Salvatore Pincherle

Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti

In: Atti del 4° Congresso Internaz. dei Matematici in Roma (6-11 aprile 1908), 1909, p. 44–48

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 356–361

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_356>

29 [139].

Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.

Atti del 4° Congresso Internaz. dei Matematici in Roma (6-11 aprile 1908); 2, 44-48 (1909).

Io mi permetto di trattenere per pochi istanti i miei cortesi uditori, richiamando la loro attenzione su alcuni punti di una teoria già antica, ma alla quale i progressi dell'Analisi sono andati via via dando un interesse sempre nuovo: *la teoria delle funzioni determinanti*. Però, è lungi da me l'idea di stancare ripetendo, sia pure per sommi capi, la storia e le applicazioni di questa teoria; il mio compito è più modesto e limitato: voglio solo presentare alcune spigolature raccolte in quel campo già largamente mietuto, e rimando ad altro scritto le dimostrazioni, e i maggiori sviluppi di considerazioni e di esempi.

I.

È noto come, con funzione *determinante* della *generatrice* $\varphi(t)$, s'intenda la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t)\, e^{-tx}\, dt; \tag{1}$$

è noto come queste denominazioni ed il principio della teoria formale siano dovute al LAPLACE, come l'ABEL l'abbia sviluppata nello stesso senso; come il POINCARÉ ne abbia mostrato la portata nella teoria moderna delle funzioni e l'applicazione allo studio delle equazioni differenziali lineari; poi, tacendo delle ricerche di altri, come il BOREL dapprima, poi il MITTAG-LEFFLER, che vi ha intrattenuti l'altro ieri su ciò nella sua magistrale conferenza, ne abbiano mostrato l'importanza per la rappresentazione di un ramo monogeno di funzione analitica.

L'espressione (1) rappresenta in un semipiano, limitato da una retta parallela all'asse immaginario, una parte di funzione analitica, il cui campo di validità può però estendersi anche al di là di codesta regione $\mathfrak{R}(x) > a$. L'espressione (1), come hanno mostrato DIRICHLET, RIEMANN e KRONECKER, è invertibile mediante la formula

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(s)\, e^{ts}\, \mathrm{d}s. \tag{2}$$

Le (1) e (2) dànno una *corrispondenza funzionale* notevole: essa fa corrispondere con stretta dipendenza una funzione di variabile reale $\varphi(t)$ e una funzione analitica $f(x)$; per la prima basta supporre poco più dell'integrabilità; per la seconda si ha almeno un semipiano di regolarità.

II.

Una prima spigolatura riguarda l'ascissa a di convergenza di (1). Essa dipende dal comportamento asintotico o ordine esponenziale di $\varphi(t)$ per $t = \infty$. Su questa dipendenza, un teorema di LANDAU ci insegna che, se è $a \geq 0$, si ha

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log \left| \int_c^t \varphi(t)\, \mathrm{d}t \right|}{t},$$

indicando con $\overline{\lim}$ il massimo limite, nel senso di CAUCHY, HADAMARD e PRINGSHEIM. Questo teorema è suscettibile di estendersi al caso di $a < 0$? La risposta è affermativa, purchè si prenda

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log \left| \int_t^\infty \varphi(t)\, \mathrm{d}t \right|}{t}.$$

Il teorema di LANDAU è l'analogo di un altro, dato anteriormente dal CAHEN per determinare l'ascissa a di convergenza di una serie di DIRICHLET $\Sigma\, c_n\, e^{-\lambda_n x}$. Se è $a \geq 0$, si è trovato

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log |c_0 + c_1 + \dots + c_n|}{\lambda_n}.$$

Ora, per $a < 0$ si trova anche qui

$$a = \overline{\lim}\, \frac{\log |c_{n+1} + c_{n+2} + \dots|}{\lambda_n}.$$

III.

La definizione di funzione determinante si può estendere, conformemente al principio di HANKEL. Una naturale estensione, comoda nelle applicazioni, sostituisce alla (1) la

$$f(x) = x^m \int_c^\infty \mathrm{D}^{-m}\, \varphi(t) \,.\, e^{-tx}\, dt \tag{1'}$$

o alla (2), la

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\, \mathrm{D}^m \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{f(s)\, e^{ts}\, ds}{s^m}. \tag{2'}$$

Fra i vantaggi di questa estensione, vi è quello di considerare le funzioni determinanti a generatrice nulla, lo zero riguardandosi come derivata di una costante: se questa costante si muta in vari tratti dell'asse d'integrazione, la determinante, sotto opportune condizioni, si riduce ad una serie di DIRICHLET.

Questa considerazione getta luce su molte proprietà delle serie di DIRICHLET, in particolare sul problema, insufficientemente trattato dal CAHEN e che ha dato luogo a recenti osservazioni del LANDAU e dell'HADAMARD (1), delle condizioni per la sviluppabilità di una funzione in serie di tale specie.

Essa permette pure di porre nella vera luce un teorema che, dato dal DIRICHLET per le sue serie numeriche, è stato ampliato e precisato dal PHRAGMEN e dal LANDAU; teorema che mostra l'esi-

---

(1) Vedasi Rend. del Circ. Mat. di Palermo: T. XXIV, p. 221; T. XXV, pp. 326, 395.

stenza di un polo di primo ordine in $x = k$ per la funzione

$$f(x) = \Sigma\, c_n\, e^{-\lambda_n x}$$

quando dalla funzione $\varphi(t)$ definita fra λ_n e λ_{n+1} da $c_1 + c_2 + ... + c_n$ si stacca, a rappresentare l'ordine esponenziale massimo, un termine e^{kt}.

Si può anzi mostrare come, ad un termine d'ordine esponenziale massimo $t^m\, e^{kt}$ per $\varphi(t)$ corrisponda per $f(x)$ un infinito d'ordine m per m non intero negativo, e una singolarità logaritmica per m intero negativo (1).

IV.

Uno dei fatti più interessanti nella teoria delle funzioni determinanti sta in ciò, che il comportamento all'infinito della funzione generatrice si riflette sulla posizione e sulla natura delle singolarità della funzione determinante. Di ciò porta un esempio il teorema ora ricordato; un altro è fornito dalla trasformazione di una serie di esponenziali in una funzione meromorfa, e altri si potrebbero aggiungere.

In particolare, un risultato notevole è dato dalla applicazione dell'operazione (1) ad una funzione determinante. Ricordiamo dapprima che se la funzione generatrice è analitica, e data in tutto un angolo, la determinante è regolare non più in un semipiano soltanto, ma in tutto un angolo superiore ai 180^0. In base a ciò, si viene a trovare che la determinante di una funzione determinante (1) è, sotto condizioni assai larghe, una *funzione semplice*, cioè un ramo di funzione regolare in tutto il piano, all'infuori di un taglio (essenziale o no) fatto ad esempio lungo l'asse reale negativo, e la generatrice, moltiplicata per $2\pi i$, dà il salto della determinante nell'attraversamento di questo taglio. Questa osservazione è di grande vantaggio per lo studio delle dette funzioni semplici, e permette di ritrovare le condizioni date da Leau, Le Roy, Faber, ecc., perchè una serie di Taylor rappresenti una funzione semplice.

---

(1) Dopo questa lettura, è comparsa una Memoria di W. Schnee (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. XXVII, settembre 1908) in cui, a p. 5 dell'estratto, è enunciato e dimostrato quest'ultimo teorema.

V.

Alla rappresentazione di una funzione $f(x)$ nella forma (1), cioè al fatto che essa sia una funzione determinante, si collega la possibilità del suo sviluppo in serie di determinata forma; in particolare la sviluppabilità in serie di fattoriali, studiata recentemente dal NIELSEN e dipendente, come ho mostrato, dall'ordine (nel senso di HADAMARD) della funzione generatrice per $t = \infty$. Ma se allo sviluppo in fattoriali si sostituisce quello secondo funzioni più generali della forma

$$\frac{1}{(x + \lambda_1)(x + \lambda_2) \dots (x + \lambda_n)},$$

si ottengono tali sviluppi per classi più estese di funzioni determinanti, e mancando questi sviluppi come effettivi, essi possono però presentarsi come asintotici, generalizzando i noti sviluppi asintotici in serie di potenze, studiati dal POINCARÉ.

VI.

Consideriamo l'espressione (1) come indicazione di un'operazione funzionale sul soggetto φ; si ha così un'operazione

$$f = \mathrm{J}(\varphi),$$

che trasforma la moltiplicazione per t^α nella derivazione d'indice α:

$$\mathrm{D}^\alpha = \mathrm{J} t^\alpha \mathrm{J}^{-1}.$$

Ora le D^α formano un gruppo ad un parametro, nel senso di LIE. Quale ne è la trasformazione infinitesima X? È ovvio riconoscere che essa è la trasformata della moltiplicazione per il logaritmo:

$$\mathrm{X} = \mathrm{J} \log t . \mathrm{J}^{-1}.$$

Questa operazione X, per la quale ho proposto il nome di *logaritmo funzionale*, ha curiose e notevoli proprietà: per citarne una, alla

$$\mathrm{D}x^n = n x^{n-1}$$

fa riscontro la

$$\mathrm{J}x^n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n \log x\,;$$

è da segnalarsi anche il suo uso, analogo a quello fatto dall'HADAMARD delle derivate d'indice qualunque, nello studio dei punti singolari sulla circonferenza di convergenza di una serie di potenze.

Si può poi considerare l'operazione X^α, trasformata di $\log^\alpha t$, poi l'operazione infinitesima di questo nuovo gruppo, e così via. In tal modo si genera una scala di operazioni, analoga alla scala delle funzioni tipiche degli ordini d'infinito proposta dal BOREL e parallela ad essa; ognuna di queste operazioni raggiunge l'effetto di fare corrispondere, al corrispondente ordine della funzione su cui si opera, la *posizione* delle singolarità della funzione generata; mentre i fattori di ordine inferiore influiscono solo sulla natura, ma non sulla posizione delle singolarità stesse.