Salvatore Pincherle

## Sulle equazioni funzionali lineari

*Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, Serie 6, Vol. **3** (1906), p. 143–171

*in*: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 264–301

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_264>

## 27 [129].

# Sulle equazioni funzionali lineari.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;
(6) **3**, 143-171 (1906).

I problemi d'inversione degli integrali definiti hanno, tanto per l'Analisi pura che per le applicazioni, una importanza su cui non è più necessario insistere. Da alcuni anni, in seguito a lavori del VOLTERRA e più recentemente del FREDHOLM e dell'HILBERT — per ricordare solo i principali — lo studio di questi problemi ha ricevuto un impulso notevole. Le equazioni alle quali questi studi si riferiscono sono quelle della forma

$$\text{(a)} \qquad \int \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x),$$

$$\text{(b)} \qquad \varphi(x) - k\int \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x),$$

dette rispettivamente, dall'HILBERT, *equazioni integrali lineari di prima e di seconda specie*. In queste equazioni $f(x)$ è la funzione data, $\varphi(t)$ la funzione incognita da determinarsi; per la funzione $\alpha(x, t)$, che definisce l'operazione da eseguire, ho proposto già da tempo (1) il nome di *funzione caratteristica*.

Le equazioni (a) e (b) dànno luogo, nel campo reale, a due casi, secondo che i limiti dell'integrazione sono dipendenti da $x$ [caso di

---

(1) Acta Math., T. I, p. 156, 1887. L'HILBERT (Götting, Nachrichten, 1904, Heft. 1, p. 62), dà a questa funzione, che egli ammette generalmente simmetrica in $x$ e $t$, il nome di *perno* (KERN). Cfr. E. SCHMIDT, Inaug. Diss., Göttingen 1905.

VOLTERRA (1)] o fissi [caso di FREDHOLM (2)]. Vi è poi da considerare il campo complesso, o in genere il caso in cui il campo di variabilità di $x$ non coincide con la linea d'integrazione, e che si distingue essenzialmente dai precedenti. In ogni caso, hanno importanza le seguenti domande:

Per quali classi lineari di funzioni $\varphi$ i primi membri delle equazioni (a) e (b) hanno significato?

Quale insieme per la funzione $f(x)$ corrisponde, in forza delle relazioni (a) o (b), alle funzioni $\varphi(t)$ appartenenti ad un insieme dato?

In quale insieme va scelta $f(x)$ se si vuole che le dette equazioni abbiano una, o più, soluzioni?

Simili domande mettono in chiaro la necessità di considerare, accanto alle equazioni, anche le *operazioni funzionali* espresse dai primi membri delle (a) e (b): nello stesso modo che per la risoluzione di un'equazione

$$f(x) = a$$

è opportuno conoscere, in precedenza, le proprietà della funzione $f(x)$. Queste proprietà possono essere di grandezza o di forma, di natura quantitativa o qualitativa: prevalenti le prime nel campo reale, le seconde nella considerazione di operazioni applicate a funzioni analitiche. Alle prime è da ascriversi la continuità, come è definita ad esempio dall'HADAMARD (3); alle seconde i teoremi di CAUCHY sugli integrali curvilinei, lo studio delle funzioni determinanti (4), ecc.. I due punti di vista hanno importanza diversa nei diversi ordini di questioni, ma non si può dire che l'uno soverchi l'altro: essi possono giovarsi a vicenda, come a vicenda si giovano la teoria delle funzioni analitiche e quella delle funzioni di variabile reale.

La proprietà essenziale delle operazioni espresse dai primi membri delle (a) e (b) è quella di essere distributive — o lineari — rispetto all'elemento variabile $\varphi(t)$. Indicando con $A$ un'operazione

---

(1) Atti della R. Accad. di Torino, quattro Note, 1895-1896. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 8 e 15 marzo 1896. Ann. di Mat., S. II, T. 25, p. 159, 1897.

(2) Acta Math., T. XXVII, p. 365, 1903.

(3) Comptes Rendus, 9 février 1903.

(4) Vedasi la mia Memoria: *Sur les fonctions déterminantes,* Ann. de l'Éc. Normale Supérieure, S. III, T. XXI, p. 9, 1905.

distributiva generica, quelle equazioni rientrano nei tipi

$$A(\varphi) = f, \qquad \varphi - k\,A(\varphi) = f, \tag{c}$$

ai quali si aggiungerebbero facilmente tipi più generali; daremo loro il nome di *equazioni funzionali lineari.*

A proposito del doppio punto di vista, qualitativo e quantitativo, sotto cui si possono studiare le operazioni distributive, torna acconcia una osservazione. Sotto il primo punto di vista ha grandissima importanza l'operazione di derivazione, che si può riguardare come elemento costitutivo del calcolo di codeste operazioni: tanto che quel calcolo si può ritenere generato, per così dire, dall'*aggiunzione* dell'operazione $D$ di derivazione alle operazioni del calcolo algebrico elementare. Le operazioni distributive di carattere più elementare sono, sotto questo punto di vista, le forme differenziali, la cui teoria presenta notoriamente le più strette analogie con quelle delle funzioni razionali intere; le serie di potenze di $D$, loro immediata generalizzazione, servono poi a dare l'espressione generale delle operazioni distributive applicabili a tutte le funzioni analitiche di un campo, mentre esse presentano sulle ordinarie serie di potenze della teoria delle funzioni, il vantaggio di possedere sempre un campo di convergenza (¹). Invece, nelle considerazioni di indole quantitativa, è minore questa importanza; ad esempio, l'operazione $D$ stessa non gode necessariamente della continuità, e quindi, nella nomenclatura dell'HADAMARD, non le competerebbe il nome di *operazione lineare*, nome con cui questo Autore ha creduto di dovere distinguere le operazioni continue. Questa restrizione non scema certamente l'ufficio fondamentale dell'operazione $D$ nello studio qualitativo e nella classificazione delle operazioni distributive: nel quale ordine di idee è più limitata invece l'importanza del concetto di continuità.

Le operazioni funzionali distributive stanno a rappresentare l'estensione, al campo trascendente, delle omografie di uno spazio lineare ad $n$ dimensioni. In questo ordine di idee, un insieme di infinite funzioni, quale ad esempio la totalità delle funzioni analitiche regolari nell'intorno di uno stesso punto, può riguardarsi come la realizzazione dello spazio generale del VERONESE; ogni operazione lineare definita per questo spazio si riduce, per il caso di un insieme lineare ad $n$ dimensioni contenuto nello spazio medesimo, ad una

---

(¹) PINCHERLE e AMALDI, *Le operazioni distributive ecc.*, Bologna 1901, cfr. p. 90.

ordinaria omografia. L'analogia che ne risulta fra il problema algebrico ed il trascendente potrà essere utile guida nello studio delle equazione funzionali quali le precedenti; così, la prima delle (c) s'interpreterà come ricerca dell'inversa della omografia $A$; la seconda delle (c) come determinazione delle inverse delle omografie del fascio $1 - kA$. Codesta analogia è utile, in particolare, nello studio tanto essenziale degli elementi invarianti [radici dell'equazione $\varphi - k\,A(\varphi) = 0$] in spazi sovrapposti; è allo scopo di mantenerla che ho convenuto, in lavori anteriori, di rappresentare il soggetto $\varphi$ ed il risultato $A(\varphi)$ come funzioni di una medesima lettera (1): convenzione che, del resto, non ha nulla di necessario.

In questa Nota, mi sono proposto di ricercare il legame che i metodi di risoluzione dell'equazione (b) dati dal LE ROUX, dal VOLTERRA (2), dal PICARD (3) e dal FREDHOLM hanno di comune fra di loro e con la teoria generale delle operazioni lineari. Questo legame, come si vedrà, è posto chiaramente in luce dall'uso metodico dei simboli operatori, che mostrerà una volta di più il vantaggio che offre l'impiego delle serie di potenze di tali simboli. Risulterà ancora evidente l'importanza degli elementi invarianti dell'operazione — punti uniti dell'omografia — il cui ufficio non era stato reso manifesto degli Autori fin qui citati, ad eccezione dell'HILBERT (4); la presenza di questi elementi vale ad interrompere la convergenza delle serie suddette, nello stesso modo che la presenza di un polo interrompe quella di una ordinaria serie di potenze. Infine, mentre nei casi trattati dagli accennati Autori questi elementi invarianti formano un sistema discreto, si dànno campi funzionali nei quali essi possono costituire invece insiemi continui: proprietà che differenzia in modo essenziale il caso trascendente da quello delle omografie negli spazi ad un numero finito di dimensioni.

---

(1) Ciò, a proposito di una osservazione di HADAMARD nella citata Nota dei « Comptes Rendus ».

(2) Ann. de l'Éc. Normale, S. III, T. XII, p. 244, 1895. Questo Autore risolve propriamente il problema dell'inversione d'integrale fra limiti variabili, ma esso si riconduce facilmente all'equazione (b). In « Jour. de Math., S. III, T. VI, 1900, p. 412 » estende il problema al caso di più variabili.

(3) Comptes Rendus, T. 139, p. 245.

(4) Gott. Nachrichten, 1904, p. 57.

## Capitolo I.

1. — Abbiasi un insieme lineare di elementi, che, per fissare le idee, supporremo funzioni di una variabile $x$. Indichiamo con $A$ un'operazione distributiva, univoca, applicabile ad ogni elemento $f$ di questo insieme, ed il cui risultato, che si indicherà con $A(f)$, appartenga all'insieme stesso.

L'operazione $A$ sia *continua* (1). S'intende con ciò che ad ogni numero positivo $\varepsilon$ corrisponde un numero $\delta$ tale che, per i valori di $x$ pei quali è

$$|f(x)| < \delta,$$

sia corrispondentemente

$$|A(f)| < \varepsilon.$$

La somma di un numero finito di operazioni continue è pure un'operazione continua; il prodotto di un numero finito di operazioni continue è pure un'operazione continua. Se $A$ è continua, la potenza $A^n$ lo è dunque per ogni esponente $n$ intero positivo.

2. — Nell'insieme dato di elementi consideriamo una sottoclasse o insieme $C$ distinto dalla proprietà seguente:

(A) « Esiste, per l'insieme $C$, un numero positivo $g$ tale che, qualunque sia l'elemento $f$ di $C$ e qualunque sia il valore di $x$ preso in un intervallo $\mathfrak{X}$, si abbia

$$|A^n(f)| < mg^n, \tag{1}$$

dove $m$ è un numero positivo finito. »

Come vedremo più avanti, in casi importanti e frequenti questa condizione si trova verificata.

3. — L'insieme $C$ costituisce evidentemente un sistema lineare. Se infatti $f$ ed $f_1$ appartengono a $C$, si ha

$$|A^n(f)| < mg^n, \qquad |A^n(f_1)| < m_1 g^n,$$

(1) Nel senso stabilito da Hadamard (Comptes Rendus, 9 févr. 1903).

e quindi

$$|A^n(f+f_1)| < (m+m_1)g^n ;$$

la (1) è dunque soddisfatta per $f+f_1$.

4. — Si prenda una successione arbitraria di numeri

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

purchè essi verifichino la condizione

$$|a_n| < \frac{m' \eta^n}{g^n}, \tag{2}$$

dove $m'$, $\eta$ sono due numeri positivi ed $\eta$ è minore dell'unità.

a) Per ogni elemento $f$ di $C$, e per $x$ nell'intervallo $\mathfrak{X}$, la serie

$$S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n(f) \tag{3}$$

è assolutamente convergente. Essa è inoltre uniformemente convergente, tanto rispetto alla variabile $x$ comunque presa in $\mathfrak{X}$, quanto per l'elemento $f$, comunque preso in $C$. Per la continuità di $A$, l'operazione $A$ stessa sarà quindi applicabile termine a termine alla serie (3), la quale pertanto rappresenta, entro l'insieme $C$, un'operazione $S$ univoca e commutabile con $A$.

b) L'operazione $S$ è continua. Infatti, preso il numero positivo $\varepsilon$ arbitrario, si determini $p$ in modo ehe sia

$$\left| \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n A^n(f) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

indi, siccome è continua l'operazione rappresentata da

$$S_p(f) = \sum_{n=0}^{p} a_n A^n(f),$$

si determini $\delta$ tale che per $|f| < \delta$ sia

$$|S_p(f)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ne verrà

$$|S(f)| < \varepsilon \qquad \text{per } |f| < \delta.$$

c) Infine, ponendo

$$S(f) = \varphi,$$

$\varphi$ appartiene a $C$. Infatti, essendo $p$ un intero positivo qualunque, si ha

$$A^p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^{n+p}(f),$$

e quindi, per le (1) e (2),

$$|A^p(\varphi)| < mm' \sum_n g^p \eta^n = \frac{mm'}{1-\eta} g^p;$$

la condizione (1) è dunque soddisfatta dall'elemento $\varphi$, il quale pertanto appartiene a $C$.

d) Riassumendo: *La serie* (3), *sotto le condizioni* (1) *e* (2), *rappresenta una operazione distributiva $S$ che è univoca, continua, commutabile con $A$ e che fa corrispondere ad un elemento di $C$, un elemento di $C$.*

**5.** — Fra le serie (3), merita di essere considerata in modo speciale la seguente semplicissima

$$S_1(f) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f). \tag{4}$$

La condizione (2) è allora sostituita da

$$|k| < \eta/g, \qquad (\eta < 1). \tag{5}$$

Sotto questa condizione, la $S_1$ è un'operazione che ammette le proprietà enumerate al § precedente; e poichè la serie è uniformemente convergente nell'insieme $C$ e nell'intervallo $\mathfrak{X}$, le potremo applicare l'operazione $A$ termine a termine. Otteniamo con ciò, posto $\varphi = S_1(f)$, che

$$A(\varphi) = \frac{1}{k}(\varphi - f),$$

in altri termini: *Avendosi l'equazione funzionale*

$$\varphi - k A(\varphi) = f, \tag{a}$$

*dove $f$ è un elemento dato e $\varphi$ un elemento incognito, la soluzione ne è data, sotto le condizioni* (1) *e* (5), *dalla serie*

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f). \tag{4'}$$

Sotto quelle condizioni, appartenendo a $C$ la funzione $f$, vi appartiene anche la funzione $\varphi$.

L'operazione $S_1$, sotto le dette condizioni di validità, verifica dunque l'equazione simbolica

$$S_1 - kAS_1 = 1,$$

e si può pertanto denotare con

$$S_1 = (1 - kA)^{-1}.$$

6. — *Elemento invariante* dell'operazione $A$ è detto ogni elemento $\omega$ che verifichi l'equazione funzionale

$$\omega - kA(\omega) = 0. \tag{b}$$

L'invariante $\omega$ si dice *relativo al numero $k$.*

Nessun elemento di $C$ può essere invariante di $A$ relativo ad un numero $k$ tale che sia

$$|k| < 1/g.$$

Infatti, se $\omega$ fosse un tale elemento, si avrebbe dalla (b) stessa

$$\omega = k^n A^n(\omega),$$

onde, dalla (1),

$$|\omega| < mk^n g^n;$$

$\omega$ sarebbe quindi arbitrariamente piccola in tutto l'intervallo $\mathfrak{X}$ e quindi identicamente nulla.

Risulta da questa osservazione che *la soluzione* (4) *della equazione* (a) *è unica nel campo $C$*; se, infatti, vi esistessero due soluzioni $\varphi$ e $\varphi_1$, anche $\varphi - \varphi_1$ apparterrebbe al medesimo campo e sarebbe soluzione di (b), contro ciò che abbiamo dimostrato.

7. — Un primo caso particolare si presenta quando il numero $g$ che figura nella (1), si può prendere arbitrariamente piccolo. In

tale caso la serie (4) converge per ogni valore di $k$; quindi *qualunque sia $k$, l'equazione* (a) *ammette nel campo $C$ una soluzione, ed una sola, data dalla serie* (4).

In questo caso, la serie (4) definisce univocamente l'operazione $(1 - kA)^{-1}$ per ogni valore di $k$ e per tutto l'insieme $C$.

Nel medesimo caso, consideriamo l'equazione funzionale, in $\varphi$,

$$\varphi + a_1 A(\varphi) + a_2 A^2(\varphi) + \dots + a_m A^m(\varphi) = f. \tag{c}$$

Scomponendo in fattori il polinomio

$$\alpha(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

si abbia

$$\alpha(z) = (1 - k_1 z)(1 - k_2 z) \dots (1 - k_m z),$$

essendo i numeri $k_1, k_2, \dots, k_m$ distinti, o no. Corrispondentemente, l'equazione (c) si scriverà (i fattori operativi essendo permutabili):

$$(1 - k_1 A)(1 - k_2 A) \dots (1 - k_m A)\{\varphi\} = f. \tag{6}$$

Ora, per l'ipotesi fatta su $A$, l'equazione

$$\varphi - k_m A(\varphi) = f$$

ammette in $C$ una soluzione $\varphi_1$ ed una sola; così

$$\varphi - k_{m-1} A(\varphi) = \varphi_1$$

ammette in $C$ una soluzione $\varphi_2$ ed una sola, ...; infine

$$\varphi - k_1 A(\varphi) = \varphi_{m-1}$$

ammette una soluzione $\varphi_m$ ed una sola. Questa soluzione $\varphi_m$, sostituita in (c), la soddisfa evidentemente ed è l'unica.

*Nel caso considerato, di $\Sigma k^n A^n$ trascendente intera in $k$, ogni equazione* (c) *ammette dunque una soluzione ed una sola in $C$. Se si indica con $Q$ l'operazione*

$$1 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m,$$

*è $Q^{-1}$ un'operazione univoca in $C$; ed è esprimibile mediante una serie di potenze di $A$ sempre convergente, i cui coefficienti sono quelli dello* *sviluppo di* $1/\alpha(z)$ *in serie di potenze intere positive di* $z$. *Più generalmente, se, nello stesso caso,* $\beta(z)$ *è una funzione razionale qualsiasi, e* $\beta(A) = P$ *è l'operazione che si ottiene sostituendo* $A$ *a* $z$, *l'operazione* $P$ *è univoca in* $C$ *ed esprimibile mediante una serie di potenze di* $A$ *sempre convergente.*

**8.** — Se la diseguaglianza (1) è verificata per un numero $g$, è naturalmente verificata per ogni numero maggiore. Esiste dunque, per questi numeri, un limite inferiore; sia esso $1/r$. Nel caso speciale considerato al § precedente questo limite era nullo, cioè era $r = \infty$. Nei §§ seguenti si considererà il caso di $r$ finito e diverso da zero. Dal § 6 abbiamo intanto che *non esistono elementi invarianti di* $A$ *appartenenti a numeri di modulo minore di* $r$.

**9.** — Facciamo ora la seguente ipotesi:

(B) « Esistano due numeri, $k_1$ qualunque ed $r_1$ positivo, tali che sia

$$r < |k_1| < r_1$$

e che inoltre, per ogni elemento $f$ di $C$ e per ogni valore di $x$ dell'intervallo $\mathfrak{X}$, si abbia ($m_1$ essendo positivo finito):

$$|A^{n-1} - k_1 A^n| < m_1/r_1^n . \text{ »} \tag{7}$$

Valendo la (7) per un numero $r_1$, varrà per ogni numero positivo minore: sia $r'$ il limite superiore di tali numeri $r_1$.

Per la (7), l'operazione $1 - k_1 A$ dà origine ad elementi $f_1$ soddisfacenti a

$$|A^{n-1} f_1| < m_1/r_1^n; \tag{7'}$$

gli elementi aventi questa proprietà costituiscono un insieme lineare $C_1$ contenuto in $C$. Per ogni tale elemento $f_1$, la serie $\Sigma k^n A^n f_1$ è convergente assolutamente ed uniformemente anche per $k = k_1$, e quindi per ogni $f_1$ esiste un elemento $\varphi$ in $C$ tale che

$$\varphi - k_1 A\varphi = f_1 .$$

L'insieme lineare $C_1$ si genera dunque dall'applicazione dell'operazione $1 - k_1 A$ all'insieme $C$.

**10.** — Consideriamo la serie

$$S(f) = \sum_{0}^{\infty} k^n (A^{n-1} - k_1 A^n), \tag{8}$$

dove si converrà di riguardare come nulle le potenze di $A$ di esponente negativo. Per l'ipotesi (B) la serie $S$ è uniformemente ed assolutamente convergente per $|k| < r'$. Ma essa si scrive

$$S(f) = -k_1 f + k \sum_{k=0}^{\infty} k^n A^n (f_1), \qquad [f_1 = f - k_1 A(f)],$$

e quindi

$$\frac{1}{k} \{ S(f) + k_1 f \}$$

dà l'espressione di $(1 - kA)^{-1} (f_1)$; in altri termini, come mostra una riduzione immediata, la serie $S$ soddisfa all'equazione

$$S - kAS = (k - k_1) f, \tag{9}$$

o, ciò che è lo stesso,

$$(1 - kA)^{-1} (f) = \frac{1}{k - k_1} S. \tag{9'}$$

In tal modo vediamo che, *sotto l'ipotesi* (B) *e per* $|k| < r_1$, *l'equazione funzionale* (a) *ammette in* $C$ *una soluzione data dalla serie* $\frac{1}{k - k_1} S(f)$, *essendo eccettuato soltanto il valore* $k = k_1$.

Si ha così la soluzione dell'equazione (a) in un campo più esteso di quanto si sia trovato al § 5; infatti, mentre in quel § la soluzione era data dalla serie (4') limitatamente ai valori $|k| < r$, ora essa ci è data per tutti i valori $|k| < r_1$, eccettuato $k = k_1$. Nel caso in cui, nella serie $S$, sia $|k| < r$, si può ordinare per le potenze di $A$ e si trova subito

$$S = (k - k_1) \Sigma k^n A^n;$$

la soluzione (8) coincide dunque con la (4') nel caso di $|k| < r$; mentre essa ne dà l'estensione per il caso

$$r \leq |k| < r_1$$

in cui la (4') cessa, in generale, di avere significato.

**11.** — L'equazione (9) non cessa di essere valida per $k = k_1$. In tal caso viene, indicando con $L$ l'operazione $S$ per $k = k_1$,

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n (A^{n-1} - k_1 A^n) \tag{10}$$

e la (9) diviene

$$L - k_1 A L = 0.$$

Onde *per il valore* $k = k_1$ *l'equazione funzionale* (b) *ammette soluzione, la quale è data da* $L(f)$, *qualunque sia l'elemento* $f$ *di* $C$, *purchè* $L(f)$ *stesso non sia nullo.*

**12.** — Per la proprietà (B) si può, preso $\varepsilon$ positivo arbitrario, determinare $n$ tale che sia

$$|L_n| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} k_1^\nu (A^{\nu-1} - k_1 A^\nu) \right| < \varepsilon.$$

Ora si ha

$$L = -k_1 f + k_1(f - k_1 A) + \dots + k_1^n (A^{n-1} - k_1 A^n) + L_n$$

e, riducendo,

$$L = -k_1^{n+1} A^n + L_n,$$

onde segue

$$\lim_{n=\infty} \{k_1^{n+1} A^n(f)\} = -L(f). \tag{11}$$

Ne viene che, *qualunque sia l'elemento* $f$ *di* $C$, *l'espressione*

$$k_1^{n+1} A^n(f) \tag{12}$$

*ha, per* $n = \infty$, *un limite che, se non è nullo, è radice dell'equazione* (b) *per* $k = k_1$, *cioè è un invariante di* $A$ *relativo a* $k_1$.

**13.** — Distinguiamo ora l'effetto dell'operazione $L$ secondo che essa si applica ad un elemento appartenente o no a $C_1$. Se $f$ appartiene a $C$, non sarà in generale

$$\lim_{n=\infty} \{k^{n+1} A^n(f)\} = 0,$$

poichè se ciò fosse per ogni $f$, il numero $r$ andrebbe sostituito con $k_1$. Ma se $f$ appartiene a $C_1$, risulta dalla (7′) che quel limite è zero.

Onde $L(f)$ *è nullo se* $f$ *appartiene a* $C_1$, *dà un invariante di* $A$ *relativo a* $k_1$ *negli altri casi.*

14. — L'equazione (b) ammette dunque in $C$, come abbiamo visto, soluzioni per il valore $k = k_1$. Essa non ne può ammettere per valori di $k$ diversi da $k_1$ e inferiori in modulo ad $r'$.

Infatti, sia, se è possibile, $\omega$ una soluzione, appartenente a $C$, dell'equazione

$$1 - k'A = 0$$

con

$$k' \text{ diverso da } k_1, \qquad |k'| < r_1 < r'.$$

Poichè $\omega$ appartiene a $C$, si ha [ipotesi (B)]

$$|A^{n-1}(\omega) - k_1 A^n(\omega)| < m/r_1^n; \tag{7}$$

d'altra parte

$$A(\omega) = \omega / k', \qquad A^n(\omega) = \omega / k'^n,$$

onde

$$A^{n-1}(\omega) - k_1 A^n(\omega) = \frac{k' - k_1}{k'^n}\,\omega,$$

che, se $\omega$ non è identicamente nulla e se $k'$ è diversa da $k_1$, contradice alla (7′). Di più, l'operazione non può avere, neanche per $k = k_1$, invarianti di secondo ordine o di ordine superiore, tali cioè che sia

$$1 - k_1 A = k_1(1 - k_1 A).$$

15. — Nel piano della variabile complessa $k$ si descriva il cerchio di centro il punto 0 e di raggio $r_1$. Entro questo cerchio si trova il solo punto $k = k_1$ per il quale l'operazione $A$ ammetta invarianti. Essi sono dati dai valori che acquista la somma della serie uniformemente ed assolutamente convergente indicata con $L$ per le varie $f$ di $C$, quando questa somma non sia zero; o, ciò che è lo stesso, dal

$$\lim_{n=\infty} \{k_1^{n+1} A^n(f)\}.$$

Indicheremo con $\omega_1$ uno qualunque di questi invarianti, con $\Omega_1$ il sistema lineare, sottoclasse di $C$, costituito dall'insieme degli invarianti stessi. L'operazione $L$ fa corrispondere a $C$ la sua sottoclasse $\Omega_1$, fa corrispondere lo zero alla sottoclasse $C_1$.

16. — Riprendendo la (9'), abbiamo

$$(1-kA)^{-1} = \frac{1}{k-k_1}\left\{-k_1 f + \sum_{n=1}^{\infty} k^n(A^{n-1}-k_1A^n)\right\},$$

per tutti i valori di $k$ presi dentro il detto cerchio e diversi da $k_1$. Aggiungendo e togliendo la $L(f)$ entro parentesi, si ottiene:

$$(13) \qquad (1-kA)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n-k_1^n}{k-k_1}(A^{n-1}-k_1A^n) + \frac{L(f)}{k-k_1}$$

o, brevemente,

$$(13') \qquad (1-kA)^{-1} = T(f) + \frac{1}{k-k_1}L(f).$$

La serie $T(f)$ si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n-k_1^n}{k-k_1}A^{n-1}(f_1);$$

perciò [analogamente al § 4, c)] essa rappresenta un elemento $f_1'$ di $C_1$. In quanto ad $L(f)$, esso è un elemento di $\Omega_1$.

La formula (13) è notevole, poichè essa pone in evidenza la natura dell'eperazione $(1-kA)^{-1}$ [1]; essa ci mostra come, per ogni valore $k$ diverso da $k_1$ e compreso nel cerchio $r_1$, quella operazione sia univoca. Essa si riduce illusoria, o *singolare*, per $k=k_1$, e l'ultimo termine della (13) pone in evidenza questa singolarità.

17. — Nell'insieme $C$ abbiamo distinto le due sottoclassi $C_1$ ed $\Omega_1$. Esse sono senza elementi comuni. Infatti, se $f$ appartiene a $C_1$, è $L(f)=0$ (§ 13); invece se $f$ appartiene a $\Omega_1$, si ha da (10), o da (11), che

$$L(f) = -k_1 f.$$

---

[1] Questa operazione è l'inversa del *fascio* $1-kA$ di operazioni lineari.

Ora dico che *l'insieme $C$ è la somma degli insiemi senza elementi comuni $C_1$ ed $\Omega_1$; cioè ogni elemento $f$ di $C$ si può scrivere*

$$f = f_1 + \omega_1,$$

*dove $f_1$ appartiene a $C_1$ ed $\omega_1$ ad $\Omega_1$.*

Infatti, essendo $k$ diverso da $k_1$ e minore di $r_1$ in valore assoluto, si ponga

$$\varphi = f - kA(f);$$

$\varphi$ sarà un elemento di $C$ determinato, dalla (13') si avrà

$$f = T(\varphi) + \frac{L(\varphi)}{k - k_1}.$$

Ma $T(\varphi)$ appartiene a $C_1$ (§ 16); $L(\varphi)$ appartiene ad $\Omega$; il teorema è quindi dimostrato.

Evidentemente questa decomposizione di $f$ è possibile in un sol modo.

Nel caso in cui $f$ appartenga a $C_1$, sia $f_1$, la formula (13') diviene, perchè $L(f_1) = 0$,

$$(1 - kA)^{-1}(f_1) = T(f_1); \tag{14}$$

essa vale per tutti i valori di $|k| < r_1$, incluso $k = k_1$. Per $k = k_1$ si ha

$$T(f_1) = \sum_{n=0}^{\infty} n k_1^{n-1}(A^{n-1} - k_1 A^n)(f_1);$$

però, oltre a questa soluzione di

$$\varphi - kA(\varphi) = f_1$$

si hanno tutte quelle che si ottengono aggiungendo a $T(f_1)$ un elemento arbitrario di $\Omega_1$. È questa multivocità che costituisce la singolarità di $(1 - kA)^{-1}$ per $k = k_1$.

## Capitolo II.

**18.** — Ferme restando le ipotesi (A) e (B), aggiungiamo ora una nuova ipotesi, che diremo ipotesi (C); essa è la seguente:

(C) « Esistano due nuovi numeri, uno qualunque $k_2$, l'altro positivo $r_2$, tali che sia

$$r' < |k_2| < r_2,$$

e tali inoltre che per ogni elemento $f$ di $C$ e per ogni valore di $x$ nell'intervallo $\mathfrak{X}$, si abbia

$$(15) \qquad |A^{n-2} - (k_1 + k_2) A^{n-1} + k_1 k_2 A^n| < m_2/r_2^n,$$

dove $m_2$ è un numero positivo finito. »

Vale qui per $r_2$ la stessa osservazione fatta per $r_1$ al § 9; sia $r''$ il limite superiore dei numeri $r_2$.

Sotto questa ipotesi, gli elementi $f_2$ ottenuti applicando agli $f$ di $C$ l'operazione

$$(16) \qquad (1 - k_1 A)(1 - k_2 A)$$

godono della proprietà

$$(15') \qquad |A^{n-2} f_2| < m_2/r_2^n;$$

tali elementi $f_2$ costituiscono un insieme, evidentemente lineare, che indicheremo con $C_2$; l'operazione (16) muta dunque $C$ in $C_2$. Siccome si è veduto (§ 9) che l'operazione $1 - k_1 A$ applicata a $C$ genera $C_1$, così ne concludiamo che $1 - k_2 A$ applicata a $C_1$ genera $C_2$.

È dunque $C_2$ parte di $C_1$, come $C_1$ è parte di $C$.

**19.** — Consideriamo la serie

$$(17) \qquad S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \{A^{n-2} - (k_1 + k_2) A^{n-1} + k_1 k_2 A^n\},$$

dove si intendono identicamente nulle le potenze di $A$ di esponente negativo. Per l'ipotesi (C) questa serie è assolutamente ed uniformemente convergente per tutti i valori di $k$ tali che sia $|k| < r''$. Essa si può scrivere, mettendo fuori del segno $\Sigma$ i termini per $n = 0$ ed $n = 1$,

$$S(f) = k_1 k_2 f - k \{(k_1 + k_2) f - k_1 k_2 A(f)\} + k^2 \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f_2).$$

Ma poichè l'ultima sommatoria rappresenta

$$k^2 (1 - kA)^{-1}(f_2),$$

così un calcolo immediato ci dà per $S$ la proprietà

$$(18) \qquad (S - kAS) f = (k - k_1)(k - k_2) f$$

o, ciò che è lo stesso,

$$(18') \qquad (1 - kA)^{-1} = \frac{1}{(k-k_1)(k-k_2)} S.$$

In questo modo, *sotto l'ipotesi* (C) *e per* $|k| < r_2$, *l'equazione funzionale* (a) *ammette in* $C$ *una soluzione data dalla serie* $S$ *divisa per* $(k-k_1)(k-k_2)$, *ed eccettuati soltanto i valori* $k = k_1$, $k = k_2$.

Per i valori di $|k|$ inferiori ad $r$, la serie $S$ si può ordinare per le potenze di $A$, e si riduce immediatamente a

$$(k-k_1)(k-k_2)\,\Sigma k^n A^n(f)\,;$$

la soluzione ora trovata coincide dunque con la (4'). Per i valori di $|k|$ inferiori ad $r'$, la serie $S$, in forza della condizione (7), si può ordinare secondo i binomi

$$A^{n-1} - k_1 A^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,;$$

viene allora subito

$$(19) \qquad (k-k_2)\,\Sigma k^n (A^{n-1} - k_1 A^n),$$

e quindi, per quei valori, la soluzione trovata coincide con la serie (8').

**20.** — L'equazione (18) non cessa di essere valida per $k = k_1$ o $k = k_2$, come la serie (17) non cessa, per quei valori, di essere convergente. Indicheremo con $L_1$, $L_2$ le operazioni funzionali rappresentate dalla (17) rispettivamente per $k = k_1$, $k = k_2$.

Esaminiamo dapprima la $L_1$. Poichè è $|k_1| < r_1$, si può, per quanto è detto al § precedente, trasformare la serie $S$ nella forma (19); si ha pertanto

$$L_1(f) = (k_1 - k_2)\,\Sigma k_1^n (A^{n-1} - k_1 A^n)\,;$$

ora ciò mostra che all'infuori del fattore numerico $k_1 - k_2$, la $L_1$ non differisce dall'operazione $L$ definita nel § **11**. Questa operazione dà dunque (§ **13**) come risultato lo zero se si applica ad un elemento di $C_1$, e un elemento di $\Omega_1$ (invariante relativo a $k_1$) in ogni altro caso.

**21.** — Passiamo ora a considerare l'operazione $L_2$. Fatto, nella (18), $k = k_2$, viene

$$L_2 - k_2 A L_2 = 0,$$

onde $L_2(f)$, se non è identicamente zero, è un invariante di $A$ appartenente a $k_2$.

Ora, posto

$$L_{2,n} = \sum_{n+1}^{\infty} k_2^{\nu} \{A^{\nu-2} - (k_1 + k_2) A^{\nu-1} + k_1 k_2 A^{\nu}\},$$

e preso $\varepsilon$ positivo arbitrariamente piccolo, si può determinare $n$ tale che, qualunque sia l'elemento $f$ di $C$ al quale si applica $L_{2,n}$, si abbia

$$|L_{2,n}(f)| < \varepsilon.$$

Siccome una facile riduzione dà

$$L_2 = - k_2^{n+1}(A^{n-1} - k_1 A^n) + L_{2,n},$$

così ne segue

$$\lim_{n=\infty} k_2^{n+1}(A^{n-1} - k_1 A^n) = - L_2. \tag{20}$$

Ora il limite qui scritto non è sempre nullo: infatti, se così fosse si avrebbe in tutto $C$:

$$|A^{n-1} - k_1 A^n| < \varepsilon / k_2^{n+1},$$

contro l'ipotesi che $|k_2|$ è superiore al limite superiore $r'$ degli $r_1$. Ne segue che $L_2$ non è sempre zero, e quindi esistono effettivamente invarianti di $A$ relativi a $k_2$. Diremo $\Omega_2$ l'insieme (lineare) di questi invarianti.

Evidentemente $\Omega_2$ non ha elementi comuni con $\Omega_1$; inoltre $\Omega_2$ appartiene a $C_1$; infatti, se $\omega$ è tale che sia

$$\omega - k_2 A(\omega) = 0,$$

ne risulta

$$A^n \omega = \omega / k_2^n,$$

e quindi $\omega$ soddisfa la (7').

**22.** — Se si applica $L_1$ all'insieme $C_1$, si è già visto che si ottiene zero come risultato (§ 18); quindi anche se si applica a $C_2$ che fa parte di $C_1$. Se si applica $L_2$ all'insieme $C_2$, per la (15') si può ordinare $L_2$ secondo le potenze di $A^n$, e si ha come risultato lo zero. Infine, se si applica $L_2$ all'insieme $C_1$, in generale si ha come risultato un elemento di $\Omega_2$, appartenente quindi (§ 21) a $C_1$ stesso.

**23.** — L'equazione funzionale (b) ammette, per quanto abbiamo visto, soluzioni per $k = k_1$ e per $k = k_2$ entro il campo $C$, sotto le ipotesi (A), (B) e (C). È facile vedere che questa equazione non ha invece soluzione per ogni altro valore di $k$ inferiore in modulo ad $r''$. Sia, infatti, $\eta$ soluzione di (b) per $k = k'$, $|k'| < r_2 < r''$; si avrà

$$\eta = k'A(\eta),$$

e quindi

$$(1 - k_1 A)(1 - k_2 A)\eta = \left(1 - \frac{k_1}{k'}\right)\left(1 - \frac{k_2}{k'}\right)\eta.$$

Siccome l'operazione $(1 - k_1 A)(1 - k_2 A)$ trasforma ogni elemento di $C$ in un elemento di $C_2$, ne viene che $\eta$ stesso appartiene a $C_2$ e quindi soddisfa alla (15'), cioè

$$|A^{n-2}\eta| < m_2/r_2^n.$$

Ma è

$$A^{n-2}\eta = \eta/k'^{n-2},$$

che contradice alla precedente, a meno che $\eta$ non sia identicamente zero. L'equazione (b) per $k = k'$ non ha quindi soluzione.

**24.** — Riprendendo la serie $S$ del § 19, poniamo

$$T_i = \frac{1}{k - k_i}(S - L_i), \qquad (i = 1, 2);$$

verrà

(21)
$$T_i = -(k_1 + k_2)f + k_1 k_2 A +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k^n - k_i^n}{k - k_i^n} \{A^{n-2} - (k_1 + k_2)A^{n-1} + kk_2 A^n\}.$$

Ora si ha, dalla (18'),

$$(1 - kA)^{-1} = \frac{1}{k_1 - k_2}\left(\frac{1}{k - k_1} - \frac{1}{k - k_2}\right)S,$$

onde anche

$$(1 - kA)^{-1} = \frac{1}{k_1 - k_2}\left(T_1 - T_2 + \frac{1}{k - k_1}L_1 - \frac{1}{k - k_2}L_2\right).$$

Dalla espressione (21) risulta che

$$(22) \qquad T_1 - T_2 =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{k^n - k_1^n}{k - k_1} - \frac{k^n - k_2^n}{k - k_2} \right) \left( A^{n-2} - (k_1 + k_2) A^{n-1} + k_1 k_2 A^n \right);$$

questa serie è convergente uniformemente ed assolutamente per $|k| < r_2$, e l'operazione che figura nel suo termine generale può (§ 18) scriversi

$$A^{n-2} f_2,$$

dove $f_2$ è un elemento di $C_2$. Da ciò, e dal Teorema del § 4, c), risulta che anche $(T_1 - T_2)f$ appartiene a $C_2$, qualunque sia l'elemento $f$.

Ponendo per brevità

$$T' = \frac{1}{k_1 - k_2} (T_1 - T_2),$$

e includendo il fattore $1/(k_1 - k_2)$ nei simboli $L_1$, $L_2$, il che non ha alcuna importanza, si ha infine per $(1 - kA)^{-1}$, in tutto il campo $C$ e per $|k| < r_2$, l'espressione:

$$(23) \qquad (1 - kA)^{-1} = T' + \frac{1}{k - k_1} L_1 - \frac{1}{k - k_2} L_2.$$

**25.** — La formula (23) mostra che, per ogni valore di $k$ inferiore in modulo ad $r''$ e diverso da $k_1$ e $k_2$, l'equazione

$$(a) \qquad \varphi - kA(\varphi) = f$$

ammette in $C$ una soluzione la quale (§ 23) è unica. Questa soluzione è composta di tre parti: l'una, proveniente da $T'(f)$, appartiene a $C_2$; la seconda, proveniente da $L_1(f)$, appartiene ad $\Omega_1$, la terza, proveniente da $L_2(f)$, appartiene ad $\Omega_2$ e quindi (§ 21) a $C_1$; i tre spazi $C_2$, $\Omega_2$, $\Omega_1$ sono (§ 17) senza elementi comuni.

Paragonando poi colla formula (13′), si vede che la espressione

$$T' - \frac{1}{k - k_2} L_2$$

rappresenta l'operazione $T$ di quella formula.

**26.** — Dalle cose dette possiamo trarre una conclusione importante. *Ogni elemento di $f$ si scompone, ed in modo unico, in tre elementi appartenenti rispettivamente a $C_2$, $\Omega_1$, $\Omega_2$.*

Infatti, dato un elemento $f$ arbitrario di $C$, si formi

$$g = f - kA(f),$$

ne deriva

$$f = (1 - kA)^{-1} g = T'(g) + \frac{1}{k - k_1} L_1(g) - \frac{1}{k - k_2} L_2(g),$$

che dimostra la decomposizione indicata per $f$. Dalla proprietà di $L_1$, $L_2$ e dall'essere $C_2$, $\Omega_1$, $\Omega_2$ senza elementi comuni, risulta poi subito che questa decomposizione è possibile in un sol modo.

Nel tempo stesso è dimostrato che ogni elemento di $C_1$ è decomponibile in somme di due elementi, l'uno appartenente a $C_2$ e l'altro ad $\Omega_2$.

**27.** — La formula (23) mette in evidenza, per così dire, le *singolarità* che presenta l'operazione $(1 - kA)^{-1}$ per $k = k_1$ e $k = k_2$ [1]. Essa è applicabile anche al caso di $k = k_2$ se $f$ appartiene a $C_1$, poichè $L_1$ è nullo in questo caso, e al caso di $k = k_2$ se $f$ appartiene a $C_2$. Ma in questi casi alla soluzione data dalla (23) va aggiunto rispettivamente un elemento arbitrario di $\Omega_1$ nel primo caso, di $\Omega_2$ nel secondo caso.

## Capitolo III.

**28.** — Nei §§ precedenti, siamo partiti dalla considerazione di un insieme lineare $C$ — i cui elementi siano, ad esempio, funzioni di una o di più variabili — e di un'operazione distributiva e continua $A$ applicabile agli elementi dell'insieme; aggiungendo la proprietà seguente: Per ogni numero positivo $h$ inferiore ad un numero positivo $r$, era per ogni elemento $f$ dell'insieme

$$|A^n(f)| < 1/h^n, \tag{24}$$

---

[1] La singolarità consiste in ciò: mentre l'operazione $1 - kA$ è non degenere, in generale, per i valori di $k$ minori in modulo di $r''$, lo è invece per i valori $k = k_1$, $k = k_2$.

mentre per $h > r$, almeno per certi elementi di $C$ la diseguaglianza precedente non era soddisfatta. Converremo di esprimere questa proprietà dicendo, per brevità, che *$r$ è il raggio di convergenza di $A$ nell'insieme $C$*. Così, per il caso particolare considerato nel § 7 il raggio di convergenza di $A$ in $C$ è infinito.

Abbiamo poi studiato, coll'ipotesi (B), un'operazione particolare appartenente al fascio $1 - kA$ ed avente la proprietà di *aumentare il raggio di convergenza di $A$*. La proprietà che, per amore di brevità, esprimiamo con questa locuzione, consiste in ciò: per un valore $k = k_1$, superiore in modulo ad $r$, l'operazione

$$B_1 = 1 - k_1 A$$

applicata agli elementi di $C$ dà origine agli elementi di un insieme $C_1$ contenuto in $C$ e tale che il raggio di convergenza di $A$ in $C_1$ è un numero $r_1$ maggiore di $r$ e di $|k_1|$.

Sotto questa ipotesi, si sono verificati i fatti seguenti:

a) *Esistono uno o più invarianti di $A$ relativi a $k_1$, i quali formano un insieme lineare $\Omega_1$.*

b) *L'operazione $(1 - kA)^{-1}$, per tutti i valori $|k| < r_1$, si pone sotto la forma*

$$(1 - kA)^{-1} = T + \frac{1}{k - k_1} L,$$

*dove $T$ è un'operazione univoca rappresentata per $|k| < r_1$ da una serie assolutamente ed uniformemente convergente che trasforma $C$ in $C_1$, ed $L$ un'operazione analogamente espressa, e che trasforma $C$ in $\Omega_1$.*

c) *Si può porre*

$$C = C_1 + \Omega_1,$$

*cioè ogni elemento di $f$ risulta dalla somma di un elemento di $C_1$ e di uno di $\Omega_1$; $C_1$ ed $\Omega_1$ non avendo elementi comuni.*

Dopo ciò, coll'ipotesi (C), abbiamo considerato un'operazione

$$B_2 = 1 - k_2 A,$$

che applicata a $C_1$ produce un insieme lineare $C_2$ contenuto in $C_1$, tale che il raggio di convergenza di $A$ in $C_2$ sia un numero $r_2$ maggiore di $r_1$; si ha precisamente

$$r < |k_1| < r_1 < |k_2| < r_2 .$$

Talchè $B_1B_2$ muta $C$ in $C_2$, ed aumenta quindi da $r$ ad $r_2$ il raggio di convergenza di $A$. Nell'ipotesi dell'esistenza di $B_1$ e $B_2$ si sono trovate proprietà analoghe alle precedenti a), b), c); così si ha la formula

$$(1-kA)^{-1} = T + \frac{1}{k-k_1} L_1 + \frac{1}{k-k_2} L_2,$$

dove $T$ trasforma $C$ in $C_2$, mentre $L_1$ trasforma $C$ nell'insieme $\Omega_1$ degli invarianti relativi a $k_1$, ed $L_2$ in $\Omega_2$, insieme degli invarianti relativi a $k_2$; così pure, $C$ viene a scomporsi in

$$C = C_2 + \Omega_2 + \Omega_1, \qquad \text{dove} \qquad C_2 + \Omega_2 = C_1.$$

29. — Prima di passare alla generalizzazione di questi risultati, consideriamo ancora due casi speciali. Supponiamo che non esista un'operazione della forma $1 - k_1A$ atta ad aumentare il raggio di convergenza di $A$ in $C$, ma che esista a quell'uopo un'operazione della forma

$$B = (1-k_1A)(1-k_2A) \qquad (k_1 \text{ diverso da } k_2),$$

per modo che, essendo $B(C) = C_1$ e

$$r < |k_1| \leq |k_2| < r_1,$$

sia $r_1$ il raggio di convergenza di $A$ in $C_1$. Allora, come ai §§ 19 e seguenti, si avrà la serie

$$S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^{n-2}B$$

che rappresenterà

$$(k-k_1)(k-k_2)(1-kA)^{-1};$$

si definiranno le

$$L_i = \sum_{n=0}^{\infty} k_i^n A^{n-1}B \qquad (i = 1, 2),$$

che applicate a $C$ daranno sia zero, sia invarianti di $A$ relativi a $k_i$; infine si avrà anche qui che l'insieme $C$ si può scrivere ($\Omega_1$, $\Omega_2$ essendo gli spazi invarianti relativi a $k_1$ e $k_2$)

$$C = C_1 + \Omega_1 + \Omega_2,$$

gli insiemi lineari $C_1$, $\Omega_1$, $\Omega_2$ essendo senza elementi comuni. Come nei citati §§, si ha che $L_1$ ed $L_2$ non sono identicamente nulli, e che non esistono invarianti relativi a numeri $k$ diversi da $k_1$ e $k_2$ per $|k| < r_1$.

30. — L'altro caso è quello in cui $k_1 = k_2$, nel qual caso non è più applicabile, come nel caso precedente, la formula fondamentale (23) del § 35. Nel caso di $k_1 = k_2$ si ha una sola operazione $L$. Accanto a questa

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n A^{n-2} B,$$

dove ora l'operazione che muta $C$ in $C_1$ è

$$B = (1 - k_1 A)^2,$$

si consideri l'altra operazione

$$L' = \sum_{n=1}^{\infty} n k_1^{n-1} A^{n-2} B, \tag{25}$$

che è pure espressa, come si vede, da una serie assolutamente ed uniformemente convergente.

Si verifica subito che si ha:

$$L' - k_1 A L' = \frac{1}{k_1} L, \tag{26}$$

da cui, siccome $L(f)$ è o zero, o un invariante di $A$ relativo a $k_1$, cioè una radice di

$$\varphi - k_1 A \varphi = 0,$$

risulta che $L'(f)$ sarà radice sia dell'equazione precedente, sia di

$$(1 - k_1 A)^2 \varphi = 0. \tag{27}$$

Diremo $\Omega_1'$ l'insieme degli invarianti relativi a $k_1$ e delle radici (invarianti di 2$^{\text{do}}$ ordine relativi a $k_1$) dell'equazione (27); ne viene che tanto $L(f)$ quanto $L'(f)$ dànno elementi di $\Omega_1'$.

Ciò posto, la serie

$$S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^{n-2} B$$

si può scrivere identicamente

$$S(f) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1^n A^{n-2}B + (k - k_1) \sum_{n=1}^{\infty} nk_1^{n-1} A^{n-2}B + (k - k_1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^{n-2}B,$$

dove le $c_n$ sono semplici funzioni razionali intere di $k$ e $k_1$; o in altri termini, posto

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} c_n A^{n-2}B$$

viene

$$S(f) = L - (k - k_1)L' + (k - k_1)^2 T. \tag{28}$$

Ora, per il § 4, c), $T$ muta lo spazio lineare $C$ in sè stesso; inoltre, essendo

$$(1 - kA)^{-1} = \frac{1}{(k - k_1)^2} S,$$

la (28) ci dà

$$(1 - kA)^{-1} = T + \frac{1}{k - k_1} L' + \frac{1}{(k - k_1)^2} L. \tag{29}$$

Da questa formula fondamentale si deduce infine che lo spazio $C$ si scompone in

$$C = C_1 + \Omega_1';$$

ed è questa la proprietà che si sostituisce in questo caso a quella del § 26.

31. — I casi trattati nei §§ precedenti si possono facilmente generalizzare. L'operazione che, applicata all'insieme $C$, dà un insieme $C_1$ avente il raggio di convergenza $r_1$ di $A$ superiore ad $r$, può essere data sotto la forma generale

$$B = (1 - k_1 A)^{q_1} (1 - k_2 A)^{q_2} \dots (1 - k_s A)^{q_s}. \tag{30}$$

Allora si troverà per l'operazione $(1 - kA)^{-1}$ la forma generale

$$(1 - kA)^{-1} = T + \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{L_i^{(q_i-1)}}{k - k_i} + \frac{L_i^{(q_i-2)}}{(k - k_i)^2} + \dots + \frac{L_i}{(k - k_i)^{q_i}} \right), \tag{31}$$

dove $T$ è un'operazione rappresentata da una serie

$$\Sigma c_n A^n B,$$

convergente assolutamente ed uniformemente in $C$, e che trasforma $C$ in $C_1$, mentre le $L'_i, \ldots, L_i^{(q_i-1)}$ trasformano gli elementi di $C$ negli elementi invarianti dei vari ordini rispetto a $k_i$, costituenti l'insieme $\Omega_i$. In seguito alla (31) si conclude che l'insieme $C$ è decomponibile negli insiemi $C_1, \Omega_1, \ldots, \Omega_s$, senza elementi comuni, nella forma

$$C = C_1 + \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_s.$$

Qui si suppongono i moduli delle $k_1, k_2, \ldots, k_s$ compresi fra $r$ ed $r_1$. Essendo poi

$$B' = (1 - k'_1 A)^{t_1} (1 - k'_2 A)^{t_2} \ldots (1 - k'_v A)^{t_v}$$

le $k'_1, k'_2, \ldots, k'_v$ aventi i moduli compresi fra $r_1$ ed $r_2$ $(r_2 > r_1)$, può accadere che $B'$ applicata a $C_1$ dia un nuovo insieme $C_2$ in cui il raggio di convergenza di $A$ è $r_2$; l'operazione $BB'$ trasforma allora $C$ in $C_2$, ampliando il raggio di convergenza di $A$ da $r$ ad $r_2$. L'insieme $C$, indicando con $\Omega'_i$ lo spazio degli elementi invarianti dei vari ordini (¹) relativi a $k'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, v)$, si trova scomposto così in

$$C = C_2 + \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_s + \Omega'_1 + \Omega'_2 + \ldots + \Omega'_v.$$

Introducendo una terza operazione $B''$ con ipotesi analoghe, poi una quarta $B'''$, ecc., la scomposizione si può continuare.

**32.** — Per semplicità di notazione supporremo che le operazioni che servono successivamente ad ampliare il raggio di convergenza di $A$ siano tutte della forma

$$B_i = 1 - k_i A \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

con

$$r_{i-1} < |k_i| < r_i.$$

Indicheremo con $C_1$ lo spazio che $B_1$ genera da $C$, con $C_i$ quello che $B^i$ genera da $C_{i-1}$; porremo

$$\delta_m(k) = (k - k_1)(k - k_2) \ldots (k - k_m),$$

---

(¹) Cioè le radici delle equazioni funzionali

$$\{\varphi - k'_i A(\varphi)\}^m = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, t_i).$$

e con $\delta'_m(k)$ la derivata di $\delta_m(k)$, infine faremo

$$P = B_1 B_2 \dots B_m.$$

L'operazione $(1 - kA)^{-1}$ è allora rappresentata, per tutti i valori di $k$ tali che sia $|k| < r_m$, dalla formula

$$(1 - kA)^{-1} = T + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k - k_i} L_i, \tag{32}$$

dove è

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^{n-m} P, \tag{33}$$

con

$$c_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\delta'_m(k_i)} \frac{k_1^n - k_i^n}{k - k_i}.$$

La serie $T$ è assolutamente ed uniformemente convergente per i valori $|k| < r_m$ e per ogni elemento di $C$; l'operazione da essa rappresentata trasforma $C$ in $C_m$, in cui il raggio di convergenza di $A$ è $r_m$. In quanto al risultato di $L_i$ sopra un elemento di $C$ esso è nullo o dà un elemento $\omega_i$ invariante di $A$ rispetto a $k_i$. Dalla formula (31) segue, col ragionamento del § 25, che l'insieme $C$ è decomponibile nella forma

$$C = C_m + \sum_{i=0}^{\infty} \Omega_i. \tag{34}$$

I casi possibili sono due: una simile decomposizione ci può condurre ad esaurire, cogli insiemi $\Omega_i$, tutti gli elementi di $C$, in modo che

$$C = \sum_{i=1}^{m} \Omega_i; \tag{34'}$$

oppure non si giunge a ciò. Allora, valendo la (33), saranno nuovamente possibili due casi: o, giunti all'indice $m$, non esistono più operazioni $B$ della forma $1 - \bar{k}A$ atte ad ampliare il raggio di convergenza di $A$, oppure ne esiste una successione indefinita.

Si noti infine la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^{n-m} P,$$

che soddisfa all'equazione

$$(S - kAS)f = \delta_m(k)f$$

ovvero

(35) $$(1 - kA)^{-1} = \frac{S(f)}{\delta_m(k)}.$$

## Capitolo IV.

**33.** — Veniamo ora a fare cenno di qualche applicazione della teoria precedente; per primo, consideriamo il caso, sebbene assai ovvio, di un insieme lineare $C$ ad un numero finito $m$ di dimensioni. Se $f$ è un elemento generico di questo insieme ed $f_1, f_2, \dots, f_m$ ne è un sistema fondamentale, ogni $f$ si esprimerà nella forma

(36) $$f = \overline{c}_1 f_1 + \overline{c}_2 f_2 + \dots + \overline{c}_m f_m,$$

dove $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \dots, \overline{c}_m$ sono costanti.

Data un'operazione $A$ (un'omografia) non degenere ed applicabile a tutto $C$, esistono, come è noto, $m$ invarianti di $A$ linearmente indipendenti; essi sono relativi ad $m$ numeri $k_1, k_2, \dots, k_m$ distinti o no, radici di un'equazione che, come si sa, ho detta *equazione fondamentale di A*.

Per brevità supporremo distinte le $m$ radici $k_1, \dots, k_m$ dell'equazione fondamentale; il caso delle radici multiple, salvo qualche maggiore complicazione di scrittura, non darebbe luogo a considerazioni essenzialmente diverse.

Indicando con $\omega_i$ l'invariante — unico, all'infuori di un moltiplicatore costante — relativo al numero $k_i$, allora, essendo

$$\omega_i = k_i A(\omega_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

ogni elemento $f$ di $C$ si può scrivere

(37) $$f = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \dots + c_m\omega_m.$$

L'equazione

$$\varphi - kA(\varphi) = f$$

si risolve dunque subito mediante la formula

(38) $$\varphi = \frac{c_1 k_1}{k_1 - k}\,\omega_1 + \frac{c_2 k_2}{k_2 - k}\,\omega_2 + \dots + \frac{c_m k_m}{k_m - k}\,\omega_m.$$

Questa è un'espressione dell'operazione $(1-kA)^{-1}$, che ne dà un'unica determinazione per i valori di $k$ diversi da $k_1, k_2, \dots, k_m$, e dalla quale si possono dedurre sviluppi in serie di potenze di $k$. Supponendo infatti

$$|k_1| \leq |k_2| \leq \dots \leq |k_m|,$$

si ha da (38), per $|k| < |k_1|$,

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \left( \frac{c_1 \omega_1}{k_1^n} + \dots + \frac{c_m \omega_m}{k_m^n} \right),$$

che in altra forma si scrive, richiamando l'espressione (37) di $f$,

$$(1-kA)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f).$$

Ritroviamo così lo sviluppo (4').

Sia ora $k$ compreso in modulo fra $|k_s|$ e $|k_{s+1}|$. Moltiplicando la (38) per $(k_1 - k)(k_2 - k) \dots (k_s - k) = \delta_s(k)$, viene

$$\begin{aligned}(39) \qquad \delta_s(k)\varphi = \sum_{i=1}^{s} c_i k_i (k_1 - k) \dots (k_{i-1} - k)(k_{i+1} - k) \dots \\ \dots (k_s - k)\omega_i + \delta_s(k) \sum_{i=s+1}^{m} \frac{c_i k_i}{k_i - k} \omega_i .\end{aligned}$$

Sviluppando questa espressione in serie di potenze di $k$ per $|k| < |k_{s+1}|$, si ottiene, come si può verificare con calcolo facile, la serie indicata con $S$ nei §§ 10, 19, 29, 31. Inoltre la espressione (39) stessa indica la decomposizione dello spazio $C$ in due parti: lo spazio degli elementi invarianti $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$, e quello $C_s$ degli elementi

$$c_{s+1}\omega_{s+1} + \dots + c_m \omega_m,$$

in cui il raggio di convergenza di $A$ è $|k_{s+1}|$; decomposizione indicata, per il caso generale, al § 32.

34. — Come seconda applicazione, consideriamo l'insieme $C$ delle funzioni di una variabile reale data nell'intervallo $0 \dots 1$, limitate ed integrabili. Essendo $\alpha(x, t)$ una funzione limitata e continua delle due variabili $x$ e $t$ nel rettangolo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$,

l'operazione $A$ sia definita dall'espressione

(40) $$A(f)=\int_0^x \alpha(x,\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\;.$$

Essendo l'integrale una funzione continua e limitata di $x$, esso è un elemento dell'insieme $C$; si possono quindi definire in questo insieme le operazioni $A^2$, $A^3$, ... .

Sia $\mu$ superiore ai valori assoluti di $f(t)$ nell'intervallo 0 ... 1, $m$ superiore al valore assoluto di $\alpha(x,\,t)$ nel quadrato $0\leq x\leq 1$, $0\leq t\leq 1$; sarà

$$|A(f)|<\mu m x$$

e quindi

(41) $$|A^2(f)|<\frac{\mu m^2 x^2}{2}\,,\quad \ldots,\quad |A^n(f)|<\frac{\mu m^n x^n}{n!}\,.$$

Queste diseguaglianze dimostrano che, secondo la locuzione introdotta al §28, il *raggio di convergenza di $A$* nell'insieme $C$ è infinito. Siamo dunque nel caso studiato al §7. L'equazione

(b) $$\varphi-kA(\varphi)=0$$

non ammette quindi soluzione per alcun valore di $k$; in altri termini, l'operazione $A$ non ha invarianti in $C$. L'operazione

(a) $$\varphi-kA(\varphi)=f\,,$$

dove $f$ è data in $C$ e $\varphi$ è incognita, ammette in $C$ una soluzione, ed una sola, data per tutti i valori finiti di $k$ e in tutto l'intervallo $0\leq x\leq 1$ dalla serie, uniformemente ed assolutamente convergente,

(42) $$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k^n A^n(f)\,.$$

La serie (42) è una funzione trascendente intera in $k$.

**35.** — Con procedimento dovuto al VOLTERRA [1] questa serie (42) si può modificare in modo notevole. Ponendo $\alpha_1(x,\,t)$ invece di

---

[1] Atti della R. Accad. di Torino, T. XXXI, 11 gennaio 1896.

$\alpha(x, t)$, si ha

$$A(f) = \int_0^x f(t)\, \alpha_1(x, t)\, dt\,;$$

ora si faccia analogamente

$$A^n(f) = \int_0^x f(t)\, \alpha_n(x, t)\, dt\,; \tag{43}$$

ne verrà

$$AA^n(f) = A^{n+1}(f) = \int_0^x \alpha_1(x, t) \int_0^t f(t_1)\, \alpha_n(x, t_1)\, dt_1\, dt\,,$$

ed applicando la nota formula per l'inversione delle integrazioni, dovuta a Dirichlet, viene

$$A^{n+1}(f) = \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x \alpha_1(x, t)\, \alpha_n(t, t_1)\, dt\, dt_1\,,$$

onde fra le $\alpha_n$ la relazione ricorrente

$$\alpha_{n+1}(x, t) = \int_0^x \alpha_1(x, u)\, \alpha_n(u, t)\, du\,. \tag{44}$$

La (44) viene così a scriversi:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x f(t) \sum_{n=1}^{\infty} k^n \alpha_n(x, t)\, dt \\[2ex] \alpha_1(x, t) = \alpha(x, t), \qquad \alpha_n(x, t) = \displaystyle\int_t^x \alpha_1(x, u)\, \alpha_{n-1}(u, t)\, du\,. \end{array}\right. \tag{45}$$

È notevole la forma che si può dare qui alla *legge degli esponenti:*

$$A^{m+n} = A^m A^n\,.$$

Questa relazione si scrive infatti

$$\int_0^x f(t)\, \alpha_{m+n}(x, t)\, dt = \int_0^x \alpha_m(x, t) \int_0^t f(t_1)\, \alpha_n(t, t_1)\, dt_1\, dt$$

e, applicando ancora l'inversione di DIRICHLET,

$$\int_0^x f(t)\, \alpha_{m+n}(x, t)\, dt = \int_0^x f(t_1) \int_{t_1}^x \alpha_m(x, t)\, \alpha_n(t, t_1)\, dt\, dt_1\,,$$

onde, la relazione valendo per ogni $f(t)$,

$$\alpha_{m+n}(x, t) = \int_t^x \alpha_m(x, u)\, \alpha_n(u, t)\, du\,. \tag{46}$$

Questa è la formula (7) della Memoria citata del VOLTERRA.

36. — L'applicazione così semplice della teoria generale, data al § 34, conduce anche alla soluzione, dovuta al LE ROUX e al VOLTERRA (¹), di un problema d'inversione d'integrale definito. Sia $f$ una funzione finita, continua, derivabile nell'intervallo 0 ... 1, gli estremi compresi, e la cui derivata sia pure finita e continua nell'intervallo; sia inoltre $f(0) = 0$; sia $\alpha(x, t)$ finita e continua entro il quadrato

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

e ammetta in quel campo la derivata $\alpha(x, t)$ rispetto ad $x$, pure finita e continua. Si ponga

$$\alpha(x, x) = h(x)\,,$$

e si supponga il limite inferiore dei valori assoluti di $h(x)$ differente da zero.

Sotto questa ipotesi, sia da risolvere, rispetto alla funzione incognita $\varphi(t)$, l'equazione funzionale

$$\int_0^x \varphi(t)\, \alpha(x, t)\, dt = f(x)\,; \tag{47}$$

(¹) Lavoro citato.

in altre parole, sia da eseguire *l'inversione dell'integrale definito* che costituisce il primo membro della (47).

Deriviamo pertanto la (47) rispetto ad $x$ [1]; viene

$$f'(x) = \int_0^x \varphi(t)\, \alpha'(x, t)\, dt + \varphi(x)\, h(x)\,,$$

ossia

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t)\, \frac{\alpha'(x, t)}{h(x)}\, dt = \frac{f'(x)}{h(x)}\,. \tag{48}$$

Indicando con $A$ l'operazione espressa da

$$A(\varphi) = \int_0^x \varphi(t) \frac{\alpha'(x, t)}{h(x)}\, dt\,,$$

l'equazione (44) appartiene al tipo risoluto nei §§ precedenti, il parametro $k$ avendo ora il valore $-1$. Esiste quindi per questa operazione una soluzione unica, data dalla serie, uniformemente ed assolutamente convergente nell'intervallo $0 \dots 1$,

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{h(x)} - A\left(\frac{f'}{h}\right) + A^2\left(\frac{f'}{h}\right) - \dots\,; \tag{49}$$

e questa, col metodo indicato al § 35, si trasforma in

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x) = \frac{f'(x)}{h(x)} - \frac{1}{h(x)} \int_0^x f'(t) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \alpha_n(x, t)\, dt\,, \\ &\alpha_1(x, t) = \frac{\alpha'(x, t)}{h(t)}\,, \qquad \alpha_n(x, t) = \int_0^x \alpha_1(x, u)\, \alpha_{n-1}(u, t)\, du\,, \end{aligned}\right. \tag{50}$$

che è la formula di VOLTERRA per la risoluzione della (47).

---

[1] Seguendo in ciò il LE ROUX: Annales de l'Éc. Normale, S. II, T. VII, 1895. Cfr. PICARD, Comptes Rendus, 25 juillet 1904.

**37.** — Importantissimo è l'altro caso di risoluzione dell'equazione lineare (a), trattato dal FREDHOLM (1). Consideriamo ancora l'insieme $C$ delle funzioni finite e continue nell'intervallo $0 \dots 1$, e la funzione $\alpha(x, t)$ finita ed integrabile nel quadrato

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

L'operazione $A$ sia ora data, $f$ essendo un elemento arbitrario in $C$, da

$$A(f) = \int_0^1 f(t)\, \alpha(x, t)\, dt. \tag{51}$$

Questa operazione è evidentemente continua nel senso stabilito al § **1**, e si ha, $m$ e $\mu$ avendo lo stesso significato che al § **34**,

$$|A^n(f)| < \mu\, m^n. \tag{52}$$

Il *raggio di convergenza dell'operazione* $A$ nell'insieme $C$ non è dunque inferiore ad $1/m$.

Per $|k| < 1/m$ l'equazione

$$\varphi - kA(\varphi) = f \tag{a}$$

ammette in $C$ un'unica soluzione data da

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f), \tag{53}$$

ed in corrispondenza non esistono invarianti di $A$.

**38.** — La serie (53) è, per $|k| < 1/m$, convergente assolutamente, ed uniformemente tanto rispetto ai vari elementi $f$ di $C$ quanto rispetto ai valori $0 \leq x \leq 1$ della variabile. Ora il risultato del FREDHOLM si può, dal nostro punto di vista, enunciare così:

*Esiste una funzione intera, di* $k$,

$$\delta(k) = 1 - g_1 k + \frac{g_2 k^2}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{g_n k^n}{n!} + \dots \ (2) \tag{54}$$

(1) Acta Math., T. XXVII, p. 365, 1903. L'Autore osserva (pag. 366) che la sua formula di risoluzione contiene come caso particolare quella del VOLTERRA.

(2) Detto dal FREDHOLM *determinante dell'equazione* (a).

*tale che il prodotto di* $\delta(k)$ *per la serie* (53) *dà*

$$\delta(k)\,\Sigma k^n A^n(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}\, G_n(f), \qquad G_0(f) = f, \tag{55}$$

*dove anche la serie del secondo membro è funzione intera in* $k$.

Per mostrare come ciò sia, si noti che dall'eguaglianza dei coefficienti di $k^n$, la (55) dà

$$(-1)^n \frac{G_n}{n!} = A^n - g_1 A^{n-1} + \frac{g_2}{2!} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{g_{n-1}}{(n-1)!} A + \frac{g_n}{n!} f,$$

onde segue subito la relazione ricorrente

$$n A G_{n-1} = G_n - g_n f\,; \tag{56}$$

relazione da cui, inversamente, si risale alla (55). Ora, posto

$$\int_0^1 \alpha(t,t)\, dt = g_1, \qquad \int_0^1 \begin{vmatrix} f(x) & f(t) \\ \alpha(x,t) & \alpha(t,t) \end{vmatrix} dt = G_1(f),$$

si ha subito la (56) per $n = 1$; posto

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \begin{vmatrix} \alpha(t,t) & \alpha(t,u) \\ \alpha(u,t) & \alpha(u,u) \end{vmatrix} dt\, du = g_2,$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \begin{vmatrix} f(x) & f(t) & f(u) \\ \alpha(x,t) & \alpha(t,t) & \alpha(u,t) \\ \alpha(x,u) & \alpha(t,u) & \alpha(u,u) \end{vmatrix} dt\, du = G_2(f),$$

si verifica immediatamente la (56) per $n = 2$. E così via; in generale, posto

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \cdots \int_0^1 \begin{vmatrix} \alpha(t_1,t_1) & \alpha(t_1,t_2) \dots & \alpha(t_1,t_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha(t_n,t_1) & \alpha(t_n,t_2) \dots & \alpha(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n = g_n,$$

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} f(x) & f(t_1) & \dots & f(t_n) \\ \alpha(x, t_1) & \alpha(t_1, t_1) & \dots & \alpha(t_1, t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(x, t_n) & \alpha(t_n, t_1) & \dots & \alpha(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n = G_n(f),$$

si verifica la (56) per un valore qualunque di $n$. Allora mediante l'applicazione di un teorema di HADAMARD sul valore assoluto massimo di un determinante, il FREDHOLM nota che è

$$|g_n| < \mu^n \sqrt{n^n}, \qquad |G_n| < \mu^{n+1}\sqrt{(n+1)^{n+1}},$$

ed è quindi dimostrato che le serie

$$\delta(k), \qquad \Sigma \frac{k^n}{n!} G_n(f)$$

sono funzioni intere di $k$. La formula (35) è così dimostrata.

39. — È ora facile applicare a questo caso le considerazioni generali della teoria del Cap. III. Siano $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ le radici della funzione intera $\delta(k)$ in ordine di modulo crescente, e siano $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ i rispettivi ordini di multiplicità. Poniamo, $r$ essendo un numero positivo arbitrariamente grande, che $k_1, k_2, \dots, k_m$ siano tutte e sole le radici di modulo inferiore ad $r$, e facciamo

$$\delta_m(k) = \left(1 - \frac{k}{k_1}\right)^{s_1}\left(1 - \frac{k}{k_2}\right)^{s_2} \cdots \left(1 - \frac{k}{k_m}\right)^{s_m}, \qquad \delta(k) = \delta_m(k)\,\varrho_m(k).$$

Si ha allora, dalla (55), dapprima per $|k| < 1/m$,

$$\delta_m(k) \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f) = \frac{1}{\varrho_m(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} G_n(f), \tag{57}$$

e scrivendo

$$\delta_m(k) = 1 + a_{m1}k + a_{m2}k^2 + \dots + a_{mq}k^q,$$

la (57) diviene

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n(A^n + a_{m1}A^{m-1} + a_{m2}A^{m-2} + \dots + a_{mq}A^{m-q}) = \frac{1}{\varrho_m(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} G_n(f), \tag{57'}$$

dove ora il confronto col secondo membro dimostra la convergenza assoluta ed uniforme del primo membro per tutti i valori di $k$ inferiori ad $r$ in valore assoluto. L'applicazione della operazione

$$A^q + a_{m,1}A^{q-1} + \dots + a_{m,q-1}A + a_{m,q}$$

agli elementi di $C$ aumenta dunque fino ad $r$ il raggio di convergenza, e ci troviamo così nel caso studiato al Cap. III. Per ogni valore di $k$ diverso da $k_1$, $k_2$, ... l'equazione (a) ammette una soluzione ed una sola: per ogni valore $k = k_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, l'equazione ammette infinite soluzioni che si ottengono da una di esse aggiungendo un elemento dell'insieme invariante relativo a $k_i$, ed il metodo del citato Cap. III insegna con la serie $T$ a trovare una delle soluzioni, e con le serie $L$ a trovare gli elementi invarianti.

**40.** — I casi che rientrano nelle teorie del Cap. III, come quello di un insieme $C$ ad $m$ dimensioni, quello trattato dal LE ROUX e dal VOLTERRA e quello considerato in generale dal FREDHOLM, non sono però i soli che si possano presentare. Anzi si potrebbero riguardare questi, dove gli elementi invarianti si presentano solo per valori speciali del parametro $k$, come singolarmente semplici. Per mostrare, con un esempio ovvio, come si possa invece verificare il caso che per ogni valore di $k$ si presentino elementi invarianti, consideriamo l'operazione $A$ ridotta alla semplice operazione $D$ di derivazione.

L'equazione

$$\varphi - kD\varphi = f, \tag{58}$$

dove $f$ è, per esempio, una funzione finita e continua nell'intervallo $0 \dots 1$, ammette infinite soluzioni pure finite e continue per ogni valore di $k$; esse si ottengono da una qualunque di esse coll'aggiunta del termine $ce^{x/k}$, $c$ essendo una costante arbitraria. In altri termini, l'elemento invariante, soluzione di

$$\varphi - kD\varphi = 0 \tag{59}$$

è funzione continua di $k$, invece di esistere, come nei campi $C$ degli esempi precedenti, solo per valori particolari e discreti di $k$.

La serie

$$\Sigma k^n D^n f \tag{60}$$

è generalmente divergente e non vale a dare la soluzione dell'equazione (58) se non in un campo funzionale limitato. Questo campo è l'insieme $C'$ delle funzioni intere, d'ordine 1,

$$\varphi = \sum_0^\infty \frac{c_n x^n}{n!}$$

per le quali

$$|c_n| < m/r^n, \qquad r < |k|.$$

Le derivate delle funzioni di $C'$ appartengono evidentemente all'insieme $C'$ stesso.

Per ogni elemento $f$ di $C'$ la serie (60) è assolutamente ed uniformemente convergente ed appartiene a $C'$ stesso, inoltre è la sola soluzione di (58) appartenente a questo insieme. Ma non si può applicare la teoria generale in quanto permette di aumentare il raggio di convergenza di $D$, a meno che non si restringa ancora il campo $C'$ riducendolo all'insieme delle funzioni della forma

$$\sum_n g_n \, e^{x/k_n},$$

dove il numero dei termini è finito, o, se infinito, dove la serie, insieme a quelle ottenute mediante la derivazione termine a termine di tutti gli ordini, è convergente e rappresenta un elemento di $C$.