Salvatore Pincherle

La trasformazione di Laplace e le serie divergenti

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Vol. **5** (1900-1901), p. 63–78

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 158–171

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_158>

21 [111].

La trasformazione di Laplace e le serie divergenti.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ; (Nuova Serie) **5**, 63-78 (1900-1901).

1. — È noto da lungo tempo che, dovendosi risolvere l'equazione

$$D\psi - z\psi = \alpha\,, \tag{1}$$

dove α è una data funzione analitica della variabile x, z un numero dato, ψ una funzione incognita e D è il simbolo di derivazione, la soluzione viene data formalmente dalla serie

$$-\frac{1}{z}\,\alpha - \frac{1}{z^2}\,D\alpha - \frac{1}{z^3}\,D^2\alpha - \dots . \tag{2}$$

Ma a questa osservazione, per così dire sperimentale, non si è attribuito che uno scarso valore, e su di essa poco si è fermata l'attenzione dei matematici. Non pertanto, da essa si possono desumere alcune considerazioni estendibili facilmente a casi ben più generali, e che non sono prive d'interesse.

2. — Anzitutto, per ogni funzione α, che in un campo del piano della variabile complessa x sia regolare e renda la serie (2) uniformemente convergente, la (2) stessa rappresenta effettivamente una funzione analitica ben determinata, che dà una soluzione dell'equazione (1) regolare in quel medesimo campo. Per una simile funzione α, la (2) rappresenta quindi un metodo d'integrazione della (1) perfettamente legittimo.

3. — Si può subito osservare di quale natura venga ad essere la funzione α per la quale ciò si verifica. Indichiamo con x_0 un punto del piano della variabile x in cui $\alpha(x)$ sia regolare, con d_0 la distanza del punto x_0 dal più prossimo punto singolare di α; infine col segno $\backsim$ posto fra due espressioni dipendenti dall'indice n, denotiamo che sia l'una che l'altra sono coefficienti di t^n in serie di potenze di t convergenti nello stesso cerchio. Allora basta l'esame della serie di TAYLOR per mostrare come sia

$$\frac{1}{n!}\,D^n\alpha \backsim \frac{1}{d_0^n}\,.$$

Da ciò risulta subito che la convergenza di (2) richiede che sia $d_0 = \infty$: cioè richiede che α sia una funzione intera. Ma solo speciali funzioni intere rendono convergente la (2); tale è, ad esempio, $\alpha = e^{tx}$ per $|t| < |z|$; tali sono pure tutte le funzioni razionali intere, per le quali lo sviluppo (2) si riduce ad avere solo un numero finito di termini.

4. — L'espressione $D\psi - z\psi$ si può riguardare come risultato dell'operazione $E = D - z$ applicata alla funzione ψ. Questa operazione, univoca, ammette una inversa E^{-1} a determinazione multipla, per la quale due determinazioni qualsivogliano differiscono per un termine ce^{zx}, dove c è una costante arbitraria.

Consideriamo ora l'insieme delle funzioni α intere (razionali o trascendenti) per le quali la serie (2) o si riduce ad un polinomio, o converge uniformemente. Questo insieme costituisce *il campo di validità* della serie (2); esso è lineare, in quanto che ad esso appartiene qualunque combinazione lineare a coefficienti costanti dei suoi elementi. *In questo campo la* (2) *rappresenta un ramo univoco* K_0 *dell'operazione* E^{-1}.

5. — Qui si dà luogo ad una prima osservazione: la distinzione cioè fra *operazione funzionale*, ed *espressione che la rappresenta.* La E^{-1} è un'operazione che per ogni funzione α è definita (non univocamente) come integrale generale dell'equazione (1); la serie (2) dà invece un *ramo* di questa operazione univoca, ma valido solo per un campo limitato di funzioni. Si presenta pertanto il medesimo fatto che si ha nella teoria delle funzioni analitiche, in cui *ad una funzione analitica competono varie espressioni aritmetiche*, ognuna delle quali può rappresentare un ramo univoco della funzione soltanto in una porzione del campo della validità della funzione stessa; così la

serie

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

rappresenta la frazione $\frac{1}{1-x}$ solo nell'interno del cerchio $|x| = 1$.

6. — Il ramo della E^{-1} rappresentato dalla serie (2), o ramo K_0, non è il solo che abbia una simile proprietà. Se scriviamo lo sviluppo

$$K_1 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-x)^{n+1}} E_1^n, \tag{3}$$

dove si è posto $E_1 = D - x_1$, essendo x_1 un numero arbitrario, si verifica subito che si ha formalmente

$$(D - z) K_1 = 1,$$

e quindi, per un campo di validità conveniente, la K_1 rappresenta, al pari della K, un ramo univoco dell'operazione a determinazione multipla E^{-1}. A questo campo di validità appartengono sole funzioni intere, fra cui tutte le razionali, e le esponenziali e^{tx} sotto la condizione

$$|t - x_1| < |z - x_1|. \tag{4}$$

La e^{zx} non appartiene a questo campo di validità, per nessun valore di x_1; ma ogni e^{tx} in cui sia t differente da z vi appartiene per valori di x_1 convenientemente scelti, e cioè precisamente quando si prendano in modo da soddisfare alla (4).

È manifesta la relazione che intercede fra il primitivo sviluppo K_0 e gli sviluppi K_1, o fra gli sviluppi K_1 l'uno con l'altro: relazione perfettamente analoga a quella con cui si deducono uno dall'altro i vari sviluppi in serie di potenze della funzione $1/z - x$ col metodo della *continuazione analitica*.

7. — Gli sviluppi K_0, K_1, ora trovati, godono di una proprietà notevole: essi sono *commutabili colla derivazione*. Questa proprietà, essenziale nell'operazione $E = D - z$, non appartiene invece necessariamente alla sua inversa, come si vedrà fra breve; bensì ai rami speciali di codesta inversa che abbiamo testè determinati.

A questa proprietà è dovuto il fatto or ora notato, che la funzione e^{zx}, integrale dell'equazione $E = 0$ o, come diciamo, *radice* di

E, non appartiene al campo di validità di alcuno fra gli sviluppi K o K_1. Infatti, se $K_1(e^{zx})$ avesse significato, si avrebbe da una parte

$$(D - z)\, K_1(e^{zx}) = e^{zx}\,; \tag{5}$$

dall'altra, essendo K_1 commutabile con D e quindi con $D - z$,

$$(D - z)\, K_1(e^{zx}) = K_1\,(D - z)\,(e^{zx})\,;$$

ma e^{zx} è radice di $D - z$, onde, per essere K_1 a determinazione unica, sarebbe $(D - z)\, K_1(e^{zx}) = K_1(0) = 0$, il che contraddice alla (5).

Il fatto ora osservato è analogo a quello ben noto della teoria delle funzioni, secondo il quale il contorno del cerchio di convergenza è caratterizzato da qualche punto *singolare*, cioè in cui viene a mancare in qualche parte quella definizione della funzione che ne permetteva lo sviluppo in serie di potenze.

8. — Per l'operazione E^{-1} si può anche dare lo sviluppo formale

$$K_\infty = D^{-1} + z\, D^{-2} + z^2\, D^{-3} + \ldots + z^n\, D^{-(n+1)} + \ldots\,. \tag{6}$$

Anche a questo si può dare validità effettiva in un campo conveniente; ad esempio, facendo $\alpha = 1$ e prendendo delle $D^{-1}, D^{-2}, \ldots, D^{-n}, \ldots$ la determinazione principale, viene

$$K_\infty(1) = x + \frac{z\, x^2}{2} + \frac{z^2\, x^3}{3\,!} + \ldots = \frac{e^{zx} - 1}{z}\,.$$

Il ramo dell'operazione E^{-1} dato dalla (6), a differenza dei rami K_0 e K_1, non è a determinazione unica: in forza della multiplicità di determinazioni delle $D^{-1}, D^{-2}, \ldots$, esso pure ammette determinazioni multiple. Questo ramo non ammette poi in generale la commutabilità colla D, come si vede subito assumendo, ad esempio, la determinazione principale per le D^{-n}. Questa commutabilità con D si ha solo se, ad ogni applicazione della D^{-1}, si determina la costante di integrazione in modo che sia

$$D^{-1}\, D\, \varphi = \varphi\,;$$

in tale ipotesi si vede pure che lo sviluppo (6) ha un campo di validità limitato a funzioni intere, che e^{xt} vi appartiene per $|t| > |z|$, e che la e^{zx} si trova anche qui al limite del campo medesimo: valendo ancora l'osservazione fatta al § 7.

Invece, quando nella (6) si ponga per ciascuna delle D^{-n} la determinazione principale, lo sviluppo stesso, non più commutabile colla derivazione, ammette nel suo campo di validità ogni funzione φ regolare nell'intorno di $x=0$, come si verifica senza difficoltà fondandosi sul noto limite superiore di $|D^{-m}\varphi|$ (1).

9. — Consideriamo lo sviluppo (6) nell'ipotesi che per le D^{-1}, $D^{-2}, \ldots$ si assumano le determinazioni principali. In tale ipotesi esiste per D^{-m} lo sviluppo, in serie di potenze positive di D (2),

$$D^{-m}\varphi = \frac{x^m}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!\,(n+m)} D^n\varphi\,,$$

che viene detto *sviluppo di Bernoulli generalizzato.* Sostituendo nella (6), ed ordinando secondo le potenze di D, si ottiene per la E^{-1} lo sviluppo:

(7)
$$K(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} D^n\varphi\,,$$

dove è

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{\frac{z^{n+1}\,x^{n+1}}{n+1} + \frac{z^{n+2}\,x^{n+2}}{(n+2)\cdot 1!} + \frac{z^{n+3}\,x^{n+3}}{(n+3)\cdot 2!} + \ldots\right\}$$

o, come si verifica immediatamente,

$$\alpha_n = e^{xz}\left(1 - \frac{x\,z}{1} + \frac{x^2\,z^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n\,z^n}{n!} - e^{-xz}\right).$$

Si verifica subito che lo sviluppo (7) rappresenta l'operazione E^{-1}, poichè i suoi coefficienti α_n soddisfano alla relazione, in cui l'accento indica la derivazione,

$$\alpha_0' - z\,\alpha_0 = 1\,, \quad \alpha_n' = z\,(\alpha_n - \alpha_{n-1})\,.$$

Ma questo sviluppo differisce essenzialmente da quelli incontrati dianzi e denotati con K_0, K_1. Infatti, manca anzitutto a K la pro-

---

(1) Vedasi il § 158 della mia opera: *Le operazioni distributive ecc.*, in collaborazione con U. AMALDI (Zanichelli, Bologna 1901).

(2) Op. cit., § 156.

prietà di essere commutabile con D, e si ha invece

$$KD - DK = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha'_n}{z^{n+1}} D^n \varphi \tag{8}$$

o, come si verifica senza difficoltà, $KD - DK = e^{xz}\,\varphi(0)$.

Inoltre, il suo campo di validità è infinitamente più esteso di quello delle K_0, K_1. Si verifica subito, infatti, che se φ è una serie di potenze di x convergente entro un cerchio di raggio r, lo sviluppo (7) converge uniformemente sotto la condizione $|x| < r/2$, in guisa che codesto campo di validità comprende tutte le funzioni analitiche aventi un ramo regolare per $x = 0$, mentre quello delle K_0, K_1 era limitato ad una classe speciale di funzioni intere.

10. — Riassumendo:

L'integrazione dell'equazione (1), *o inversione dell'operazione* $E = D - z$, *si può eseguire mediante serie ordinate per le successive derivate di* α. *Di queste serie, alcune,* K_0, K_1, *non hanno significato se non quando* x *è funzione intera razionale, o trascendente appartenente ad una classe speciale: un'altra invece* K, *converge per ogni funzione* α *regolare per* $x = 0$. *Gli sviluppi della prima specie si deducono l'uno dall'altro come i diversi sviluppi in serie di* $1/(1-x)$, *cioè col metodo della continuazione analitica; e con metodo analogo si deduce uno sviluppo* K_∞ *per le potenze* ψ *di* D^{-1}, *formato come lo sviluppo di* $1/(1-x)$ *in serie di potenze negative di* x. *Questo sviluppo* K_∞ *serve di passaggio fra i primi sviluppi* K_0, K_1, *e lo sviluppo* K, *che, per l'ampiezza del suo campo di validità, si può riguardare come l'espressione analitica genuina dell'operazione* E^{-1}.

11. — Considerazioni perfettamente analoghe si possono ripetere per l'equazione a coefficienti costanti

$$a_0 D^p \psi + a_1 D^{p-1}\psi + \dots + a_{p-1} D\psi + a_p \psi = \alpha, \tag{9}$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_p$ sono numeri dati, α una funzione analitica data e ψ una funzione da determinarsi. Indicando con $F(\psi)$ il primo membro della (9), la risoluzione dell'equazione proposta equivale alla determinazione dell'operazione F^{-1}. Per tale operazione si trova dapprima uno sviluppo K_0 secondo le potenze intere positive di D a coefficienti costanti: coefficienti i quali sono quelli stessi dello sviluppo di

$$(a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p)^{-1} \tag{10}$$

in serie di potenze positive di x. Da questo primo sviluppo K_0 si deducono sviluppi K_1 in serie di potenze di $E = D - x_1$, i cui coefficienti sono quelli dello sviluppo di (10) in serie di potenze di $x - x_1$, in guisa che si può dire che K_1 si ottiene da K_0 col metodo stesso della continuazione analitica. Infine si ha uno sviluppo K_∞ in serie di potenze intere negative di D, e questo ha i coefficienti stessi dello sviluppo di (10) per le potenze negative di x. Ma in quest'ultimo sviluppo K_∞ rimane arbitraria la scelta della determinazione di $D^{-1}, D^{-2}, \dots, D^{-n}, \dots$. O si sceglie questa determinazione in modo che lo sviluppo riesca commutabile con D, al pari di K_0 e di K_1: ed allora, come per questi, il campo di validità dello sviluppo stesso è ristretto ad una classe limitata di funzioni intere. O si prende invece per le $D^{-1}, \dots, D^{-n}, \dots$ la determinazione principale, e si ha uno sviluppo K_∞ valido per ogni funzione ψ regolare per $x = 0$. Sostituendo a D^{-n} la citata sua espressione (§ 9) o sviluppo del BERNOUILLI generalizzato, si giunge ad un'espressione per F^{-1} che si può riguardare come la più naturale, in uno sviluppo della forma

$$F^{-1} = \Sigma\, \alpha_n D^n, \tag{11}$$

valido per ogni funzione regolare nell'intorno di $x = 0$ ed i cui coefficienti soddisfano all'equazione

$$F(\alpha_n) + F'(\alpha_{n-1}) + \frac{1}{2} F''(\alpha_{n-2}) + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(\alpha_{n-p}) = 0, \tag{12}$$

essendo $F', F'', \dots$ le derivate funzionali successive [1] della operazione F. Lo sviluppo (11) è stato ottenuto mediante lo sviluppo sussidiario K_∞; esso non è commutabile con D e quindi neppure con F; si ha invece che l'espressione

$$KF - FK$$

dà un integrale dell'equazione $F = 0$.

---

(1) Op. cit., § 152.

12. — In ciò che precede abbiamo posto in riscontro le serie di potenze che dànno lo sviluppo della funzione $(x - z)^{-1}$ e le serie che rappresentano l'inversa dell'operazione $E = D - z$. Riscontro che si continuava però solo fino ad un certo punto, poichè lo sviluppo (6), analogo a quello di $(x - z)^{-1}$ in serie di potenze negative di x, viene ad essere una espressione a determinazione multipla, per il fatto della multiplicità delle determinazioni di D^{-1}. Ma fra le serie che rappresentano $(x - z)^{-1}$ e quelle che dànno l'espressione di E^{-1} vi è più di una semplice analogia: le une si possono riguardare come *trasformate* delle altre, nel modo che andiamo ad indicare.

13. — Richiamiamo anzitutto le proprietà della *trasformazione di Laplace*. Questa si può riguardare dapprima come una operazione (1) tale che essendo $L(\psi) = \alpha$, ne risulti

$$L(x\psi) = D\alpha, \qquad L(D\psi) = -x\alpha. \tag{13}$$

Ma si può prescindere dal carattere di operazione della L, e riguardarla piuttosto come una *trasformazione* applicabile alle operazioni.

Indichiamo con M_μ l'operazione di moltiplicazione per μ (1); se allora B è la trasformata di un'operazione A mediante L, cioè se si ha

$$LAL^{-1} = B,$$

le proprietà essenziali di cui gode la L, e che conseguono dalle (13), sono espresse da

$$LM_xAL^{-1} = DB, \quad LAM_xL^{-1} = BD, \tag{14}$$

$$LDAL^{-1} = -M_xB, \quad LADL^{-1} = -BM_x. \tag{14'}$$

In particolare

$$LM_xL^{-1} = D, \quad LDL^{-1} = -M_x,$$

onde

$$L\,M_{\frac{1}{x}}\,L^{-1} = D^{-1},$$

da cui la multiplicità di determinazioni di L.

---

(1) Op. cit., § 386 e seguenti.

14. — Ricordando (¹) che la derivata funzionale di A è $AM_x - M_x A = A'$, che la derivata funzionale seconda è $A'' = A'M_x - M_x A'$, e così via, avremo dalle (14)

$$LA'L^{-1} = BD - DB.$$

Data un'operazione B, indicheremo con B_1 la nuova operazione che viene dedotta da B mediante l'espressione

$$B_1 = BD - DB;$$

così porremo

$$B_2 = B_1 D - DB_1 = BD^2 - 2\,DBD + D^2 B,$$

ed in generale

$$B_n = B_{n-1}\,D - DB_{n-1}.$$

Ne viene che da $LAL^{-1} = B$, si deduce

$$LA'L^{-1} = B_1, \quad LA''L^{-1} = B_2, \quad \dots . \tag{15}$$

In modo analogo si ha

$$LA_1L^{-1} = -B', \quad LA_2L^{-1} = B'', \quad \dots . \tag{15'}$$

15. — Richiamate così alcune proprietà della trasformazione di Laplace, riprendiamo la funzione $x - z$; ma invece di considerare le serie che dànno lo sviluppo dell'inversa di questa funzione, consideriamo l'operazione distributiva che consiste nel dividere per $x - z$ una funzione analitica arbitraria φ. Rappresentando con ω il quoziente, abbiamo dunque

$$(x - z)\,\omega = \varphi. \tag{16}$$

Facciamo ora la trasformata mediante L di questa equazione, ponendo $L(\omega) = \psi$, $L(\varphi) = \alpha$; otteniamo come equazione trasformata

$$D\psi - z\psi = \alpha,$$

(¹) Ibid., § 140.

cioè l'equazione (1). *L'operazione E^{-1} si presenta dunque come la trasformata mediante L dell'operazione di divisione per $x - z$.* Ogni sviluppo soddisfacente alla (16) sarà trasformato, mediante L, in uno sviluppo soddisfacente alla (1); così la L applicata a

$$- \Sigma \frac{x^n \varphi}{z^{n+1}}$$

darà lo sviluppo (2). In tale modo l'analogia notata fra gli sviluppi di $(x - z)^{-1}$ e quelli di E^{-1} viene precisata, essendo riscontrato che esiste una determinata trasformazione mediante la quale si passa dagli uni agli altri.

16. — Dalle proprietà (14) e (14') dell'operazione L risulta senz'altro che se un'operazione è commutabile con la M_x, la sua trasformata è commutabile con D. Siccome le operazioni commutabili con M_x sono le operazioni di moltiplicazione (1), così si può dire che (salvo l'eccezione proveniente dalla multiplicità di determinazioni di L notata alla fine del § 13) la L fa corrispondere ad una moltiplicazione un'operazione o un ramo di operazione commutabile con D. Il caso trattato nei §§ precedenti ne fornisce un esempio.

17. — Consideriamo ora un esempio alquanto diverso e non meno istruttivo. Proponiamoci di determinare un'operazione B che debba soddisfare alla relazione

$$B' - B = D^{-1}, \tag{17}$$

dove B' è, al solito, la derivata funzionale di B.

Osserviamo anzitutto che se si determina una speciale operazione $\overline{B}$ soddisfacente alla (17), l'operazione più generale che vi soddisfi sarà

$$B = \overline{B} + B_0,$$

dove B_0 è la soluzione generale dell'equazione

$$B' = B;$$

---

(1) Op. cit., § 202.

ora quest'ultima soluzione è data (1) da

$$B_0(\varphi) = \mu(x)\,\varphi(x+1),$$

essendo $\mu(x)$ un moltiplicatore arbitrario.

Ciò posto, se l'equazione (17) ammette come soluzione un ramo di operazione commutabile con D, la trasformata della equazione medesima mediante la L^{-1} ammetterà una soluzione corrispondente commutabile con M_x, cioè un'operazione di moltiplicazione. Ora, la trasformata di (17) mediante la L^{-1}, posto $L^{-1}(B) = A$, è l'equazione

$$DA - AD - A = M_{1/x}. \tag{18}$$

Sia $A = M_\mu$ una soluzione di questa equazione: μ è il moltiplicatore da determinarsi. Indicando con μ' la derivata, e sostituendo nella (18), si vede subito che μ deve soddisfare all'equazione

$$\mu' - \mu = \frac{1}{x}; \tag{19}$$

e ad un integrale μ di questa corrisponderà la moltiplicazione M_μ, di cui la trasformata $B = L\,M_\mu\,L^{-1}$ sarà pertanto la soluzione dell'equazione proposta (17).

18. — Ad uno sviluppo di μ in serie di potenze di $x - x_1$ corrisponderà uno sviluppo di B in serie di potenze di $E_1 = D - x_1$; lo stesso, con le solite avvertenze relative alla determinazione di D^{-n}, si ha trasformando mediante L lo sviluppo dell'integrale dell'equazione (19) in serie di potenze di $1/x$.

Questo sviluppo è la ben nota serie, divergente per ogni valore di x differente da zero,

$$\mu = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}, \tag{20}$$

alla quale la trasformazione L fa corrispondere il ramo di operazione

$$B = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,n!\,D^{-(n+1)}. \tag{21}$$

---

(1) Op. cit., § 153.

Mentre lo sviluppo (20) soddisfa solo formalmente alla corrispondente equazione (19), lo sviluppo (21) che se ne è dedotto ha un campo di validità determinato, il quale, quando per D^{-n} si scelga la determinazione principale, comprende, come si verifica facilmente, tutte le serie di potenze di x il cui raggio di convergenza non è nullo e per tutti i valori di x minori in modulo dell'unità.

19. — L'esempio che precede mostra come sia possibile dedurre, da una serie divergente che soddisfa *formalmente* ad un'equazione differenziale [1], uno sviluppo rappresentante *effettivamente* una determinata operazione distributiva. Questo esempio è un caso speciale di una questione generale, che si può formulare come segue:

Sia data una equazione (a) *alla quale debba soddisfare una operazione B; questa equazione sia lineare nella B e nelle sue derivate funzionali, ed i suoi termini contengano l'operazione D che moltiplichi quante volte si vogliano le $B, B', B'', \ldots$. Sia* (b) *la trasformaata di questa equazione mediante l'operazione L^{-1}; all'equazione* (b) *soddisferà la $L^{-1}BL = A$.*

Se l'equazione (a) *ammette una soluzione commutabile con la derivazione, la* (b) *ammetterà come soluzione un'operazione commutabile con M_x, cioè un'operazione M_μ di moltiplicazione. In questa ipotesi, la* (b) *fornirà un'equazione differenziale lineare alla quale soddisfa il moltiplicatore μ per il quale, coi noti principi della teoria delle equazioni differenziali lineari, si potrà ottenere uno sviluppo in serie di potenze avente, o no, un raggio di convergenza diverso da zero. Ma in ogni caso la trasformata mediante L di quello sviluppo darà una soluzione dell'equazione* (a)*, valido in un campo funzionale più o meno esteso, ma sempre esistente.*

20. — Reciprocamente, sia data un'equazione differenziale lineare a coefficienti polinomi

$$\text{(c)} \qquad \Sigma\, a_{mn}\, x^m\, D^n \omega = 0 \quad [2].$$

Ad essa soddisfi formalmente uno sviluppo in serie di potenze,

---

(1) Serie considerate, come è noto, dal THOMÉ e dal POINCARÉ. Vedasi PICARD, *Traité d'Analyse*, T. 3, (pag. 282); BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, (p. 36).

(2) Il caso dell'equazione non omogenea non presenterebbe differenza sostanziale.

per esempio intere positive della variabile,

$$\omega(x) = \Sigma\, k_\nu\, x^\nu . \tag{d}$$

Sostituendo ad x il simbolo D di derivazione, si ha un'operazione (o ramo di operazione)

$$K = \Sigma\, k_\nu\, D^\nu \tag{e}$$

commutabile con D, la quale ammette in ogni caso un campo di validità. Di quale proprietà godrà inoltre questa operazione?

Per vedere ciò, sostituiamo ad ω, nell'equazione (c), una operazione di moltiplicazione $A = M_\omega(\varphi)$. Viene

$$DM_\omega\, \varphi = \omega'\varphi + \omega\varphi' ,$$

da cui

$$\omega'\varphi = (DM - MD)(\varphi) = - A_1 ,$$

così

$$D^2 M_\omega \varphi = \omega''\varphi + 2\omega'\varphi' + \omega\varphi'',$$

onde

$$\omega\varphi'' = D^2 M - 2\, DMD + MD^2 = - A_2$$

e così via. Talchè la (c) viene a sostituirsi con

$$\Sigma\, (-1)^n\, a_{mn}\, M_x^m\, A_n = 0 . \tag{f}$$

Di questa equazione si faccia la trasformata mediante L, tenuto conto delle relazioni (15), e, posto $LAL^{-1} = B$, si ottiene l'equazione trasformata

$$\Sigma\, a_{mn}\, D^m\, B^{(n)} = 0 . \tag{g}$$

Questa è la relazione alla quale soddisfa il ramo di operazione K dato dallo sviluppo (e).

21. — Il metodo indicato nel § precedente non è senza analogia con quello tenuto dagli antichi analisti nel cercare l'interpretazione di una serie numerica in sè priva di significato. Così, data la serie [1]

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

---

(1) Borel, op. cit., pp. 4 e 9.

vi sostituivano la serie di potenze

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e consideravano il modo di comportarsi di essa in vicinanza di $x = 1$. Analogamente, ad una serie di potenze (d) noi sostituiamo lo sviluppo (e) il quale ha significato per tutte le funzioni di un campo funzionale determinato, anche se la (d) è divergente per ogni valore della variabile. Fondandosi poi sull'osservazione che si ha

$$K(e^{tx}) = e^{tx}(k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots) \text{ (}^1\text{)},$$

l'espressione di $K(e^{tx})$ potrà dare indicazione su quelle funzioni di t che godono *effettivamente* delle proprietà che appartengono *solo formalmente* allo sviluppo (d), come quella di soddisfare ad equazioni differenziali lineari d'ordine finito od infinito.

---

[1] Vedasi la mia Nota nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 13 février 1899 ».