{k^{m_\nu}}{k_\nu^{m_\nu}(k_\nu - k)} + G(\beta; k),$$

dove $\sum\limits_\nu^{(i)}$ indica che la sommatoria va estesa ai valori di ν da 1 a ∞, eccettuato il valore $\nu = i$. Ma R è permutabile con A, come risulta dalla (3); onde

$$RA(\beta) = \sum_\nu^{(i)} AB_\nu(\beta) \frac{k^{m_\nu}}{k_\nu^{m_\nu+1}(k_\nu - k)} + AG(\beta; k),$$

e questa mostra che $RA(\beta)$ non contiene il polo $k = k_i$, cioè che è $B_i(A(\beta)) = 0$.

c) Pertanto, segue da (20), per qualunque m,

$$A^m(\alpha) = \frac{\eta_1}{k_1^{m+1}} + \frac{\eta_2}{k_2^{m+1}} + \ldots + \frac{\eta_p}{k_p^{m+1}} + A^m(\varrho), \tag{21}$$

dove $A^m(\varrho)$ è zero di $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

39. — La risoluzione dell'equazione di Fredholm (11) si ha immediatamente in base alla (3) del § 19, se k ha valore diverso da $k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$. È però anche facile vedere sotto quale condizione sia possibile l'equazione

$$\varphi - k_i A(\varphi) = \alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{11'}$$

In base ai §§ precedenti, si può scrivere, se esiste φ in $\mathcal{S}$,

$$\varphi = \eta_i + \beta,$$

dove β è zero di B_i ed η_i è un elemento di $\mathcal{S}_i$. Ne viene

$$\beta - k_i A(\beta) = \alpha,$$

e quindi [§ 38, b)] anche α deve essere radice di B_i. Questa condizione necessaria di risoluzione di (11′) è anche sufficiente, perchè, qualora sia soddisfatta, l'elemento

$$\varphi = \alpha + k_i R(\alpha) \tag{22}$$

soddisfa senz'altro alla (11′). La soluzione generale di (11′) è data da $\varphi + \eta_i$, essendo φ la funzione data da (22) e η_i un elemento arbitrario di $\mathcal{S}_i$.

40. — Riassumendo i risultati ottenuti in ciò che precede circa la struttura dello spazio $\mathcal{S}$ in relazione ad una operazione di tipo F, possiamo dire:

Ad ogni polo k_i (numero invariante di A) corrisponde uno spazio invariante $\mathcal{S}_i$, in cui l'operazione A si riduce alla moltiplicazione per $1/k_i$, ed una operazione B_i che nello spazio $\mathcal{S}_i$ è l'identità, mentre negli spazi $\mathcal{S}_s$ $(s \neq i)$ è l'operazione nulla. Ogni elemento α di $\mathcal{S}$ è decomponibile, ed in un sol modo, nella forma (20), *o nella forma più generale*

$$\alpha = \eta_i + \eta_j + \ldots + \eta_s + \varrho, \tag{23}$$

dove $\eta_i, \eta_j, \ldots, \eta_s$ appartengono rispettivamente agli spazi $\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j, \ldots, \mathcal{S}_s$, e ϱ è zero delle corrispondenti operazioni $B_i, B_j, \ldots, B_s$.

La η_i si può dire la componente di α in $\mathcal{S}_i$.

41. — Si ha ancora la seguente importante osservazione. Dato un elemento α, si possono determinare successivamente le sue componenti $\eta_1, \eta_2, \ldots$ in $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots$; si ha allora, dalla (15),

$$\lim_{n=\infty} \left\{ A^n(\alpha) - \frac{\eta_1}{k_1^n} - \frac{\eta_2}{k_2^n} - \ldots - \frac{\eta_{q(n)}}{k_{q(n)}^n} \right\} = 0, \tag{24}$$

dove $q = q(n)$ è definito al § **37**, a); e di più, la successione

$$A^n(\alpha) - \frac{\eta_1}{k_1^n} - \frac{\eta_2}{k_2^n} - \dots - \frac{\eta_{q(n)}}{k_{q(n)}^n} \tag{25}$$

è ologena.

42. — I risultati precedenti si presentano in forma assai più semplice quando i numeri $m_1, m_2, \dots$ che, in base al noto metodo di MITTAG-LEFFLER, si devono scegliere in modo da ottenere la convergenza al secondo membro della (13), si possono prendere tutti fra loro eguali. Indichiamo in tale caso con m il loro valore comune. La (13) viene allora sostituita da

$$R = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu(\alpha) \frac{k^m}{k_\nu^m (k_\nu - k)} + G(\alpha; k) \tag{26}$$

e, paragonando con la (3) e posto ancora

$$G(\alpha; k) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\alpha) k^n,$$

viene

$$A = G_0, \quad A^2 = G_1, \quad \dots, \quad A^m = G_{m-1}, \tag{27}$$

$$A^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{B_\nu(\alpha)}{k_\nu^n} + G_{n-1}(\alpha) \qquad (n = m+1, m+2, \dots). \tag{28}$$

Ora da queste ultime viene, mediante applicazione dell'operazione A,

$$A G_n = G_{n+1} \qquad (n = m, m+1, \dots);$$

il simbolo operatorio

$$(1 + kA + k^2A^2 + \dots)\, G_m$$

è dunque funzione intera in k, e quindi la G_m trasforma lo spazio $\mathcal{S}$ in uno spazio $\mathcal{S}_1$ per il quale la A è operazione del tipo V. In questo caso siamo dunque pervenuti al seguente risultato:

Se la A ammette una risolvente meromorfa della forma (26), *essendo α un elemento qualsivoglia di $\mathcal{S}$ e posto $B_\nu(\alpha) = \eta_\nu$, si ha per $A^n(\alpha)$ lo sviluppo*

$$A^n(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\eta_\nu}{k_\nu^n} + \varrho_n \qquad (n > m), \tag{29}$$

dove ϱ_n è elemento di uno spazio per il quale A è operazione di tipo V; *e lo sviluppo* (29) *è uniformemente convergente rispetto ad x.*

43. — Si può riguardare lo spazio $\mathcal{S}$ come ripartito in una somma degli spazi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_\nu, \ldots$ e di uno spazio $\mathcal{S}_1$ per modo che, preso un elemento α in $\mathcal{S}$ e posto $B_\nu(\alpha) = \eta_\nu$, essendo η_ν elemento di $\mathcal{B}_\nu$ e ϱ_0 di $\mathcal{S}_1$, è

$$\alpha \equiv \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_\nu + \ldots + \varrho_0 ; \tag{30}$$

qui l'eguaglianza ($\equiv$) ha semplicemente un carattere virtuale, ma essa dà luogo ad una eguaglianza effettiva in seguito all'applicazione dell'operazione A^n ($n > m$), e precisamente dà lo sviluppo (29).

44. — Nei casi concreti che si sono presentati nello studio delle equazioni integrali, e in cui si possono applicare le considerazioni astratte precedenti, accade di norma che gli spazi $\mathcal{B}_\nu$ siano ad una dimensione: ad ognuno dei numeri k_ν corrisponde un solo elemento η_ν di $\mathcal{S}$ (all'infuori di un moltiplicatore numerico), talchè ad un elemento α di $\mathcal{S}$ corrisponde una costante c_ν tale che

$$B_\nu(\alpha) = c_\nu \, \eta_\nu .$$

I numeri c_ν si possono allora dire, in senso esteso, coefficienti di Fourier-Hilbert di α rispetto all'operazione A. Si avrà lo sviluppo virtuale

$$\alpha = \sum_\nu c_\nu \eta_\nu + \varrho_0 \tag{30'}$$

e, per $n > m$, lo sviluppo effettivo

$$A^n(\alpha) = \sum_\nu \frac{c_\nu}{k_\nu^n} \eta_\nu + \varrho_n . \tag{31}$$

Come al § **33**, si prova immediatamente che $\mathcal{S}_1$ non può avere elementi comuni con gli $\mathcal{B}_\nu$ e che gli $\mathcal{B}_\nu$ sono spazi di zeri per G_m; ne segue che lo sviluppo di $A^n(\alpha)$ nella forma (31) è possibile in un solo modo.

45. — Nell'ipotesi del § precedente, qualsiasi operazione funzionale rappresentata da una funzione $f(A)$ razionale intera o fratta del simbolo A, purchè contenga a fattore A^r ($r > m$) in numeratore e non contenga A a fattore in denominatore, si può eseguire sostituendo, nella (31), al coefficiente c_ν / k_ν^n, il coefficiente

$$c_\nu f(1/k_\nu),$$

e a ϱ_n il risultato di $f(A(\varrho_0))$, il quale si ottiene mercè il calcolo funzionale delle operazioni di tipo V (§ 23-30). Talchè:

$$f(A(\alpha)) = \sum_\nu c_\nu f(1/k_\nu)\, \eta_\nu + f(A(\varrho_0)),$$

sviluppo che ammette la convergenza uniforme in J. Notevole il caso in cui manchi la funzione intera G, nel quale caso le A^n, per $n > m$, si comportano in $\mathcal{S}$ precisamente come si comportano le omografie in uno spazio ad un numero finito di dimensioni in cui si siano presi come elementi base gli elementi invarianti dell'omografia stessa.

V.

46. — Considereremo, per ultimo, un'operazione A lineare, univoca e non degenere in uno spazio funzionale $\mathcal{S}$, la quale per gli elementi di questo spazio abbia una risolvente R, definita al solito da

$$R - kAR = A, \tag{1}$$

con la condizione che questa risolvente, come funzione del parametro, sia della forma

$$R(\alpha) = \int_a^b \frac{\varphi(x; u)\, du}{u - k}. \tag{2}$$

Qui con $\varphi(x; u)$ s'intende un elemento di $\mathcal{S}$, funzione di x data in J, che inoltre è funzione del parametro reale u dato nell'intervallo $a < u < b$, con $a > 0$; questa funzione dipende da α mediante un'operazione B:

$$\varphi = B(\alpha; u).$$

Per ogni α dell'insieme $\mathcal{S}$ la $\varphi(x, u)$ si supporrà continua in u ed uniformemente rispetto ad x; essa si supporrà inoltre limitata per tutti i sistemi di valori di u nell'intervallo $a \dots b$ e di x in J. La R stessa si indicherà con $R(\alpha)$, con $R(k)$ o con $R(\alpha; k)$ secondo che si vorrà porre in evidenza o l'elemento su cui opera, o il parametro, o entrambe queste quantità.

Un'operazione A avente una tale risolvente della forma (2) si dirà *del tipo di Hilbert* o brevemente *di tipo* H.

La $R(\alpha)$, rispetto al parametro k, è funzione analitica regolare in tutto il piano eccettuato il taglio $a \dots b$; la (1) permette dunque

(§ 19) di risolvere l'equazione di FREDHOLM per ogni valore di k non appartenente al taglio, e la soluzione è data da

$$\varphi = \alpha + kR(\alpha); \tag{3}$$

si vedrà più avanti come questa soluzione sia unica.

L'operazione B è distributiva. Infatti è

$$R(\alpha + \beta) = R(\alpha) + R(\beta),$$

onde

$$\int_a^b \frac{B(\alpha + \beta; u)\,du}{u - k} = \int_a^b \frac{B(\alpha; u)\,du}{u - k} + \int_a^b \frac{B(\beta; u)\,du}{u - k}.$$

Ne viene, dallo sviluppo in serie di potenze di questa espressione, sviluppo convergente per $|k| < a$, che è

$$\int \frac{B(\alpha + \beta; u) - B(\alpha; u) - B(\beta; u)}{u^{n+1}}\,du = 0,$$

per ogni n intero positivo. Per un noto teorema di LERCH (¹) e poichè $B(\alpha)$, $B(\beta)$ sono funzioni continue di u, ne risulta

$$B(\alpha + \beta; u) = B(\alpha; u) + B(\beta; u).$$

47. — Sviluppando la (2) in serie di potenze di k, si ha, per $|k| < a$,

$$R(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \int_a^b \frac{B(\alpha; u)\,du}{u^{n+1}}, \tag{4}$$

dove i coefficienti di k^n sono, per ogni elemento α di $\mathcal{S}$, elementi di $\mathcal{S}$. Sostituendo nella (1) se ne deduce:

$$A(\alpha) = \int_a^b \frac{B(\alpha; u)\,du}{u} \tag{5}$$

(¹) Acta Math., T. 27.

ed in conseguenza

$$A^n(\alpha) = \int_a^b \frac{B(\alpha;u)\,du}{u^n} \tag{5'}$$

per ogni n intero positivo.

Si ha pure, per $|k| > b$,

$$R(\alpha) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1}} \int_a^b B(\alpha;u)\,u^n\,du,$$

dove anche qui i coefficienti delle potenze di k sono elementi di $\mathcal{S}$; sostituendo in (1), viene:

$$A \int_a^b B(\alpha;u)\,du = A(\alpha), \tag{6}$$

$$A \int_a^b B(\alpha;u)\,u^{n+1}\,du = \int_a^b B(\alpha;u)\,u^n\,du. \tag{7}$$

La (6), poichè A non ha zeri in $\mathcal{S}$, dà

$$\int_a^b B(\alpha;u)\,du = \alpha, \tag{8}$$

onde, dalla (7),

$$A^{-n}(\alpha) = \int_a^b B(\alpha;u)\,u^n\,du \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5''}$$

L'ipotesi dell'esistenza di una risolvente della forma (1) permette dunque di risolvere l'equazione funzionale, lineare, di prima specie,

$$A(\varphi) = \alpha;$$

per la (5''), la soluzione è data da

$$\varphi = \int_a^b B(\alpha;u)\,u\,du.$$

48. — L'unicità della soluzione dell'equazione di FREDHOLM, per ogni valore di k non appartenente al segmento $a \dots b$, si può riconoscere come segue. In sostanza, si ha da dimostrare che per un valore k_1 di k non appartenente al detto segmento, non può esistere un elemento invariante di A. Sia, se è possibile,

$$A(\eta) = \eta / k_1;$$

ne viene, da (1),

$$R(\eta) = \eta/(k_1 - k).$$

D'altra parte la (2) permette di scrivere:

$$R(\eta) = \int_a^b \frac{B(\eta; u)\, du}{u - k_1 - (k - k_1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (k - k_1)^n,$$

per i valori di k tali che $|k - k_1|$ sia inferiore alla minima distanza di k_1 dal segmento $a \dots b$. Da una parte dunque $R(\eta)$ avrebbe un polo per $k = k_1$, mentre d'altra parte sarebbe regolare per quello stesso valore di k: la proprietà dell'invariante non è dunque possibile se k_1 è fuori di $a \dots b$, e quindi l'equazione di FREDHOLM ha l'unica soluzione (3). Questa soluzione si può esprimere in serie di potenze intere positive di k se è $|k| < a$; di potenze intere negative se è $|k| > b$; di potenze intere positive di $k - k_1$ se k_1 è preso comunque fuori di $a \dots b$ e $|k - k_1|$ è minore della minima distanza di k_1 da $a \dots b$.

49. — Nella R considerata come funzione di k_1 si diano a k i due valori

$$k' = k_1 + i\tau, \qquad k'' = k_1 - i\tau,$$

dove k_1 è un valore reale compreso fra a e b. Verrà

$$R(k') - R(k'') = 2i\tau \int_a^b \frac{B(\alpha; u)\, du}{\tau^2 + (k - k_1)^2}\,. \tag{9}$$

Si prenda un numero positivo g arbitrario; indicata con $\varphi(u)$ la $B(\alpha; u)$, si può, per le ipotesi del § 46, determinare un intervallo $k_1 - \varepsilon \dots k_1 + \varepsilon$ incluso in $a \dots b$ e tale che per ogni x di J e ogni punto u di quell'intervallo sia

(10) $$\varphi(u) = \varphi(k_1) + \sigma(u), \qquad \text{con} \qquad |\sigma(u)| < g/(6\pi).$$

Sia inoltre m un numero positivo maggiore del massimo valore assoluto di $\varphi(u)$ in tutto $a \dots b$ e per tutti i valori di x in J.

L'espressione (9) si può decomporre in

$$R(k') - R(k'') = J_1 + J_2 + J_3 \,,$$

dove

$$J_1 = 2i\tau \int_a^{k_1-\varepsilon} \frac{B(\alpha; u)\, \mathrm{d}u}{\tau^2 + (u - k_1)^2}\,, \qquad J_2 = 2i\tau \int_{k_1+\varepsilon}^{b} \dots\,, \qquad J_3 = 2i\tau \int_{k_1-\varepsilon}^{k_1+\varepsilon} \dots\,.$$

Per il primo termine si ha:

$$|J_1| \leq 2\tau m \int_a^{k_1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{(u - k_1)^2 + \tau^2}\,;$$

ma è

$$(u - k_1)^2 + \tau^2 > \varepsilon^2,$$

onde

$$|J_1| < 2\tau m\, (k_1 - a)/\varepsilon^2.$$

Se dunque si prende τ inferiore a $\dfrac{g\varepsilon^2}{6m\,(k_1 - a)}$ o, a più forte ragione,

(11) $$\tau < \frac{g\varepsilon^2}{6m\,(b - a)}\,,$$

viene

$$|J_1| < g/3.$$

Analogamente, sotto la condizione (11), è

$$|J_2| < g/3.$$

Il termine J_3 può scriversi, per la (10),

$$J_3 = J_4 + J_5$$

con

$$J_4 = 2i\tau\varphi(k_1) \int_{k_1-\varepsilon}^{k_1+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{(u - k_1)^2 + \tau^2}\,, \qquad J_5 = 2i\tau \int_{k_1-\varepsilon}^{k_1+\varepsilon} \frac{\sigma(u)\, \mathrm{d}u}{(u - k_1)^2 + \tau^2}\,.$$

Per il secondo di questi si ha, per la (10),

$$|J_5| < \frac{g}{3\pi} \int_{k_1-\varepsilon}^{k_1+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}(u/\tau)}{1+\{(u-k_1)/\tau\}^2},$$

e siccome l'integrale definito dà qui un arco positivo inferiore a π,

$$|J_5| < g/3.$$

Pertanto, preso ε e τ in modo da soddisfare alle (10), (11), si ha:

(12) $$|R(k') - R(k'') - J_4| < g.$$

Ora, passando al limite per $\tau = 0$, si ha

$$\lim_{\tau=0} J_4 = 2i\pi\, \varphi(k_1);$$

$\varphi(k_1)$ è un elemento di $\mathcal{S}$ che, anche come tale, rappresenteremo con φ; $R(k') - R(k'')$ è pure un elemento di $\mathcal{S}$ che rappresenteremo con $\varphi_{k',k''}$. Da (12) si ha:

(13) $$\lim_{k'=k''} \varphi_{k',k''} = 2\pi i \varphi,$$

e poichè A è operazione lineare e nelle (13), per le ipotesi fatte, la convergenza al limite avviene uniformemente rispetto ad x, così è

$$\lim_{k'=k''} A(\varphi_{k',k''}) = 2\pi i A(\varphi).$$

Riferendoci ora alla (1), abbiamo, per uno stesso α,

$$R(k') - k'AR(k') = R(k'') - k''AR(k''),$$

onde

$$\varphi_{k',k''} - k_1\, A(\varphi_{k',k''}) = i\tau AR(k') + i\tau AR(k'').$$

Passando al limite per $k' = k''$, o ciò che è lo stesso, per $\tau = 0$, viene infine

(14) $$\varphi - k_1\, A(\varphi) = 0.$$

Siamo giunti così al seguente risultato:

Per la (2), *ad ogni elemento di* α *corrisponde un elemento* $B(\alpha; u)$, *funzione di* x *e di* u. *Per ogni valore reale di* u, *compreso* *fra a e b, la $B(\alpha; u)$ verifica l'eguaglianza*

$$B(\alpha; u) - uAB(\alpha; u) = 0, \tag{15}$$

ed è quindi elemento invariante di A relativo al valore u.

50. — Per quanto abbiamo veduto, le operazioni del tipo $\mathcal{B}$ non ammettono (§ 48) elementi invarianti relativi a valori del parametro non appartenenti al segmento $a \dots b$, che, seguendo la nomenclatura dell'HILBERT, diremo *spettro* dell'operazione. Per i valori u appartenenti allo spettro esistono invece elementi invarianti (§ 49), verificanti l'equazione (15). Ogni tale elemento è funzione di x e di u.

Sia $\omega(x, u)$ un elemento invariante di A per tutti i valori di u appartenenti allo spettro; sia cioè

$$\omega(x, u) = uA(\omega(x, u)); \tag{15'}$$

sarà allora elemento invariante anche $c(u)\,\omega(x, u)$, essendo $c(u)$ una funzione arbitraria di u. Più elementi invarianti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ saranno linearmente dipendenti se si potranno determinare r funzioni della sola u, $c_1(u), c_2(u), \dots, c_r(u)$, tali che sia, identicamente rispetto ad x,

$$c_1(u)\,\omega_1 + c_2(u)\,\omega_2 + \dots + c_r(u)\,\omega_r = 0;$$

saranno linearmente indipendenti nel caso contrario. Ogni combinazione lineare, a coefficienti funzioni arbitrarie di u, di più elementi invarianti, è pure un elemento invariante.

51. — Supponiamo che per ogni valore di u compreso fra a e b esista un solo elemento invariante per A, all'infuori di un moltiplicatore arbitrario dipendente dalla sola u. Fissiamo per ogni u una determinazione di questo moltiplicatore in modo che l'invariante $\omega(x, u)$, così determinato, risulti continuo in u. Per ogni elemento α di $\mathcal{S}$ è allora

$$B(\alpha; u) = \omega(x, u)\,a(u),$$

dove $a(u)$ è una funzione determinata di u nell'intervallo $a \dots b$; siccome $\omega(x, u)$ e $B(\alpha; u)$ sono funzioni continue di u, la prima per la determinazione scelta, la seconda per l'ipotesi del § 46, così anche $a(u)$ è continua. Ma si ha allora, per la (8),

$$\alpha(x) = \int_a^b \omega(x, u)\,a(u)\,du; \tag{16}$$

ne risulta quindi, in base alle ipotesi del § 46, che *se per A e per i valori di u compresi nell'intervallo $a \dots b$ vi è una sola soluzione dell'equazione*

$$\omega = u\, A(\omega),$$

all'infuori di un moltiplicatore funzione della sola u, gli elementi dello spazio $\mathcal{S}$ ammettono una rappresentazione integrale della forma (16).

La corrispondenza fra le funzioni $\alpha(x)$ ed $a(u)$ si può esprimere mediante un simbolo operatorio:

$$\alpha = T(a),$$

dove l'operazione T è manifestamente lineare; inoltre essendo, da (5),

$$A(\alpha) = \int_a^b \omega(x, u)\, a(u) \frac{du}{u},$$

segue che A è la trasformata mediante T dell'operazione di moltiplicazione per $1/u$. Da ciò, facili considerazioni, che lasciamo per brevità al lettore, permettono di risolvere l'equazione funzionale

$$c_0\, \varphi + c_1\, A(\varphi) + \dots + c_m\, A^m(\varphi) = \alpha, \tag{17}$$

dove α è un elemento dato di $\mathcal{S}$ e φ è un elemento incognito, mediante la formula

$$\varphi = \int_a^b \frac{\omega(x, u)\, a(u)\, u^m\, du}{c_0\, u^m + c_1\, u^{m-1} + \dots + c_m}, \tag{18}$$

e di discuterne la soluzione.

52. — Come caso particolare della (17), abbiamo l'equazione di FREDHOLM, la cui soluzione non dà luogo ad alcuna osservazione se k non è compreso nell'intervallo $a \dots b$. Se invece è k_1 un valore di k compreso in quell'intervallo, si osservi che

$$\alpha - k_1\, A(\alpha) = \int_a^b \omega(x, u)\, a(u)\, (u - k_1) \frac{du}{u},$$

e siccome fra le ipotesi del § 46 vi è quella che $B(\alpha, u) = \omega(x, u)\, a(u)$

sia limitata nell'intervallo $a \dots b$ (1), così all'elemento $a - k_1 A(\alpha)$ corrisponde, mediante l'operazione T^{-1}, una funzione di u che per $u = k_1$ ha uno zero di primo ordine almeno. Reciprocamente, se $a(u)$ è nullo almeno di primo ordine per un valore k_1 di u compreso nell'intervallo $a \dots b$, la $\alpha = T(a)$ si può porre sotto la forma $\beta - k_1 A(\beta)$, dove β è elemento di $\mathcal{S}$; basta prendere infatti

$$\beta = \int_a^b \omega(x, u) \frac{a(u)\, du}{u - k_1},$$

dove la funzione sotto il segno soddisfa alle ipotesi del § 46. Onde, sotto quelle ipotesi, *la condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione*

$$\varphi - k_1 A(\varphi) = \alpha \qquad (a \leq k_1 \leq b)$$

abbia soluzione in $\mathcal{S}$, *è che* $T^{-1}(\alpha)$ *abbia per* $u - k_1$ *uno zero almeno del primo ordine.*

Soddisfatta questa condizione e trovata una soluzione φ, la soluzione generale sarà data da $\varphi + c\,\omega(x, k_1)$, dove c è una costante arbitraria.

53. — Come esempio del tipo di operazioni studiato nel presente art. V., possiamo citare le espressioni differenziali lineari. Se A è una tale espressione, e si trova un integrale $\omega(x, u)$ dell'equazione

$$\omega - u\, A(\omega) = 0,$$

se poi $a \dots b$ è un tratto dell'asse reale in cui $\omega(x, u)$, come funzione di u, sia finita e continua, l'insieme di funzioni di x rappresentato da

$$\alpha(x) = \int_a^b \omega(x, u)\, a(u)\, du,$$

dove $a(u)$ è un elemento arbitrario nell'insieme delle funzioni finite e continue nell'intervallo $a \dots b$, è tale che per esso l'operazione A gode delle proprietà riscontrate nel presente articolo.

(1) Da questa ipotesi sarebbe facile prescindere, sostituendola con altra più generale, ma abbiamo ritenuto opportuno di mantenerla per semplicità.