Salvatore Pincherle

Mémoire sur le calcul fonctionell distributif

Mathematische Annalen, Vol. **49** (1897), p. 325–382

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 2, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 1–70

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_2_1>

16 [92].

Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif.

Mathematische Annalen (Leipzig);
49, 325-382 (1897).

Introduction.

La science des nombres, soit dans son développement historique, soit dans l'exposé d'un programme d'études, nous présente au premier abord une division en deux parties distinctes. La première s'occupe des nombres, de leur classification, de leurs propriétés, de la façon d'opérer sur eux, à un point de vue que l'on pourrait appeler *statique*, c'est à dire en laissant toujours aux nombres, objets de cette étude, des valeurs fixes; dans la seconde au contraire, le nombre est considéré à un point de vue *dynamique*: c'est un élément essentiellement variable et dominé par les concepts de dépendance, de limite, de continuité, etc.. Cette deuxième partie comprend l'analyse mathématique, la théorie des fonctions avec ses divers chapitres et ses nombreuses applications. Mais en examinant avec plus d'attention quelques uns de ces chapitres — comme la théorie des formes algébriques, le calcul des variations, plusieurs recherches sur les équations différentielles, d'autres de physique mathématique, etc. — on s'aperçoit que l'idée de nombre s'est en quelque sorte effacée, pour donner place à celle de fonction, considerée en elle-même, et qui s'y substitue comme élément variable. Aux deux premières parties que l'on a aperçues dès l'abord dans la science des nombres, s'en ajoute ainsi une troisième, à laquelle on pourrait donner le nom de *Calcul fonctionnel*: on réunirait sous ce titre les chapitres de l'analyse où l'élément variable n'est plus le nombre, mais la fonction considérée en elle-même.

Bien que le Calcul fonctionnel comprenne, comme on vient de le dire, plusieurs des chapitres les plus intéressants de l'analyse, les principes généraux qui le gouvernent ont à peine été entrevus. Cependant on doit remarquer dès à présent qu'on peut y suivre deux voies bien distinctes, ainsi que cela a lieu dans la théorie ordinaire des fonctions. Dans celle-ci nous avons en effet deux directions différentes par la méthode et par le but. L'une mène à la théorie des fonctions de variables réelles au sens de DIRICHLET, où la dépendance entre la fonction et ses arguments est tout-à-fait arbitraire; l'autre conduit à la théorie des fonctions analytiques, où la nature arithmétique de cette dépendance a, au contraire, la plus grande importance. La première, plus extensive, nous permet d'obtenir des résultats plus généraux; l'autre, plus intensive, pénètre plus profondément dans l'essence intime des propriétés des fonctions. Il en est de même dans le Calcul fonctionnel: là aussi, on a le choix entre deux ordres de recherches, soit qu'on veuille étudier les conséquences qui résultent du seul fait qu'un élément varie en suite de la variation arbitraire d'une ou de plusieurs fonctions, soit qu'on préfère étudier et classifier les différentes formes que peuvent présenter les opérations qu'on peut exécuter sur les fonctions et que nous appellerons opérations fonctionnelles.

Au premier ordre d'idées appartient le Calcul des variations. Dans ce calcul, on étudie la variation d'une quantité qui dépend d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires en vue des applications qui en découlent pour la détermination des maxima et minima des intégrales définies: mais l'étude de ces variations présente aussi un intérêt intrinsèque et peut être poussée plus loin. C'est ce qu'a fait M. VOLTERRA. Dans quelques Notes d'un grand intérêt, il considère une quantité y qui dépend de toutes les valeurs qu'une fonction $\varphi(x)$, définie dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, prend dans cet intervalle; il définit la variation de y pour une variation arbitraire de $\varphi(x)$, pose la notion de continuité, et sous certaines restrictions, il arrive enfin à une formule qu'il nomme formule de TAYLOR généralisée et qui donne le développement de y en une série dont les termes sont des intégrales multiples dépendants de y [1]. Ces recherches de M. VOLTERRA, d'une généralité si remarquable, appartiennent évidemment au premier des deux points de vue que nous avons signalés

---

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. III (agosto-novembre 1887). Une extension de cette formule de TAYLOR généralisée à été donnée, par Mlle FABRI (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, T. XXV, p. 654) pour le cas de quantités dépendantes de plusieurs fonctions.

dans le Calcul fonctionnel: on n'y suppose rien sur la nature de l'opération qu'on exécute sur $\varphi(x)$ pour obtenir y, et cette remarque n'est pas contredite par le fait que la série de TAYLOR généralisée donne, sous certaines restrictions, une expression de l'opération en question: c'est quelque chose d'analogue à ce que l'on a dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, où la série de FOURIER sert à donner l'expression d'une fonction arbitrairement donnée.

Dans les recherches qui se placent au second point de vue, comme c'est le cas pour le présent Mémoire, il en est tout autrement. C'est la nature particulière des opérations qu'on a à exécuter sur les fonctions variables qui a ici la plus d'importance. On pourra commencer par l'étude des opérations les plus simples; ensuite, par compositions et par inversions successives, on passera au fur à mesure aux plus compliquées, de même que dans la théorie des fonctions analytiques on s'élève successivement des fonctions rationnelles aux trascendantes élémentaires, puis aux algébriques, et ainsi de suite. Nous remarquons sans peine, dès le début, que les opérations fonctionnelles nous offrent une très grande variété: pour ne citer que les plus communes, nous trouvons parmi elles, en outre de toutes les opérations arithmétiques, celle de dérivation, celle de différentiation finie, de substitution, etc., et celles qu'on obtient par la réitération, la composition et l'inversion de celles que nous venons d'énumérer. Parmi ces opérations, lesquelles convient-il de regarder comme les plus simples? Laissons-nous conduire par l'analogie avec les fonctions: la plus simple d'entre elles est la fonction linéaire qui satisfait (sous la condition de s'annuler pour la valeur zéro de la variable) à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=f(x)+f(y);$$

en d'autres termes, elle jouit de la propriété distributive. En outre, cette propriété est caractéristique de la fonction linéaire, au moins parmi celles qui ne sont pas infinies dans tout intervalle fini [1]. Si nous passons aux opérations fonctionnelles, nous trouvons que les plus fréquentes jouissent de la propriété distributive: telles sont la dérivation et la différentiation finie, simples ou multiples, l'intégration, et la classe nombreuse d'opérations qui consistent dans la multiplication d'une fonction arbitraire de n variables $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

(1) DARBOUX, Math. Annalen, Bd. XVII, p. 55.

par une fonction déterminée α de ces variables et d'autres p paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_p$, et dans l'intégration définie entre des limites données, par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (1). Enfin, on voit immédiatement que les opérations qui jouissent de la propriété distributive, et que nous appellerons précisément *opérations distributives*, forment un groupe.

Une grande partie des travaux de Calcul fonctionnel qui se placent à notre second point de vue s'occupent effectivement d'opérations distributives. Passons sommairement en revue quelques uns des plus remarquables. Nous trouvons d'abord LAPLACE, avec sa théorie des fonctions génératrices (2), où à chaque fonction a_n d'une variable n correspond la fonction $\varphi(x)$, définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et qu'il a appelée fonction génératrice de a_n. On peut mettre la relation entre ces deux fonctions sous forme d'intégrale définie, et cette relation est évidemment distributive. Cette théorie a été reprise par ABEL (3), qui appelle $\varphi(x, y, z)$ fonction génératrice de $f(u, v, w)$ et celle-ci fonction déterminante de la première, lorsque ce deux fonctions sont liées par la relation

$$\varphi(x, y, z) = \iiint e^{ux+vy+wz} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw,$$

où les intégrations sont prises entre des limites fixées. Ici on aperçoit clairement l'idée de correspondance — au sens géométrique moderne du mot — entre la variété des fonctions f et celles des fonctions φ. De nombreux auteurs, depuis BESSEL jusqu'à M. POINCARÉ, ont donné des applications de cette correspondance (4), sans parler d'autres correspondances ou transformations fonctionnelles plus ou moins analogues et plus ou moins générales, qui ont occupé

---

(1) M. VOLTERRA m'a fait remarquer qu'en se fondant sur la formule (18) du § 61 du présent Mémoire (que j'ai publiée déjà dans les Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. V, T. IV, p. 142) on peut mettre, au moins formellement, une opération distributive quelconque sous forme d'une semblable intégrale définie.

(2) *Théorie analytique des probabilités*, p. 9 et suiv. (Paris, V^{ve} Courcier, 1820).

(3) Oeuvres complètes, 2ème éd., T. II, Mém. XI.

(4) Voir mon Mémoire: *Sulla trasformazione di Laplace*, Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VIII.

un grand nombre de géomètres (1). A cet ordre de recherches appartient la question de l'inversion des intégrales définies (2).

La dérivation à indices quelconques est une opération distributive qui a, depuis LEIBNIZ, interessé des savants celèbres (3). Cette opération, dont il ne semble pas qu'on ait encore donné la forme définitive, se rattache d'un côté aux transformations fonctionnelles qu'on vient de citer, de l'autre au calcul symbolique ou calcul des opérations, dont la nomenclature et les méthodes s'introduisent spontanément dans les études sur les opérations fonctionnelles, surtout dans celles qui ont un caractère formel ou algorithmique. Le calcul des opérations, quoique déjà ancien, est considéré avec quelque défiance par la plupart des mathématiciens du continent, tandis que de nombreux auteurs anglais s'en sont constamment occupés : le « Philosophical Magazine », les « Philosophical Transactions » et d'autres recueils contiennent, depuis plus de quarante ans, de nombreuses Notes à ce sujet (4). Cette défiance dépend sans

---

(1) V. par exemple : RIEMANN, *Werke*, pag. 140 ; SPITZER, plusieurs Notes dans le Grunert's Archiv, T. XXXII et XXXIII ; APPELL, Annales de l'École Normale, S. II, T. IX ; PINCHERLE, Mem. dell'Accad. delle Scienze di Bologna, S. IV, T. VII ; JENSEN, Bulletin de l'Académie des Sciences de Danemark, 1894, etc.. V. aussi HEINE, Crelle, T. LX, LXI et LXII ; POCHHAMMER, plusieurs Mémoires dans le Journal de Crelle et dans les Math. Annalen (t. XXXV) ; PINCHERLE, Mem. dell'Accad. di Bologna, S. V, T. II ; MELLIN, Acta Soc. Fennicæ, T. XXI ; SCHLESINGER, Crelle, T. CXVI et CXVII, etc..

(2) V., sur le problème d'inversion des intégrales définies, la notice bibliographique dans mon Mémoire : *Studi sopra alcune operazioni funzionali.* Mem. dell'Accad. di Bologna, S. IV, T. VII. Parmi les travaux publiés sur ce sujet postérieurement à cette notice, v. mon Mémoire dans le T. X des Acta Mathematica, deux Notes de M. LEVI-CIVITA (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, S. II, T. XXVIII, et Rendiconti della R. Accad. di Torino, T. XXI), enfin deux Notes de M. VOLTERRA (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, S. V, T. V, 1896).

(3) Sur le calcul des dérivées à indices quelconques, v. LEIBNIZ, *Oeuvres,* T. III, p. 105 et correspondance avec BERNOUILLI, passim. Cfr. EULER, Comment. Petropolit., 1730-31 ; FOURIER, *Théorie de la chaleur,* p. 564 ; LACROIX. *Calcul différentiel,* 3ème éd., T. III, p. 409 ; LIOUVILLE, Journal de l'École Polytechnique, T. XIII ; SPITZER, Grunert's Archiv, T. XXXII et XXXIII ; RIEMANN, *Werke,* S. 331 ; HOLMGREN, Mém. de l'Académie des Sciences de Stockholm, T. V, 1866 ; OLTRAMARE, *Essai sur le calcul de généralisation* (Genève, lithogr.), p. 63.

(4) DE JELLETT, GRAVES, BOOLE, SYLVESTER, MURPHY, etc.. Voir aussi GREGORY (*Exemples on the diff. and integr. Calculus*), BOOLE (*Treatise on differ. equations*), CARMICHAEL (*Treatise on the Calculus of operations*), FORSYTH (*Differ. equations*), etc.. En outre CASORATI (Annali di Matematica, S. II, T. X), P. CAZZANIGA (Giornale di Battaglini, T. XX), LUCAS (*Théorie des nombres,* chap. XIII et XIV), etc..

doute du caractère formel que présente ce calcul, et du peu de peine qu'on s'est donné pour limiter ses résultats de façon à les rendre rigoureux; néanmoins plusieurs de ses applications qui, interprétées convenablement, sont susceptibles de toute rigueur, offrent beaucoup d'intérêt: par exemple la déduction des intégrales d'une équation différentielle de ceux d'une autre (1), la décomposition en facteurs du premier membre d'une équation lineaire différentielle ou aux différences finies, à coefficients constants (2) ou variables (3), etc.. A propos du calcul symbolique, on peut encore mentionner une méthode à laquelle son inventeur, M. OLTRAMARE, a donné le nom de calcul de généralisation (4). Cette méthode, qui semble découler du calcul des dérivées à indices quelconques de LIOUVILLE, se fonde sur l'application d'une opération distributive spéciale G. L'auteur obtient, par cette méthode, de nombreuses formules de calcul intégral: mais, outre que la permutabilité de l'opération G avec l'intégration définie, dont il est fait usage, ne semble pas démontrée, le défaut de précision qu'on note dans les Mémoires de M. OLTRAMARE ne laisse aux résultats qu'il obtient, qu'une valeur assez limitée.

Il nous reste enfin à citer quelques travaux qui regardent encore le calcul fonctionnel, mais qui s'en occupent à un point de vue nouveau, qui permet de rendre très claires et presque intuitives certaines généralités de ce calcul. C'est le point de vue vectoriel ou du calcul géométrique, inspiré par l'Ausdehnungslehre de GRASSMANN et par les écrits de HAMILTON et de TAIT sur les quaternions. Dans cet ordre d'idées, M. PEANO a écrit quelques pages très intéressantes (5) où, d'une façon aussi sobre que claire, il donne les propriétés les plus simples des opérations distributives appliquées à des éléments déterminés par n coordonnées: on peut dire que c'est une esquisse de la théorie des opérations fonctionnelles distributives exécutées sur les fonctions d'un ensemble linéaire n fois infini;

---

(1) V. BOOLE, CARMICHAEL et FORSYTH, ouvrages cités.

(2) V. CASORATI et CAZZANIGA, loc. cit.. Voir aussi VASCHY, Journal de l'École Polytechnique, cahier 63, 1893.

(3) LIBRI, Crelle, T. X; CARMICHAEL, ouvrage cité, et autres jusqu'à SCHLESINGER, *Handbuch der lin. Differentialgleichungen,* Bd. I, zweiter Abschnitt.

(4) *Sur la généralisation des identités.* Mém. de l'Institut national génevois, T. XVI, 1886. *Essai sur le calcul de généralisation.* Genève, chez Stapelmohr (lithogr.), 1896.

(5) *Calcolo geometrico,* Cap. IX, p. 141 (Turin, Bocca).

par exemple sur les polynômes entiers à une variable de degré non supérieur à $n-1$. L'auteur note encore, sans y insister, qu'on pourrait aussi considérer des systèmes linéaires à un nombre infini de dimensions (1). Le même point de vue se retrouve dans un travail étendu de M. CARVALLO (2), dont la première partie considère les substitutions linéaires comme des opérations (l'auteur dit *opérateurs*) appliquées aux vecteurs de l'espace ordinaire : la seconde partie, qui traite du calcul différentiel de ces opérations, rentre comme cas particulier, dans l'ordre des considérations de M. VOLTERRA que nous avons rappelées ci-dessus. Au même ordre d'idées, bien que le concept vectoriel n'y soit pas explicitement énoncé, se rattachent d'autres travaux importants : pour n'en citer qu'un, le Mémoire de M. FROBENIUS sur les formes bilinéaires (3) et les nombreuses recherches que ce beau Mémoire a inspirées (4).

Après avoir ainsi passé sommairement en revue les principaux travaux où, à ma connaissance, se trouvent des idées analogues à celles qui ont dirigé les recherches que j'expose ici, qu'il me soit permis d'indiquer rapidement le plan et le but du présent travail.

L'objet de ce Mémoire est l'étude des opérations distributives qu'on peut appliquer aux fonctions analytiques, plus particulièrement aux séries de puissances entières et positives de la variable x, et qui donnent comme résultat des séries de la même nature. Nous considérons l'ensemble de ces séries comme une variété ou espace (que nous appelons *espace fonctionnel*) à un nombre infini de dimensions : chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système des coefficients de la série peut se regarder comme le système de ses coordonnées. Les opérations distributives donnent des correspondances de cet ensemble sur lui-même, correspondances qui sont analogues aux homographies et se réduisent aux homographies mêmes lorsque on les applique à des variétés à un nombre fini de dimensions contenues dans l'espace fonctionnel. Ces opérations donnent lieu à un calcul que l'on peut pousser assez loin et qui offre assez d'analogie avec le calcul ordinaire des fonctions, grâce à l'opération de dérivation ordinaire, que nous indiquons par

(1) Loc. cit., dans (5) à la page précédente (cfr. p. 143).

(2) *Sur les systèmes linéaires etc.*, Monatshefte für Math. und Physik, Bd. II, S. 177, 225, 311 (1891).

(3) Crelle, T. LXXXIV, p. 1.

(4) V. par exemple STUDY, Monatshefte für Math. und Physik, Bd. II, S. 23 ; SFORZA, Giornale di Matematiche, T. XXXIV, etc..

D, et qui est l'élément fondamental de ce calcul où D^n joue le même rôle que jouent, dans la théorie des fonctions, les puissances de la variable. De plus, les expressions auxquelles on est conduit (séries de puissances de D, de D^{-1}, etc.) n'ont pas seulement une existence formelle : sous des restrictions convenables, elles sont tout aussi valables que les séries convergentes ordinaires de l'analyse. C'est là un des points sur lesquels nous avons insisté.

Notre Mémoire se divise en quatre chapitres. Dans le premier, après quelques généralités sur les opérations distributives, on traite des racines de ces opérations, puis des opérations appliquées aux variétés linéaires à un nombre fini de dimensions, et au moyen du concept de racines d'une opération, on retrouve d'une façon tout-à-fait simple et naturelle la décomposition d'une homographie par les diviseurs élémentaires de WEIERSTRASS. Le deuxième chapitre traite des propriétés générales des opérations distributives appliquées à tout l'espace fonctionnel : on y definit certaines opérations fort simples, on y introduit le concept de dérivation fonctionnelle qui va être fort utile, enfin, A étant une opération et φ et ψ deux fonctions, on obtient le développement de $A(\varphi\,\psi)$ sous une forme tout-à-fait analogue à celle de la série de TAYLOR. Pour terminer ce chapitre, nous montrons qu'une opération, ou une classe d'opérations, peut être déterminée par une équation symbolique : nous en donnons un exemple dont nous déduisons comme cas particulier le groupe des opérations que M. SCHAPIRA a pris comme base de son « Cofunctional Rechnung ». Le troisième chapitre a pour objet l'expression, sous forme de séries de puissances de D ou de D^{-1}, des opérations distributives, l'étude des conditions de convergence et de validité de ces expressions, leurs conditions d'identité qui donnent lieu à une extension de la méthode des coefficients indéterminés, enfin l'énoncé et la solution d'un problème d'interpolation fonctionnelle analogue aux problèmes d'interpolation qui se présentent dans la théorie des fonctions. Enfin le quatrième chapitre est consacré à deux applications : l'une, à la question des dérivées à indices quelconques, que nous définissons au moyen d'une équation symbolique, l'autre, à l'expression générale de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire non homogène en série de puissances de D^{-1}, à coefficients exprimables rationnellement au moyen des coefficients de l'équation [1].

---

(1) Plusieurs des résultats contenus dans ce Mémoire ont fait l'objet de quelques Notes préventives que j'ai publiées dans les Comptes rendus des Acadé-

Ce travail est certainement incomplet sur bien des points: pour n'en citer qu'un, il faudrait développer le § 104 de façon à obtenir la décomposition d'une opération distributive appliquée à tout l'espace fonctionnel comme on a décomposé, au Chap. I, les opérations appliquées à une variété d'ordre fini; mais je n'y suis pas encore parvenu. Il y aurait encore, non seulement à étendre les résultats obtenus aux opérations qui portent sur plusieurs fonctions ou sur des fonctions de plusieurs variables, comme l'a indiqué M. CALÒ [1], mais à géneraliser l'espace fonctionnel au delà des séries de puissances, à étudier les équations symboliques et les équations fonctionnelles linéaires comme on étudie les équations différentielles ou aux différences et comme M. GRÉVY [2] a étudié les équations formées linéairement avec les opérations itératives, etc.. Mais nous espérons que, malgré ces lacunes, notre essai suffira à prouver qu'on peut pénetrer assez profondément dans l'étude des opérations fonctionnelles par des moyens suffisamment élémentaires, et sans l'usage des intégrales définies qui ont l'inconvénient d'introduire des considérations étrangères à la théorie des opérations.

CHAPITRE I.

Les opérations distributives dans une variété à un nombre fini de dimensions.

I. — Généralités.

1. — Les éléments sur lesquels opère le calcul qui forme l'objet de cette étude, sont les séries ordonnées selon les puissances entières et positives d'une variable x. Nous donnerons à ces éléments le nom de fonctions: ce mot de *fonction* signifie donc, dans ce qui suit et à moins qu'on ne dise explicitement le contraire, *série de puissances*. Par $n^{\text{ème}}$ coefficient de la série nous entendons

---

mies dei Lincei, de Turin et de l'Institut Lombard pour les années 1895 et 1896. A ces Notes se rattachent celles de MM. CALÒ (Rend. della R. Accad. dei Lincei, agosto 1895) et LEVI-CIVITA (Rend. dell'Istituto lombardo, 4 e 18 aprile e 11 luglio 1895).

(1) Loc. cit..

(2) Annales de l'École Normale Supérieure, S. III, T. XI, 1894.

le coefficient de la $(n-1)^{\text{ème}}$ puissance de la variable. On regardera une fonction comme déterminée ou comme variable, arbitraire ou non, selon que les coefficients de la série seront eux-mêmes déterminés, ou variables arbitrairement ou non.

2. — Nous appelerons *opération fonctionnelle* toute opération qui, exécutée sur une fonction, donne comme résultat une fonction. Dans cette nouvelle fonction la variable pourra être indiquée par x, ou par une autre lettre, suivant la façon dont l'opération est définie : lorsque rien ne s'y oppose, nous l'indiquerons par la même lettre x. Comme cas particulier, une opération fonctionnelle peut donner comme résultat une constante.

3. — Dans ce travail, les nombres, réels ou complexes, seront indiqués par les lettres minuscules de l'alphabet romain ; les fonctions, par les minuscules de l'alphabet grec ; les opérations fonctionnelles, par des majuscules. Il va de soi que la notation $A(\varphi)$ exprime non seulement l'opération A qu'il faut exécuter sur la fonction φ, mais encore le résultat obtenu par cette opération.

4. — Par *opération fonctionnelle distributive*, ou simplement *opération distributive*, nous entendons une opération A qui donne, lorsqu'on l'exécute sur les fonctions φ, ψ et $\varphi+\psi$,

$$A(\varphi+\psi) = A(\varphi) + A(\psi), \tag{1}$$

et qui donne en outre, pour tout nombre a réel ou complexe et pour toute fonction φ,

$$A(a\,\varphi) = a\,A(\varphi). \tag{2}$$

Dans ce qui suit, nous nous occupons des opérations fonctionnelles distributives.

5. — Une opération qui, exécutée sur une fonction déterminée, ne peut donner lieu qu'à un seul résultat se dit à *détermination unique* ; elle est dite à *détermination multiple* dans le cas contraire. En disant qu'une opération A à détermination multiple est distributive, on doit entendre que parmi les déterminations de $A(\varphi)$, $A(\psi)$ et $A(\varphi+\psi)$ il s'en trouve qui vérifient l'égalité

$$A(\varphi) + A(\psi) = A(\varphi+\psi).$$

6. — Nous désignerons par le nom de champ fonctionnel l'ensemble des fonctions qui jouissent d'une propriété commune. Les expressions « champ fonctionnel qui en contient un autre » ou « est contenu dans un autre », comme celle de « champ commun à deux champs fonctionnels » s'expliquent d'elles-mêmes.

Une opération fonctionnelle qui est à détermination multiple dans un certain champ, peut fort bien se reduire à détermination unique dans un champ plus restreint. Nous en verrons bientôt un exemple au § 19.

7. — La somme de deux opérations est la somme des résultats qu'on obtient en appliquant les deux opérations à une même fonction variable arbitrairement. Ainsi

$$(A + B)(\varphi) = A(\varphi) + B(\varphi).$$

La somme d'un nombre quelconque d'opérations se définit de la même façon. La somme ainsi définie admet la propriété commutative et la propriété associative. La somme de deux ou plusieurs opérations distributives est aussi une opération distributive.

8. — Le produit de l'opération A par l'opération B est l'opération B exécutée sur le résultat de l'opération A. Cette opération sera indiquée par BA. On définit de même le produit d'un nombre quelconque d'opérations.

Le produit de plusieurs opérations distributives est aussi une opération distributive : en effet,

$$BA(\varphi + \psi) = B[A(\varphi) + A(\psi)] = BA(\varphi) + BA(\psi).$$

On en déduit que les opérations fonctionnelles distributives forment un groupe.

La multiplication ainsi définie jouit de la propriété associative, mais non, en général, de la propriété commutative. Ainsi on a

$$(AB)C = A(BC) = ABC,$$

mais on n'a pas en général

$$AB = BA;$$

lorsque cela a lieu, on dit que A et B sont permutables. Les opérations permutables avec une opération donnée forment un groupe.

Il est évident qu'on a

$$A(B+C)=AB+AC\,, \qquad (A+B)\,C=AC+BC\,.$$

9. — Le produit de l'opération A par elle même s'écrira A^2, de même A^m indiquera le produit de m facteurs égaux a A, et l'on a

$$A^m A^n = A^{m+n}\,.$$

Dans le groupe des opérations fonctionnelles distributives se trouve l'opération identique, qu'on peut représenter par 1 ou par A^0.

Une opération telle que $A^m=1$ se dira cyclique.

10. — Nous appelerons inverse de A et nous indiquerons par A^{-1} une opération telle que

$$AA^{-1}=1\,.$$

L'opération A^{-1} peut être à détermination multiple même si A est à détermination unique, comme nous le verrons tout-à-l'heure (§ 11); mais de la propriété

$$A(\varphi+\varphi_1)=A(\varphi)+A(\varphi_1)$$

dont jouit A, on déduit immédiatement que A^{-1} et une opération distributive, au sens indiqué au § 5.

11. — Etant données n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui ne satisfont pas identiquement à une équation linéaire homogène à coefficients constants, considérons toutes les fonctions de la forme

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n\,, \tag{3}$$

où les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ peuvent recevoir toutes les valeurs possibles, réelles ou complexes. L'ensemble de ces fonctions formera une variété linéaire d'ordre n ou à n dimensions. Chaque fonction de la forme (3) sera un élément ou un point de cette variété, que nous indiquerons par la notation $V_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ s'il sera nécessaire de mettre les n fonctions données en évidence, ou par les notations $V_n(\alpha)$ ou V_n quand cela ne sera pas nécessaire [1].

---

[1] L'ensemble des fonctions défini au § 1 nous donne un exemple de ce que M. Veronese, dans ses *Fondamenti di Geometria,* appelle *espace général;* l'ensemble (3) est un espace linéaire à n dimensions contenu dans l'espace général.

12. — Si l'on prend $n+1$ fonctions de la variété $V_n(\alpha)$, ces fonctions seront nécéssairement liées par une relation homogène linéaire à coefficients constants, ce que nous exprimerons en disant qu'elles sont linéairement dépendantes. Nous dirons que n fonctions de $V_n(\alpha)$, linéairement indépendantes, forment un système fondamental de la variété ; tel sera le système

$$\beta_h = a_{h,1}\alpha_1 + a_{h,2}\alpha_2 + \dots + a_{h,n}\alpha_n, \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

où le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}$ est différent de zéro.

Chaque élément de la variété peut se mettre sous la forme d'une fonction linéaire homogène à coefficients constants des éléments d'un système fondamental.

13. — Rappelons que la condition nécessaire et suffisant pour que n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de la variable x soient linéairement indépendantes, est que le déterminant fonctionnel, ou wronskien,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dfrac{d\alpha_1}{dx} & \dfrac{d\alpha_2}{dx} & \dots & \dfrac{d\alpha_n}{dx} \\ \dfrac{d^{n-1}\alpha_1}{dx^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}\alpha_2}{dx^{n-1}} & \dots & \dfrac{d^{n-1}\alpha_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Nous indiquerons ce déterminant par $W(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ou W_n; et on peut remarquer que W est une opération fonctionnelle distributive par rapport à chacun des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

14. — Si $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ sont r éléments linéairement indépendants appartenant à la variété $V_n(\alpha)$, on aura $r \leq n$; si $r < n$, ces éléments donneront un système fondamental d'une variété $V(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ d'ordre r, dont chaque élément appartient à $V_n(\alpha)$ et qu'on peut dire en conséquence, contenue dans $V_n(\alpha)$.

D'ici découlent immédiatement les définitions de somme de deux variétés sans éléments communs, de variétés communes à peux variétés données, de variétés contenant deux variétés données, etc., sur lesquelles il est superflu d'insister.

15. — Comme exemples de variétés à une dimension, on peut considérer l'ensemble des nombres, réels et complexes. Comme exem-

ples de variétés à n dimensions, on peut considérer l'ensemble des polynômes entiers en x de degré au plus égal à $n-1$, ou l'ensemble des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, pour laquelle $x=0$ n'est pas un point singulier, dans un domaine de ce point, etc..

16. — Si l'on applique aux fonctions de la variété $V_n(\alpha)$ une opération distributive A à détermination unique, on obtient une variété qui ne peut être d'ordre supérieur à n. En effet, si l'on considère $n+1$ éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ de $V_n(\alpha)$, on a entre ces éléments une relation de la forme

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \ldots + c_n \alpha_n + c_{n+1} \alpha_{n+1} = 0 ,$$

d'où, par les (1) et (2) (§ 4),

$$c_1 A(\alpha_1) + c_2 A(\alpha_2) + \ldots + c_n A(\alpha_n) + c_{n+1} A(\alpha_{n+1}) = 0 .$$

On dira que la variété que l'on obtient est transformée de $V_n(\alpha)$ par l'opération A, et les éléments α_i et $A(\alpha_i)$ des deux variétés se diront correspondants. Pour indiquer la variété transformée de $V_n(\alpha)$ par A, on pourra écrire $A V_n(\alpha)$, et l'on a

$$A V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = V[A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots, A(\alpha_n)] .$$

Il n'est pas exclu, et nous le verrons tout-à-l'heure, que la transformée d'une variété d'ordre n puisse être d'ordre inférieur à n.

La transformée par une opération A d'une variété contenue en $V_n(\alpha)$ est contenue dans la variété transformée de $V_n(\alpha)$ par la même opération.

II. — Racines des opérations.

17. — On dira qu'une fonction α est *racine* de l'opération A lorsqu'on aura

$$A(\alpha) = 0 .$$

Si une opération a pour racines n fonctions linéairement indépendantes, elle aura pour racine toute fonction de la variété a n dimensions déterminée par ces fonctions. Nous dirons que cette variété est racine de l'opération.

18. — Si une opération A admet une racine α, l'opération inverse est à détermination multiple ; en effet, on aura en même temps

$$A(\varphi) = \psi, \qquad A(\varphi + \alpha) = \psi,$$

d'où il suit que $A^{-1}(\psi)$ admettra les déterminations $\varphi, \varphi + \alpha$, et ($k$ étant un nombre quelconque) $\varphi + k\alpha$. Il en résulte que $A^{-1}(0) = k\alpha$. Remarquons en passant qu'à cause de la formule (2), une opération à détermination unique appliquée à zéro ne peut donner comme résultat que zéro [1].

19. — Montrons par un exemple de quelle façon une opération à détermination multiple peut être reduite à détermination simple en limitant convenablement le champ fonctionnel. Il est facile de trouver une opération A dont les racines soient des fonctions régulières dans un cercle de centre $x = 0$ et de rayon r : il suffit de prendre pour A le premier membre d'une équation différentielle linéaire en x dont les points singuliers soient tous sur la circonférence $|x| = r$. Qu'on prenne comme champ fonctionnel l'ensemble des fonctions régulières dans une cercle de centre $x = 0$ et de rayon $r + h$: alors si $A^{-1}(\varphi)$ a une détermination dans ce champ, cette détermination est unique.

20. — Montrons maintenant, comme nous l'avons annoncé au § 16, qu'une opération à détermination unique A exécutée sur une variété d'ordre n, $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, peut donner lieu à une variété d'ordre moindre. Si dans cette variété il existe r fonctions linéairement indépendantes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ qui soient racines de A, avec $r \leq n$, formons un système fondamental constitué par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ et $n - r$ autres fonctions $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-r}$; en exécutant sur notre variété, que nous pouvons désigner par

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-r})$$

l'opération A, nous obtiendrons comme résultat la variété d'ordre $n-r$

$$V[A(\mu_1), A(\mu_2), \dots, A(\mu_{n-r})].$$

---

[1] Dorénavant, en parlant de racines d'une opération, nous exclurons toujours la racine zéro. En outre il est bien clair que lorsqu'on dit que α est racine de A, on considère, en même temps que α, toute fonction $c\alpha$.

Réciproquement, si une opération A exécutée sur une variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ d'ordre n donne lieu à une variété d'ordre moindre $n-r$, il doit y avoir, dans la V_n, r racines de A linéairement indépendantes; en effet, entre $A(\alpha_1), A(\alpha_2), \dots, A(\alpha_n)$ il devra y avoir r relations de la forme

$$c_{i,1}\, A(\alpha_1) + c_{i,2}\, A(\alpha_2) + \dots + c_{i,n} A(\alpha_n) = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, r),$$

d'où

$$A(c_{i,1}\, \alpha_1 + c_{i,2}\, \alpha_2 + \dots + c_{i,n} \alpha_n) = 0\,.$$

21. — On dira qu'une opération A qui fait correspondre à une variété d'ordre n une variété d'ordre moindre, est *dégénerée* par rapport à cette variété; nous dirons qu'elle est *dégénerée de degré* r si elle diminue de r unités l'ordre de la variété.

22. — Il suit du § 20 que la condition nécéssaire et suffisante pour qu'une opération A soit dégénerée du $r^{\text{ème}}$ degré par rapport à une variété V_n, est que V_n contienne r racines de A, linéairement indépendantes.

On voit donc que, tandis qu'une opération A non dégénerée par rapport à V_n établit entre les éléments de V_n et ceux de $A V_n$ une correspondance biunivoque, une opération dégénerée au contraire fait correspondre à chaque élément de V_n un élément dans $A V_n$, mais à chaque élément de $A V_n$ correspondent des éléments de V_n en nombre infini.

23. — Soit α une racine de A, A étant une opération à détermination unique. Puisque $A(0)$ ne peut avoir d'autre détermination que zéro (§ 18), on voit que α est aussi racine de A^2, mais A^2 peut admettre des racines qui ne sont pas racines de A. De même, m étant un nombre entier positif, toute racine de $A, A^2, \dots, A^{m-1}$ est racine de A^m, mais A^m peut admettre des racines qui n'annulent pas A^{m-1}. De telle racines se diront *racines propres* de A^m, tandis qu'une racine de $A^r (r < m)$ sera une racine impropre pour A^m.

Indiquons par $\alpha^{(m-1)}$ une racine propre quelconque de A^m, par α une racine de A: il est clair que $A(\alpha^{(m-1)})$ est une racine propre de A^{m-1}, de sorte qu'on peut écrire:

$$A(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(m-2)},$$

et en général:

$$(4)\quad A^{m-1}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha,\; A^{m-2}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(1)}, \dots, A^{m-r}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(r-1)}.$$

24. — Soient $\alpha_1^{(m-1)}, \alpha_2^{(m-1)}, \dots, \alpha_s^{(m-1)}$ des racines propres de A^m: la variété $V(\alpha_1^{(m-1)}, \dots, \alpha_s^{(m-1)})$ sera elle-même racine de A^m. Nous dirons que cette variété est racine propre ou impropre de A^m, suivant que toutes les fonctions qu'elle contient sont, ou non, racines propres de A^m.

Il est clair que si $V_s(\alpha^{(m-1)})$ est racine propre de A^m, la variété $A V(\alpha^{(m-1)})$ sera racine propre de A^{m-1}.

25. — Admettons qu'une opération A à détermination unique n'ait comme variété racine qu'une variété d'ordre r: en d'autres termes, A ait en tout r racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ linéairement indépendantes. Je dis que A^2 admet au plus, comme variété racine propre, une variété d'ordre r. En effet, supposons pour un instant que A^2 ait $r+1$ racines propres, dont aucune combinaison linéaire n'est donc racine de A, et soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ ces racines; on aura

$$A^2(\beta_i) = 0, \quad \text{ou} \quad AA(\beta_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, r+1),$$

et puisque $A(\beta_1), A(\beta_2), \dots, A(\beta_{r+1})$ ne sont pas nulles par hypothèse, on aura entre ces $r+1$ racines de A une relation linéaire

$$c_1 A(\beta_1) + c_2 A(\beta_2) + \dots + c_{r+1} A(\beta_{r+1}) = 0,$$

d'où

$$A(c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + \dots + c_{r+1} \beta_{r+1}) = 0,$$

ce qui est contre l'hypotèse, puisque $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1}$ sont linéairement indépendantes et aucune de leurs combinaisons linéaires n'est racine de A. Le théorème est donc démontré.

26. — Il en resulte que si A a en tout r racines linéairement indépendantes, A^m a une variété racine propre de l'ordre r au plus, et par conséquent la variété qui comprend la totalité des racines de A^m est de l'ordre mr au plus.

27. — Le théorème du § 25 est un cas particulier du suivant. Soient A et B deux opérations distributives permutables (§ 8). Les racines de A, que nous indiquerons par la lettre α, forment en tout une variété V_r d'ordre r, les racines de B, que nous indiquerons par β, forment en tout une variété V_s d'ordre s. Ces deux variétés aient une variété commune maxima (§ 14) d'ordre q, et il existe par conséquent une variété minima d'ordre $r+s-q$ comprenant V_r et

V_s, soit W. Je dis que l'opération AB admet comme variété racine une variété de l'ordre $r+s$ au plus, qui comprend la variété W.

En effet, soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_r$$

et

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad \dots, \quad \beta_q = \alpha_q, \quad \beta_{q+1}, \quad \dots, \quad \beta_s$$

deux systèmes fondamentaux, l'un de V_r, l'autre de V_s;

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_{q+1}, \dots, \beta_s$$

sera un système fondamental de W. Toute fonction φ de W sera racine de AB, car si

$$\varphi = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_r \alpha_r + c_{r+1} \beta_{q+1} + \dots + c_{r+s-q} \beta_s,$$

on aura, en exécutant l'opération AB, A et B étant permutables,

$$AB(\varphi) = BA(c_1 \alpha_1 + \dots + c_r \alpha_r) + \\ + AB(c_{r+1} \beta_{q+1} + \dots + c_{r+s-q} \beta_s),$$

dont le résultat est évidemment nul. Cela posé, supposons qu'il existe $q+1$ fonctions indépendantes linéairement entre elles et avec la variété W: soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q, \mu$ ces $q+1$ fonctions. Si φ est une fonction contenue dans W, on ne pourra donc pas déterminer $q+1$ costantes $c_0, c_1', \dots, c_q'$ telles que

$$c_0 \mu + c_1' \lambda_1 + c_2' \lambda_2 + \dots + c_q' \lambda_q = \varphi.$$

Puisque l'on a $AB(\mu) = 0$, et que μ n'est pas racine de B, $B(\mu)$ sera racine de A: par la même raison $B(\lambda_1), \dots, B(\lambda_q)$ sont des racines de A; enfin puisque

$$BA(\alpha_{q+h}) = 0 = AB(\alpha_{q+h}), \qquad (h = 1, 2, \dots, r-q),$$

et que les α_{q+h} ne sont pas racines de B, $B(\alpha_{q+h})$ sera racine de A. Posons donc

$$B(\mu) = \alpha', \quad B(\lambda_i) = \alpha_i', \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

$$B(\alpha_{q+h}) = \alpha_h'', \quad (h = 1, 2, \dots, r-q).$$

Ces racines de A étant au nombre de $r+1$, elles seront liées par une relation linéaire

$$c\,\alpha' + c_1\,\alpha_1' + \dots + c_q\,\alpha_q' + c_{q+h}\,\alpha_1'' + \dots + c_r\,\alpha_{r-q}'' = 0\,,$$

qui équivaut à

$$B\,(c\,\mu + c_1\,\lambda_1 + \dots + c_q\,\lambda_q + c_{q+1}\,\alpha_{q+1} + \dots + c_r\,\alpha_r) = 0\,;$$

d'où il suit que la fonction entre parenthèses est nulle ou est une racine de B. Dans l'un et dans l'autre cas les $q+1$ fonctions $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sont liées linéairement avec une fonction de la variété W: donc les racines de AB distinctes de W sont au plus q, c. q. f. d..

28. — On déduit immédiatement comme corollaires de ce théorème les propositions des §§ **25** et **26**.

On en déduit encore le corollaire suivant: Si deux opérations distributives permutables A, B n'ont pas de racines communes, et A admet comme racine la variété V_r et B la variété V_s, les racines de AB seront toutes les fonctions de la variété $V_r + V_s$, et celles-là seulement. Ce théorème s'étend immédiatement au produit de plusieurs opérations permutables n'ayant pas de racines communes.

III. — Variétés invariantes pour une opération donnée.

29. — Nous dirons qu'une fonction α est invariante par rapport à une opération donnée A à détermination unique, quand on a, k étant une costante,

$$A\,(\alpha) = k\,\alpha. \tag{5}$$

Il suit de là que toutes les fonctions de la variété du premier ordre $c\alpha$ sont pareillement invariantes par rapport à A.

30. — Nous dirons qu'une variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est invariante par rapport à une opération A lorsque la transformée de V par rapport à A est la V même, ou y est contenue. Ce dernier cas a lieu (§ **21**) lorsque l'opération A est dégénérée pour V, et par suite (§ **22**) lorsque cette variété contient quelque racine de A.

Lorsque la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est invariante par rapport à A, on a

$$(6) \qquad A(\alpha_i) = a_{i,1}\alpha_1 + a_{i,2}\alpha_2 + \ldots + a_{i,n}\alpha_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

l'opération A est donc, pour la variété V, une substitution linéaire [1]. Si l'opération est dégénérée, le déterminant $\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$ est nul, et réciproquement; le degré de dégénérescence (§ 21) dépend de la caractéristique de ce déterminant.

31. — A côté de l'opération A, considérons les opérations

$$(7) \qquad B = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m \quad [2].$$

Ces opérations forment un groupe permutable; elles admettent toutes la variété V comme invariante. Elles se multiplient suivant les règles de la multiplication ordinaire: on peut donc les décomposer en produits d'opérations du même groupe, mais de la forme plus simple $A - z$; nous appelerons ces dernières *opérations du premier degré en* A et nous les indiquerons par E. Une opération comme (7) (du degré m en A) peut donc toujours se mettre sous la forme d'un produit de m facteurs E: il suffit pour cela de décomposer le polynôme

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m$$

en

$$a_m (t - z_1)^{r_1} (t - z_2)^{r_2} \ldots (t - z_q)^{r_q}$$

et, en faisant

$$E_i = A - z_i,$$

il vient

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \ldots E_q^{r_q}.$$

32. — Proposons nous maintenant la question suivante:

Etant données l'opération A et la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, invariante par rapport à A et qui ne renferme pas de racines de A, existe-t-il, dans cette variété, une fonction ω invariante par rapport à A?

---

(1) Il est clair qu'une opération A, qui est une substitution linéaire pour V, peut être definie d'une toute autre façon pour des variétés plus générales.

(2) J'écris $a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots$ au lieu de $a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \ldots$, A^0 étant l'opération identique: cela ne peut donner lieu à aucune méprise.

En rappelant l'équation (5), on peut donner encore à cette question l'énoncé suivant :

Parmi les opérations du premier degré en A, $E = A - z$, y en a-t-il qui soit dégénérées par rapport à la variété donnée, c'est-à-dire qui admette quelque racine dans cette variété ?

Mis sous cette forme, on voit que le problème dépend de la détermination du nombre z : on voit de plus que ce nombre est indépendant du choix du système fondamental de $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$: c'est donc un invariant de la variété donnée.

33. — Soit donc

$$\omega = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \ldots + h_n \alpha_n$$

une fonction invariante par rapport à A ; on aura

$$A(\omega) = z\,\omega$$

d'où, par les équations (6), et puisque les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont linéairement indépendantes, on tire

$$h_1 a_{1,i} + h_2 a_{2,i} + \ldots + h_n a_{n,i} = z\,h_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

d'où suit pour z la condition nécessaire et suffisante d'être racine de l'équation

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - t & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - t & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} - t \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Cette équation est dite équation caractéristique ou fondamentale de l'opération A par rapport à la variété donnée ; si nous indiquons par $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ses racines et par $r_1, r_2, \ldots, r_q$ leurs ordres de multiplicité respectifs, nous aurons :

$$f(t) = (t - z_1)^{r_1} (t - z_2)^{r_2} \ldots (t - z_q)^{r_q}\,. \tag{10'}$$

Si donc une operation $E = A - z$ admet une racine ω dans $V_n(\alpha)$, z est une racine de l'équation fondamentale, et réciproquement.

34. — L'équation fondamentale est, comme on l'a remarqué pour une de ses racines, indépendante du choix du système fondamental en $V_n(\alpha)$: ses coefficients, comme ses racines, sont donc des invariants. On démontre immédiatement que si $V_n(\alpha)$ contient une variété $V_m(\beta)$, $m < n$, qui est aussi invariante par rapport à A, et $g(t)$ est le premier membre de l'équation fondamentale de A par rapport à $V_m(\beta)$, $g(t)$ est diviseur de $f(t)$. De même, si $V_n(\alpha)$ est la somme des deux variétés $V_m(\beta)$, $V_{n-m}(\gamma)$ invariantes par rapport à A et dont $g(t)$, $h(t)$ sont les premiers membres des équations fondamentales, on a

$$f(t) = g(t)\, h(t).$$

35. — A côté de l'opération A considérons l'opération

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \dots E_q^{r_q}, \qquad (E_i = A - z_i; \quad i = 1, 2, \dots, q). \tag{11}$$

Nous savons que sa variété racine est (§ 28) la somme des variétés racines de $E_1^{r_1}, E_2^{r_2}, \dots, E_q^{r_q}$. De plus, nous pouvons dire qu'à cette variété appartiennent toutes les fonctions invariantes par rapport à A.

36. — Nous nous proposons maintenant d'étudier les racines de l'opération B, et pour cela, celles de l'opération E^r, où $E = A - z$, et z désigne l'une quelconque des racines de (10).

Remarquons d'abord qu'une opération $(A - a)^p$, où p est un nombre entier positif quelconque, ne peut avoir de racine propre λ en $V_n(\alpha)$ que si a est une racine de (10), puisque $(A - a)^{p-1}$, appliquée à λ, donne une racine de $A - a$.

Cela posé, si l'opération $E^p = (A - z)^p$ admet, dans la variété $V_n(\alpha)$, une racine propre $\omega^{(p-1)}$, on aura (§ 23):

$$E(\omega^{(p-1)}) = \omega^{(p-2)}, E(\omega^{(p-2)}) = \omega^{(p-3)}, \dots, E(\omega^{(1)}) = \omega, E(\omega) = 0,$$

d'où l'on tire:

$$\left\{\begin{array}{ll} A(\omega) & = z\,\omega, \\ A(\omega^{(1)}) & = z\,\omega^{(1)} + \omega, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A(\omega^{(p-1)}) & = z\,\omega^{(p-1)} + \omega^{(p-2)}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Les fonctions $\omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p-1)}$ ainsi determinés sont linéairement indépendantes; supposons en effet qu'on ait, pour des constantes $c_0, c_1, \dots, c_{p-1}$,

$$c_0\,\omega + c_1\,\omega^{(1)} + \dots + c_{p-1}\,\omega^{(p-1)} = 0\,, \tag{13}$$

et appliquons aux deux membres l'opération E^{p-1}; il viendra $c_{p-1} = 0$; en appliquant à la relation (13) ainsi reduite l'opération E^{p-2}, il vient $c_{p-2} = 0$, et ainsi de suite.

Si donc E^p admet dans la variété $V_n(\alpha)$ une racine propre $\omega^{(p-1)}$ il existe une variété d'ordre p,

$$V_p(\omega, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(p-1)})$$

également invariante par rapport à A, contenue dans $V_n(\alpha)$, et sur laquelle A opère la substitution linéaire (12). Le tableau (12) montre que le premier membre de l'équation caractéristique correspondante est

$$g(t) = (t - z)^p,$$

d'où il suit (§ 35) que z est racine de $f(t) = 0$ de l'ordre p au moins.

37. — Représentons maintenant par $W_m(\omega)$ la variété linéaire contenue dans $V_n(\alpha)$ et qui est formée par l'ensemble des racines de E et de ses puissances: nous voulons étudier la structure de cette variété. Soit, pour cela, p la plus haute puissance de E dont W_m renferme des racines propres, et soit $T_{k_1}(\omega_1^{(p-1)}, \omega_2^{(p-2)}, \dots, \omega_{k_1}^{(p-1)})$ la variété racine propre de E^p. En appliquant à cette variété l'opération E, on obtiendra une variété appartenant à la variété racine propre de E^{p-1}, et si nous posons

$$E(\omega_1^{(p-1)}) = \omega_1^{(p-2)}, \dots, \quad E(\omega_{k_1}^{(p-1)}) = \omega_{k_1}^{(p-2)}\,,$$

la variété racine propre de E^{p-1} sera de l'ordre k_1 au moins: soit en général $k_1 + k_2$ son ordre, nous pourrons l'indiquer par

$$T_{k_2}(\omega_1^{(p-2)}, \omega_2^{(p-2)}, \dots, \omega_{k_1}^{(p-2)}, \omega_{k_1+1}^{(p-2)}, \dots, \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)}).$$

En appliquant à cette variété l'opération E, on obtiendra une variété appartenant à la variété racine propre de E^{p-2} dont on pourra indiquer en général l'ordre par $k_1 + k_2 + k_3$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrivera aux racines propres de E^2, dont nous indiquerons la variété par

$$T_{k_{p-1}}(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \dots, \omega_{k_1}^{(1)}, \omega_{k_2+1}^{(1)}, \dots, \omega_{k_1+k_2}^{(1)}, \dots, \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}}^{(1)});$$

en appliquant à celle-ci l'opération E, on aura enfin une variété appartenant à la variété racine de E, qui pourra cependant renfermer d'autres fonctions linéairement indépendantes des précédentes : en posant

$$E(\omega_i^{(1)}) = \omega_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, k_1 + k_2 + \dots + k_{p-1}),$$

et en indiquant par

$$\omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}+1}, \ \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}+2}, \dots, \omega_m$$

ces nouvelles racines de E, on aura la variété racine de E :

$$T_{k_p}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{k_1}, \omega_{k_1+1}, \dots, \omega_{k_1+k_2}, \dots, \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}}, \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}+1}, \dots, \omega_m).$$

Le tableau

$$(14) \left\{ \begin{array}{llllll} \omega_1^{(p-1)} \dots \omega_{k_1}^{(p-1)}, & & & & & \\ \omega_1^{(p-2)} \dots \omega_{k_1}^{(p-2)} & \omega_{k_1+1}^{(p-2)} \dots \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)}, & & & & \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & & & & \\ \omega_1^{(1)} \dots \omega_{k_1}^{(1)} & \omega_{k_1+1}^{(1)} \dots \omega_{k_1+k_2}^{(1)} & \omega_{k_1+k_2+1}^{(1)} \dots \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}}^{(1)}, & & & \\ \omega_1 \dots \omega_{k_1} & \omega_{k_1+1} \dots \omega_{k_1+k_2} & \omega_{k_1+k_2+1} \dots \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}} \dots & & & \\ & & \dots \omega_{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}+k_p} & & & \end{array} \right.$$

est formé par

$$p\,k_1 + (p-1)\,k_2 + \dots + 2\,k_{p-1} + k_p$$

fonctions qui sont linéairement indépendantes, car si l'on admettait entre elles une relation linéaire, en exécutant $p - 1$ fois au plus l'opération E sur le deux membres on trouverait une relation linéaire entre les fonctions d'une même ligne horizontale du tableau, contre l'hypothèse. Les fonctions du tableau (14) nous donnent donc un système fondamental de la variété $W_m(\omega)$, et l'on a determiné le nombre m par la formule

$$m = p\,k_1 + (p-1)\,k_2 + \dots + 2\,k_{p-1} + k_p .$$

Remarquons que la variété W_m contenue en $V_n(\alpha)$ et qui est invariante par rapport à A, contient encore des variétés également invariantes et ayant pour systèmes fondamentaux les fonctions d'une même ligne verticale du tableau (14); chacune de ces variété est transformée par A au moyen des formules (12).

38. — Nons voulons maintenant démontrer que m est précisément égal a r, degré de multiplicité de la racine z de l'équation fondamentale. A cet effet, prenons un système fondamental $V_n(\alpha)$ qui soit formé des m fonctions du tableau (14) et des $n-m$ autres fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-m}$. Exécutons sur ces fonctions l'opération E^p, soit

$$E^p(\sigma_i) = \pi_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-m).$$

Les fonctions π_i seront des éléments linéairement indépendants dans $V_n(\alpha)$, car si on avait des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{n-m}$ telles que

$$c_1\,\pi_1 + c_2\,\pi_2 + \dots + c_{n-m}\,\pi_{n-m} = 0,$$

il s'ensuivrait

$$E^p(c_1\,\sigma_1 + c_2\,\sigma_2 + \dots + c_{n-m}\,\sigma_{n-m}) = 0,$$

ce qui est impossible par suite du choix des fonctions σ_i. De plus, une fonction linéaire des π_i ne peut être racine d'une puissance E^k de E, sans quoi une combinaison linéaire des σ serait racine de E^{p+k}, contre les hypothèses. Enfin, la variété $V_{n-m}(\pi)$ est invariante par rapport à A, car si l'on pose, $\overline{\omega}$ étant une fonction de $W_m(\omega)$,

$$A(\sigma_i) = a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + \dots + a_{n-m}\,\sigma_{n-m} + a'\,\overline{\omega},$$

on aura, en prenant l'opération E^p de part et d'autre,

$$A(\pi_i) = a_1\,\pi_1 + a_2\,\pi_2 + \dots + a_{n-m}\,\pi_{n-m} .$$

La variété $V_n(\alpha)$ est donc la somme des deux variétés $W_m(\omega)$, $V_{n-m}(\pi)$, toutes deux invariantes par rapport à A : soit $h(t)$ le premier membre de l'équation fondamentale relative à $V_{n-m}(\pi)$; le premier membre de l'équation relative à $W_m(\omega)$ étant évidemment $(t-z)$, comme le montrent les formules (12) appliquées aux colonnes verticales du tableau (14), on a (§ 35)

$$f(t) = h(t)\,(t - z)^m\,;$$

mais $h(t)$ ne peut renfermer la racine z, donc m est le degré r de multiplicité de cette racine dans $f(t)$, c. q. f. d. [1].

39. — Les propositions établies aux deux derniers §§ nous conduisent à cette conclusion : chaque facteur E_i^{ri} de l'opération

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \dots E_q^{r_q} \tag{11}$$

donne lieu à une variété W_{r_i}, d'ordre r_i, invariante par rapport à l'opération A, comprise dans la variété donné $V_n(\alpha)$ et constituée par les racines de E_i et de ses puissances qui appartiennent à cette variété $V_n(\alpha)$. La variété W_{r_i} peut elle-même se décomposer en d'autres variétés invariantes : ce sont celles données par les colonnes verticales des tableaux (14). Deux opérations E_i, E_j ne peuvent avoir de racines communes, et il en est de même de leurs puissances, comme il suit de la conclusion des §§ 33 et 36. Les opérations

$$E_1^{r_1}, \quad E_2^{r_2}, \quad \dots, \quad E_q^{r_q}$$

étant permutables et sans racines communes, il résulte du théorème enoncé au § 28 que les racines de l'opération B sont données, et exclusivement, par la somme des variétés $W_{r_1}, W_{r_2}, \dots, W_{r_q}$, et puisque $r_1 + r_2 + \dots + r_q = n$, cette variété coïncide avec la variété donnée $V_n(\alpha)$. L'opération B a donc pour variété racine la variété donnée : c'est une opération de la forme (7) et du degré n en A (§ 31) et c'est l'opération de cette forme du degré minimum qui jouisse de cette propriété. En développant le produit indiqué au second membre de (11), on obtient les coefficients des puissances de A dans le développement de B ; ce sont les mêmes que ceux des puissances de t dans $f(t)$ et ce sont des invariants.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut encore s'exprimer sous la forme suivante : Toutes les fois qu'une opération distributive

---

(1) Le lecteur a sans doute déjà remarqué que la théorie des opérations distributives nous a permis d'obtenir, dans le §§ 37 et 38, le concept des diviseurs élémentaires de WEIERSTRASS, et cela, d'une façon excessivement simple.

A admet une variété invariante V_n, il existe une opération de la forme

$$B = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$$

qui, appliquée à une fonction quelconque de la variété, donne zéro comme résultat, et les §§ précédents nous apprennent de quelle façon la structure de V_n dépend de la décomposition de B en facteurs.

40. — Le cas le plus simple a lieu lorsque $f(t)$ (et par conséquent aussi B) n'a pas de facteurs mnltiples. En ce cas, la variété $V_n(\alpha)$ renferme n fonctions linéairement indépendantes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ pour lesquelles la transformation opérée par A est donnée par

$$A(\omega_i) = z_i\, \omega_i, \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \tag{15}$$

IV. — Détermination des variétés invariantes dans un cas particulier remarquable.

41. — Dans ce qui précède, on a supposé, de connaître une variété invariante pour une opération donnée. En général, quand on aura à établir la théorie d'une opération distributive, on devra chercher précisément quelles sont les variétés que cette opération laisse invariantes, et ce problème présentera ordinairement des difficultés. Nous allons examiner un cas remarquable où ces difficultés disparaissent.

42. — Soit une opération distributive A, sur laquelle nous faisons les hypothèses suivantes :

1⁰) Pour toute fonction d'un certain champ fonctionnel Γ — qui peut être tout l'ensemble des fonctions — cette opération donne une fonction du même champ.

2⁰) Pour toute valeur du paramètre z comprise entre certaines limites, l'equation

$$A(\varphi) - z\,\varphi = 0,$$

ou

$$E(\varphi) = 0, \quad (E = A - z),$$

admet dans le champ Γ une solution unique ω_z (abstraction faite, bien entendu, d'un multiplicateur constant).

3⁰) Cette solution ω_z, qui est fonction de z au sens général du mot, a entre les limites considérée, les dérivées determinées de tous les ordres, et ces dérivées appartiennent de même au champ fonctionnel Γ (1).

Nous allons montrer qu'il est possible, pour une telle opération, de trouver toutes les variétés invariantes, et de déterminer une variété pour laquelle cette opération équivaut à une substitution linéaire donnée.

43. — Nous avons, par hypothèse,

$$A(\omega_z) = z\,\omega_z. \tag{16}$$

Donnons à z un accroissement h assez petit en valeur absolue; on aura, en indiquant par h' un nombre moindre que h en valeur absolue,

$$A(\omega_{z+h}) = A\left(\omega_z + h\frac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z} + \frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2\,\omega(z+h')}{\partial\,z^2}\right),$$

d'où, par l'équation (16),

$$A\left(\frac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z}\right) = \frac{1}{h}\{(z+h)\,\omega_{z+h} - z\,\omega_z\} - \frac{h}{2}\frac{\partial^2\,\omega(z+h')}{\partial\,z^2}$$

et, en passant à la limite pour $h=0$,

$$A\left(\frac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z}\right) = z\frac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z} + \omega_z. \tag{17}$$

On en déduit immédiatement

$$E^2\left(\frac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z}\right) = 0\,;$$

$\dfrac{\partial\,\omega_z}{\partial\,z}$ est donc une racine propre de E^2, et elle constitue à elle seule la variété racine propre de E^2, d'après le théorème du § 25. On démontre de la même façon que la variété racine propre de E^p est constituée par $\dfrac{\partial^{p-1}\,\omega_z}{\partial\,z^{p-1}}$.

---

(1) Il est facile de réaliser une telle opération, en prenant par exemple pour $A(\varphi)$ le premier membre d'une équation différentielle linéaire.

44. — Si maintenant on veut déterminer toutes les variétés invariantes par rapport à A dans le champ fonctionnel Γ, on remarquera que si $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est une telle variété, l'opération A détermine sur elle la substitution

$$A(\alpha_i) = a_{i,1}\alpha_1 + a_{i,2}\alpha_2 + \ldots + a_{i,n}\alpha_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

on en déduit l'équation fondamentale

$$f(t) = (t - z_1)^{r_1}(t - z_2)^{r_2} \ldots (t - z_q)^{r_q} = 0$$

et l'opération [(11), § 35]

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \ldots E_q^{r_q}$$

dont $V_n(\alpha)$ est la variété racine. Mais les racines de B forment la variété somme des variétés racines de $E_1^{r_1}, E_2^{r_2}, \ldots, E_q^{r_q}$ (§ 28) et celles-ci sont données par le théorème du § précédente. La variété $V_n(\alpha)$ admet donc le système fondamental

$$\omega_{z_i}, \quad \frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial z_i}, \ldots, \quad \frac{\partial^{r_i - 1}\omega_{z_i}}{\partial z_i^{r_i - 1}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, q). \tag{18}$$

Réciproquement, toute variété qui admet un système fondamental de la forme (18) est invariante par rapport à A.

45. — L'autre question : existe-t-il une variété $V_n(\alpha)$ pour laquelle A coïncide avec une substitution linéaire donnée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se résout non moins facilement. Il suffit de former l'équation fondamentale définie par cette substitution, d'en trouver les racines

$$z_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

de l'ordre de multiplicité respectif r_i : le tableau (18) relatif a ces racines donne un système fondamental cherché.

Remarquons que le problème proposé équivaut à la résolution du système d'équations fonctionnelles

$$(19) \qquad A(\varphi_i) = a_{i1}\,\varphi_1 + a_{i2}\,\varphi_2 + \ldots + a_{in}\,\varphi_n, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

par rapport aux fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

46. — La résolution de l'équation fonctionnelle

$$(20) \qquad A^n(\varphi) + a_1\, A^{n-1}(\varphi) + \ldots + a_{n-1}\, A(\varphi) + a_n\, \varphi = 0$$

rentre dans ce qui précède. En effet, l'équation (20) équivaut au système

$$\begin{cases} A(\varphi) = -\, a_1\, \varphi + \varphi_1, \\ A(\varphi_1) = -\, a_2\, \varphi + \varphi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(\varphi_{n-1}) = -\, a_n\, \varphi, \end{cases}$$

de la forme (19); ou bien, ce qui revient au même, la variété qui donne la solution de l'équation (20) a pour système fondamental le tableau (18) où $z_1, z_2, \ldots, z_q$ sont les racines de l'équation

$$t^n + a_1\, t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, t + a_n = 0$$

et $r_1, r_2, \ldots, r_q$ leurs ordres respectifs de multiplicité.

La résolution des équations et des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants rentre évidemment comme cas particulier dans les questions que nous avons résolues dans ces deux derniers paragraphes.

Chapitre II.

Propriétés générales des opérations distributives.

I. — Opérations distributives appliquées aux séries. Quelques opérations particulières.

47. — Après nous être plus spécialement occupés, dans le chapitre précédent, des variétés d'ordre fini, revenons maintenant à l'ensemble général des fonctions, c'est à dire (§ 1) des séries ordonnées selon les puissances entières et positives d'une variable x. Nous indiquerons par (r) le cercle décrit, dans le plan de la variable x, du point $x = 0$ comme centre avec le rayon r, et nous dirons, pour abréger, qu'une fonction appartient au cercle (r) lorsque le cercle de convergence de la série correspondante a un rayon supérieur à r.

48. — La propriété distributive, dont jouit une opération A, peut naturellement s'étendre, sous certaines restrictions, au cas où l'on exécute cette opération sur une série infinie de fonctions. Cette extension est admissible, par exemple, si l'on assujétit A aux conditions suivantes :

a) d'être à détermination unique,

b) de faire correspondre aux fonctions α qui appartiennent à un certain cercle (r), des fonctions qui appartiennent à un cercle (r'),

c) de faire correspondre à un nombre positif arbitraire g un nombre positif h tel qu'à une fonction α appartenant à (r) et dont la valeur absolue maxima en (r) est moindre que h, correspond une fonction $A(\alpha)$ dont la valeur absolue maxima en (r') soit moindre que g.

49. — Sous ces conditions, on peut en effet démontrer le théorème suivant :

Soit un système de fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ appartenant au cercle (r) et telles que la série

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

soit convergente uniformément dans ce cercle, la circonférence comprise ; soit A une opération jouissant des propriétés énoncées au § précédent ; on aura :

$$A\left(\sum_1^{\infty} \alpha_n\right) = \sum_1^{\infty} A(\alpha_n) . \tag{1}$$

Remarquons d'abord que, par un théorème connu de la théorie des fonctions, φ est une fonction qui appartient au cercle (r). En outre, si g est un nombre positif arbitraire et h le nombre qui lui correspond d'après le § 48, c), on peut déterminer l'entier s tel que l'on ait dans tout le cercle (r) :

$$\left| \sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha_n \right| < \frac{1}{2} h ,$$

et par conséquent, t étant un entier quelconque positif,

$$\left| \sum_{n=s+1}^{s+t} \alpha_n \right| < h,$$

d'où l'on déduit

$$\left| A \left(\sum_{s+1}^{\infty} \alpha_n \right) \right| < g, \tag{2}$$

$$\left| \sum_{n=s+1}^{s+t} A(\alpha_n) \right| < g. \tag{3}$$

L'inégalité (3) montre que la série $\Sigma A(\alpha_n)$ est convergente uniformément en (r') et représente par conséquent une fonction, que nous indiquerons par ψ ; formons $A(\varphi) - \psi$, et nous aurons

$$A(\varphi) - \psi = A \left(\sum_{s+1}^{\infty} \alpha_n \right) - \sum_{s+1}^{\infty} A(\alpha_n).$$

Or il suit de (2) et (3) que le second membre ne peut être supérieur à $2g$, tandis que le premier a une détermination fixe en (r'): cette détermination doit donc être nulle, et l'on a $A(\varphi) = \psi$; la (1) est ainsi démontrée.

50. — Indiquons par ξ_n la fonction qu'on obtient en appliquant l'opération A à la fonction x^n :

$$A(x^n) = \xi_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

et supposons que les fonctions ξ_n appartiennent toutes au cercle (r'). En déterminant les coefficients c_n de telle sorte que la série

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

appartienne au cercle (r), elle y sera convergente uniformément, comme on sait, et le théorème du § précédent sera, par conséquent, valable : on aura ainsi, dans (r'),

$$A(\varphi) = A \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_n. \tag{5}$$

Remarquons qu'une opération est déterminée dans tout le champ fonctionnel de la validité de la formule précédente, dès que l'on connait les fonctions ξ_n que cette opération fait correspondre aux puissances entières et positives de x.

51. — Avant d'aller plus loin, il nous faut étudier certaines opérations particulières fort simples. Pour chacune de ces opérations, nous chercherons les fonctions indiquées par ξ_n au § précédent.

La première de ces opérations est celle qui a pour effet de multiplier une fonction arbitraire φ par la fonction donnée α : on peut l'indiquer par M_α et lui donner le nom de *multiplication*. Pour cette opération,

$$\xi_n = M_\alpha (x^n) = \alpha\, x^n \,.$$

Cette opération n'a d'autres racines que zéro et n'est donc dégénérée pour aucune variété ; elle n'a pas non plus de variétés invariantes, sauf le cas où α est une constante ; dans ce cas M_α ne diffère pas essentiellement de l'opération identique. L'ensemble des opérations M_α, quand α varie arbitrairement, constitue un groupe permutable.

52. — Une deuxième opération, aussi simple qu'importante, est la dérivation : nous l'indiquerons par D. Elle est déterminée par

$$\xi_n = D\, x^n = n\, x^{n-1} \,.$$

La formule (5) est applicable et le cercle (r') coïncide avec (r), quel que soit r. L'opération D admet comme racine la constante ; elle est en conséquence dégénérée pour les variétés qui renferment la constante et pour celles-là seulement. De l'opération D se deduisent les opérations D^m, $E = D - z$ et E^m. L'opération D^m admet comme racine la variété ∞^m des fonctions entières de degré $m - 1$; x^{m-1} est sa racine propre ; E admet comme racine e^{zx}, fonction invariante de D d'où l'on déduit toutes les variétés invariantes ; la racine propre de E^m est $x^{m-1}\, e^{zx}$. D'où la solution des problèmes indiqués aux §§ 44-46.

53. — L'operation D^{-1}, inverse de D, est à détermination multiple : deux de ses déterminations diffèrent par une constante. De même, deux déterminations de D^{-m} diffèrent par une fonction entière de degré $m - 1$. Il est avantageux de fixer pour D^{-1} et D^{-m} une seule détermination : c'est ce que l'on peut faire très aisément en déterminant les ξ_n de D^{-1} par

$$\xi_n = D^{-1}\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,, \tag{6}$$

et celles de D^{-m} par

$$(7) \qquad \xi_n = D^{-m}\, x^n = \frac{x^{n+m}}{(n+1)\ldots(n+m)}\,.$$

La validité de la formule (5) est bien connue, et les formules (6) et (7) nous fixent la détermination de $D^{-1}\varphi$ et $D^{-m}\varphi$.

54. — En combinant par somme et multiplication les opérations M_α et D, on obtient l'opération

$$(8) \qquad F = \alpha_0\, D^m + \alpha_1\, D^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-1}\, D + \alpha_m\, D^0$$

à laquelle on donne le nom de forme différentielle linéaire d'ordre m. Les formes différentielles linéaires forment un groupe qui renferme, entre autres, les sous-groupes des multiplications (§ **51**) et celui des formes à coefficients constants, tous deux permutables. La validité de (5) est évidente. Les racines de F forment une variété linéaire ∞^m; de même leurs fonctions invariantes, ou racines de $F - z$, pour une valeur donnée de z. L'opération F^{-1} est à détermination multiple; on peut cependant, en général, en fixer la détermination en faisant, par exemple,

$$(9) \qquad F^{-1}(x^i) = 0\,, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)\ [1].$$

55. — Si α est une fonction donnée, on peut définir une opération S_α au moyen des ξ_n suivantes:

$$\xi_n = S_\alpha(x^n) = \alpha^n\,.$$

L'operation S_α a donc pour effet de substituer, en φ, la fonction $\alpha(x)$ à la variable x: on peut l'appeler *substitution*. Les opérations de substitution forment un groupe (non permutable); elle n'ont pas de racines, excepté zéro; l'étude de leurs variétés invariantes se rattache à celle des fonctions itératives de MM. SCHROETER, KORKINE et KOENIGS. Les opérations S jouissent de la propriété distributive non seulement par rapport à la somme, mais aussi par rapport

---

[1] On fixe ainsi l'intégrale de l'équation linéaire non homogène $F^{-1} = \alpha$, qu'on appelle intégrale principale (Hauptintegral) dans le domaine de $x = 0$. Voir, p. ex., SCHLESINGER, *Handbuch der lin. Differentialgleich.*, Bd. I, S. 78.

à la multiplication, c'est à dire que

$$S(\varphi\psi) = S(\varphi)\, S(\psi)\,,$$

et par conséquent par rapport à tout système d'opérations arithmétiques rationnelles.

La formule (5) est valable pour toute fonction φ appartenant à un cercle (r), pour les valeurs de x pour lesquelles la valeur absolue maxima de α est inférieure à r.

Comme cas particulier de l'opération de substitution, on peut noter S_{x+1}, et $S_{x+1} - 1$ qui est la différence finie.

II. — Dérivation fonctionnelle. Développement fonctionnel de Taylor.

56. — Si A est une opération fonctionnelle distribuitive, l'expression

$$A(x\,\varphi) - x\,A(\varphi)$$

nous donne aussi une nouvelle opération fonctionnelle distribuitive, que nous appellerons dérivée fonctionnelle première de A et que nous indiquerons par A'. La dérivée fonctionnelle de A' sera

$$A'(x\,\varphi) - x\,A'(\varphi)\,,$$

nous l'appellerons dérivée fonctionnelle seconde de A et nous l'indiquerons par A'', et ainsi de suite. Si $A^{(n)}$ est la dérivée fonctionnelle $n^{\text{ème}}$ de A, on a immédiatement

$$(10)\qquad A^{(n)}(\varphi) = A(x^n\varphi) - n\,x\,A(x^{n-1}\varphi) + \binom{n}{2} x^2 A(x^{n-2}\varphi) + \dots +$$

$$+ (-1)^n x^n A(\varphi)\,, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)\,,$$

d'où l'on tire sans peine

$$(11)\qquad A(x^n\varphi) = A^{(n)}(\varphi) + n\,x\,A^{(n-1)}(\varphi) + \binom{n}{2} x^2 A^{(n-2)}(\varphi) + \dots + x^n A(\varphi).$$

57. — Il est clair que la dérivée fonctionnelle d'une somme d'opérations est égale à la somme des dérivées fonctionnelles de ces opérations.

58. — Soit C le produit des opérations A, B, et indiquons toujours par l'accent la dérivée fonctionnelle : on aura

$$C'(\varphi) = BA(x\,\varphi) - x\,BA(\varphi)$$

ou, identiquement,

$$C'(\varphi) = BA\,(x\,\varphi) - B(x\,A(\varphi)) + (B\,x - x\,B)A(\varphi)\,,$$

ou enfin

(12) $$C' = BA' + B'A\,.$$

La règle pour la dérivation fonctionnelle d'un produit est donc la même que pour la dérivation ordinaire, et l'on trouve de même pour les dérivations d'ordre supérieur

(13) $$C^{(n)} = B^{(n)}A + n\,B^{(n-1)}A' + \binom{n}{2}B^{(n-2)}A'' + \dots + BA^{(n)}\,.$$

Bien entendu, les facteurs des termes du second membre ne sont pas en général permutables.

59. — Indiquons, comme précédemment, $A\,(x^n)$ par ξ_n et posons

$$A'(x^n) = \xi_n^{(1)}\,;$$

de la définition de A' on tire

(14) $$\xi_n^{(1)} = \xi_{n+1} - x\,\xi_n\,.$$

60. — Cherchons à présent quelles sont les propriétés de la dérivée fonctionnelle des opérations élementaires que nous avons passées en revue aux §§ **51-55.**

a) Pour la multiplication, on a immédiatement $M'(\varphi) = 0$. Réciproquement, une opération définie par ses ξ_n dont la dérivée fonctionnelle est nulle est une multiplication; en effet, on tire de (14)

$$\xi_{n+1} = x\,\xi_n\,,$$

d'où

$$\xi_n = x^n\,\xi_0$$

et, en posant

$$\varphi = \Sigma\,c_n\,x^n\,,$$

il vient $A(\varphi) = \xi_0\varphi$, c. q. f. d..

Deux opérations qui ont la même dérivée fonctionnelle ont pour différence une opération de multiplication : c'est à dire si $A' = B'$, on a $A = B + M$. Notons encore les formules

$$(AM') = A'M, \qquad (MA)' = MA'.$$

b) Pour la dérivation, on trouve

$$D(x\varphi) - x\,D(\varphi) = \varphi, \qquad \text{ou } D' = 1.$$

Cette propriété est caractéristique ; si en effet une opération A est telle que sa dérivée fonctionelle soit l'opération identique, la formule (14) donnera pour cette opération

$$\xi_{n+1} - x\,\xi_n = x^n,$$

d'où

$$\xi_n = n\,x^{n-1} + \xi_0\,x^n$$

c'est-à-dire

$$A(\varphi) = D(\varphi) + \xi_0\,\varphi\,;$$

l'opération A ne diffère donc de D que par l'addition d'une opération de multiplication. La dérivée seconde de D est nulle.

Pour l'opération D^m, on a

$$(D^m)' = m\,D^{m-1}, \tag{15}$$

et cette formule est vraie même si m est un nombre entier négatif, comme on peut le vérifier facilement.

c) La dérivée fonctionnelle de la forme différentielle linéaire

$$F = \alpha_0\,D^m + \alpha_1\,D^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1}\,D + \alpha_m\,D^0 \tag{8}$$

est, par (15),

$$F' = m\,\alpha_0\,D^{m-1} + (m-1)\,\alpha_1 D^{m-2} + \dots + 2\,\alpha_{m-2}\,D + \alpha_{m-1}\,D^0\,; \tag{16}$$

on l'obtient par la règle de dérivation ordinaire appliquée comme si F était un polynôme entier contenant D comme variable [1]. En appliquant $m+1$ fois la dérivation, on obtient $F^{(m+1)} = 0$; réci-

---

[1] La forme différentielle F' a été considérée, à côté de F, depuis plus d'une siècle ; si je ne me trompe, c'est D'ALEMBERT qui l'a remarquée le premier.

proquement, on trouve sans peine que l'opération plus générale dont la dérivée $(m+1)^{\text{ème}}$ est nulle (et définie d'ailleurs par ses ξ_n) est la forme différentielle linéaire d'ordre m dont les coefficients sont des fonctions arbitraires.

d) Enfin pour l'opération de substitution S_α, la dérivée fonctionnelle est donnée par

$$S'_\alpha = (\alpha - x)\, S_\alpha .$$

61. — La considération de la dérivée fonctionnelle nous permet d'obtenir une formule qui a la plus grande analogie de forme avec la série de TAYLOR et que nous appelerons, pour cette raison, série fonctionnelle [1] de TAYLOR. Etant donnée l'opération A satisfaisant aux conditions du § 48, et φ et ψ étant deux fonctions appartenant au cercle (r), on aura, si $\psi = \sum_0^\infty h_n x^n$,

$$A(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, A(x^n \varphi),$$

et par les formules (11):

$$A(\varphi\psi) = \sum_0^\infty h_n \left\{ A^{(n)}(\varphi) + n\, x\, A^{(n-1)}(\varphi) + \dots + x^n A(\varphi) \right\}. \tag{17}$$

Si maintenant il sera permis d'ordonner les termes du second membre selon les dérivées d'indice croissant du symbole A, il viendra

$$A(\varphi\psi) = A(\varphi)\,\psi + A'(\varphi)\, D\psi + \frac{1}{1.2} A''(\varphi)\, D^2\psi + \dots + \frac{1}{n!} A^{(n)}(\varphi)\, D^n\psi + \dots . \tag{18}$$

C'est là le développement annoncé [2].

---

[1] Par opposition, le développement ordinaire pourrait s'appeler série ponctuelle.

[2] J'ai donné pour la première fois cette formule dans les Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (S. V, T. IV, p. 142). Voir les généralisations qu'en a données M. CALÒ (Ibid., S. V, T. IV, p. 52).

62. — Le développement trouvé n'a de valeur effective que si les termes du second membre de (17) peuvent être groupés comme on l'a indiqué ; en tout autre cas, il n'a qu'une valeur formelle. On peut, dans les cas particuliers, discuter la validité de (18) comme on le fait en calcul différentiel pour la série de TAYLOR ordinaire, en examinant le reste. Posons

$$R_n(\varphi,\psi)=A(\varphi\psi)-A(\varphi)\psi-A'(\psi)D\psi-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}A^{(n-1)}(\varphi)D^{n-1}\psi;$$

on voit que R_n est une opération distributive par rapport à ψ, qui est nulle ainsi que ses $n-1$ premières dérivées fonctionnelles si ψ est une constante et dont la $n^{\text{ème}}$ dérivée fonctionnelle est $A^n(\varphi\psi)$; et on voit encore facilement que ces deux conditions caractérisent completement R_n. La validité de (18) dépend donc des champs fonctionnels où l'on doit prendre φ et ψ, si l'on veut que $\lim_{n=\infty} R_n(\varphi,\psi)=0$.

63. — De la formule (18) on tire, en faisant $\varphi=1$,

$$A(\psi)=A(1)\psi+A'(1)D\psi+\ldots+\frac{1}{n!}A^{(n)}(1)D^n\psi+\ldots, \tag{19}$$

qui montre qu'une opération fonctionnelle distribuive peut toujours s'exprimer formellement au moyen d'une série ordonnée selon les dérivées successives de la fonction arbitraire : les coefficients se déduisent facilement des ξ_n au moyen des formules (10). De la même formule (18) on tire encore :

$$A(\psi)=A(\varphi)\frac{\psi}{\varphi}+A'(\varphi)D\frac{\psi}{\varphi}+\ldots+\frac{1}{n!}A^{(n)}(\varphi)D^n\frac{\psi}{\varphi}+\ldots. \tag{20}$$

64. — La validité de la formule (18) a lieu sans exception lorsque A est une forme différentielle linéaire : dans ce cas, elle est connue depuis longtemps.

Pour une fonction donnée φ, l'ensemble des fonctions ψ pour lesquelles la formule (20) est valable constitue ce qu'on peut appeler le domaine de φ par rapport à l'opération A. Ce domaine renferme toutes les fonctions de la forme $\varrho\varphi$, où ϱ est une fonction rationnelle entière. De même, l'ensemble des fonctions ψ pour lesquelles la formule (19) est valable peut s'appeler le *domaine de la constante :* il renferme toutes les fonctions rationnelles entières.

III. — Exemple de détermination d'une classe d'opérations fonctionnelles au moyen d'une équation symbolique.

65. — Il est intéressant de remarquer qu'une operation fonctionnelle distribuitive peut être déterminée par certaines de ses propriétés, en particulier par une équation symbolique qu'elle doit vérifier. Ainsi nous avons vu (§ 60) que l'opération de multiplication est caractérisée par l'équation symbolique $A' = 0$; que la solution générale de l'équation $A' = 1$ est donnée par $A = D + M$; que la forme différentielle linéaire d'ordre $m - 1$ est la solution générale de l'équation $A^{(m)} = 0$, et on pourrait multiplier les exemples. Dans les §§ suivants nous allons résoudre le problème de déterminer l'opération plus générale A qui vérifie une équation de la forme

$$\lambda_0 A^{(n)} + \lambda_1 A^{(n-1)} + \dots + \lambda_{n-1} A' + \lambda_n A = 0, \tag{21}$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des fonctions données.

66. — Remarquons d'abord que si une opération A est une solution de l'équation (21), μA en est pareillement une solution, μ étant une fonction arbitraire [§ 60, a)]. De même, si A, B sont deux solutions et μ, ν sont deux fonctions arbitraires, $\mu A + \nu B$ sera aussi une solution. Ici se présente la conception d'opérations linéairement dépendantes, ou non; nous dirons que des opérations A_1, $A_2, \dots, A_n$ sont linéairement dépendantes ou indépendantes, suivant qu'il existe ou non un système de n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ telles que l'on ait identiquement — c'est à dire pour toute fonction φ sur laquelle opèrent les $A_1, A_2, \dots, A_n$ — la relation

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = 0. \tag{22}$$

Or, la condition nécéssaire et suffisante pour que les opérations $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient linéairement dépendantes, est que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul. On voit immédiatement que la condition est nécéssaire, en prenant $n-1$ fois la dérivée fonctionnelle de (22) (§§ **57**, **60**) et en éliminant $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Pour montrer que la condition est aussi suffisante, remarquons que le déterminant précédent peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(\varphi) & A_2(\varphi) & \dots & A_n(\varphi) \\ A_1(x\varphi) & A_2(x\varphi) & \dots & A_n(x\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1(x^{n-1}\varphi) & A_2(x^{n-1}\varphi) & \dots & A_n(x^{n-1}\varphi) \end{vmatrix};$$

or, si ce déterminant est nul, on peut trouver n fonctions telles que l'on ait

$$\alpha_1 A_1(x^q\varphi) + \alpha_2 A_2(x^q\varphi) + \dots + \alpha_n A_n(x^q\varphi) = 0,$$

$$(q = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

changeons maintenant φ en $x\varphi$: l'équation précédente sera encore vraie pour $q = n$, et de même pour $q = n+1$, $n+2$, etc.. Sous les conditions de validité de la formule (5), on aura donc, quelle que soit la fonction ψ,

$$\alpha_1 A_1(\psi\varphi) + \alpha_2 A_2(\psi\varphi) + \dots + \alpha_n A_n(\psi\varphi) = 0,$$

et puisque ψ est arbitraire, le théorème est démontré.

67. — Si l'on a $n+1$ solutions de l'équation (21), elles sont linéairement dépendantes, puisque l'élimination des coefficients λ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ montre que le déterminant Δ d'ordre $n+1$ des $n+1$ solutions, est identiquement nul. Montrons que l'équation (21) admet n solutions linéairement indépendantes : toute autre solution s'exprimera linéairement au moyen de celles-là ; au système de ces n solutions on pourra donc donner le nom de système fondamental.

68. — A cet effet, considérons l'équation de degré n en z :

$$\lambda_0 (z-x)^n + \lambda_1 (z-x)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}(z-x) + \lambda_n = 0 \tag{23}$$

et soient $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ ses racines, que nous supposerons d'abord différentes entre elles. L'opération de substitution (§ **55**) S_{ω_i}

pour une quelconque de ces racines donne [§ 60, d)]

$$S'_{\omega_i} = (\omega_i - x)\, S_{\omega_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,; \tag{24}$$

en dérivant encore, on aura

$$S''_{\omega_i} = (\omega_i - x)^2\, S_{\omega_i},$$

et ainsi de suite ; d'où il suit que si l'on fait $A = S_{\omega_i}$, l'équation (21) est vérifiée quelle que soit la fonction arbitraire φ. Nous avons ainsi les n solutions

$$S_{\omega_1}, \ S_{\omega_2}, \ldots, \ S_{\omega_n}$$

de l'équation, et si l'on forme le déterminant Δ pour ces solutions, on voit immédiatement [en tenant compte de (24) et de ses conséquences] qu'il n'est pas identiquement nul.

69. — Si parmi les n fonctions $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$, h étaient égales entre elles [par exemple $\omega_1(x) = \omega_2(x) = \ldots = \omega_h(x)$] on voit aussi aisément qu'aux h opérations $S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, \ldots, S_{\omega_h}$ on peut substituer le systéme

$$S_{\omega_1}, \quad S_{\omega_1}D, \quad S_{\omega_1}D^2, \quad \ldots, \quad S_{\omega_1}D^{h-1}.$$

Le problème proposé est donc complètement résolu.

70. — L'équation linéaire (21) nous a conduits, avec ses solutions, à une classe d'opérations distributives dont le type général est

$$\sum_{i=1}^{s} (\alpha_{i,0}\, S_{\omega_i} + \alpha_{i,1}\, S_{\omega_i} D + \ldots + \alpha_{i,h_i}\, S_{\omega_i} D^{h_i})\,, \tag{25}$$

où $\alpha_{i,j}$ et ω_i sont des fonctions données. Cette classe d'opérations — qui joue, pour ainsi dire, dans l'ensemble des opérations distributives le même rôle que jouent les fonctions $\Sigma\, x^a e^{bx}$ parmi les fonctions analytiques — jouit des propriétés suivantes :

La somme de deux opérations du type (25) est une opération du même type.

Le produit de deux opérations du type (25) est aussi une opération du même type : ces opérations forment donc un groupe.

La dérivation fonctionelle exécutée sur une opération de ce groupe reproduit une opération du même groupe.

Au groupe (25) appartient comme sous-groupe l'ensemble des formes différentielles linéaires. Au même groupe appartient le sous-groupe des opérations de la forme

$$\alpha_1 S_{\omega_1} + \alpha_2 S_{\omega_2} + \dots + \alpha_s S_{\omega_s},$$

dont un sous-groupe est à son tour celui où les ω sont des fonctions algébriques, qui contient celui où les ω sont rationelles, etc.. Si $\omega_i = x + i$, les opérations précédentes se réduisent aux formes linéaires aux différences finies.

Remarquons enfin que si l'on prend $\omega_i = e_i x$, où e_i est une racine primitive de l'unité, les opérations (25) deviennent celles que M. SCHAPIRA a prises comme base d'un calcul qu'il a appelé « Cofunctionalrechnung » ([1]).

CHAPITRE III.

Expression des opérations distributives par des séries.

I. — Séries ordonnées suivant les puissances de D.

71. — Nous avons vu ci-dessus, au § 63, que toute opération distributive A peut, au moins formellement, être mise sous la forme

$$A(\varphi) = A(1)\,\varphi + A'(1)\,D\varphi + \dots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(1) D^n\varphi + \dots ;$$

réciproquement, toute série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n \varphi \tag{1}$$

représente une opération distributive pour l'ensemble des fonctions qui la rendent convergente. Nous sommes ainsi conduits à l'étude des séries (1) ordonnées selon les puissances entières et positives du symbole de dérivation D, et nous appelerons *champ fonctionnel*

([1]) *Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen,* Wien, Holzhausen, 1881; *Theorie allgemeiner Cofunctionen,* Leipzig, Teubner, 1892.

de validité d'une telle série l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles elle est uniformément convergente ; par suite d'un théorème connu de la théorie des fonctions, la série (1) donne, pour chacune de ces fonctions φ, une fonction de notre ensemble (série de puissances convergente dans un domaine de $x = 0$).

Les formes différentielles linéaires, qui tiennent parmi les opérations distributives la place des polynômes entiers parmi les fonctions, se présentent comme cas particulier des séries (1) et leur champ de validité est indéfini.

72. — Si l'on substitue dans (1) pour φ un polynôme entier, la série se réduit à un polynôme : on peut donc dire que les fonctions rationnelles entières appartiennent au champ de validité de toute série (1). Mais on peut montrer que si les fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, coefficients de (1), appartiennent à un même cercle (r), la série (1) a un champ de validité comprenant une infinité d'autres fonctions.

73. — Soit en effet m_n la valeur absolue maxima de α_n en (r) : nous pouvons déterminer une suite de nombres positifs décroissants a_n tels que la série $\Sigma\, a_n m_n$ soit convergente. Alors toute fonction

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad \text{où} \quad |c_s| \leq \frac{a_s}{s\,!},$$

appartient au champ de validité de (1). Car, si l'on prend $|x| \leq r$, on aura

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s r^s}{s\,!} \leq a_0\, e^r,$$

$$|D^n \varphi| \leq \sum_{s=n}^{\infty} \frac{a_s r^{s-n}}{(s-n)!} \leq a_n\, e^r,$$

d'où

$$|\Sigma\, \alpha_n D^n \varphi| \leq e^r\, \Sigma\, a_n\, m_n,$$

ce qui démontre la convergence uniforme de la série (1).

74. — Notons le cas particulier où les fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ se maintiennent toutes, dans le cercle (r), inférieures en valeur absolue à un nombre m. Dans ce cas, a étant un nombre positif arbitraire plus petit que l'unité, toute fonction

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad \text{où} \quad |c_s| \leq \frac{a^s}{s\,!}, \tag{2}$$

se trouve, ainsi que $x\varphi$, $x^2\varphi$, ..., dans le champ de validité de la série (1).

75. — La série (1) représente une opération distributive que nous indiquerons par A :

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n \varphi . \tag{1}$$

Prenons une fonction φ qui soit dans le champ de validité de (1) en même temps que $x\varphi$; on aura :

$$A(\varphi x) = x \sum_{0}^{\infty} \alpha_n D^n \varphi + \sum_{1}^{\infty} n\, \alpha_n D^{n-1} \varphi,$$

d'où, en indiquant toujours par A' la dérivée fonctionnelle de A,

$$A'(\varphi) = \sum_{1}^{\infty} n\, \alpha_n D^{n-1} \varphi;$$

la règle pour la dérivation est donc la même que pour les séries de puissances ordinaires. De même si $x^2\varphi, \ldots, x^q\varphi$ se trouvent dans le champ de validité de (1), on aura

$$A^{(q)}(\varphi) = \sum_{q}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-q+1)\, \alpha_n D^{n-q} \varphi . \tag{3}$$

76. — Dans le cas particulier examiné au § 74, le développement (3) est certainement valable pour les fonctions (2) pour tout nombre entier positif q ; de plus, on voit facilement qu'en ce cas on a (§§ 73 et 74)

$$A(\varphi) \leq \frac{m\, e^r}{1-a}, \qquad \frac{1}{q\,!} A^{(q)}(\varphi) \leq \frac{m\, e^r\, a^q}{(1-a)^{q+1}} .$$

Si donc on fait $a < \frac{1}{2}$, la série

$$\Sigma \frac{1}{q\,!} A^{(q)}(\varphi)\, D^q \psi$$

est, par rapport à ψ, une opération de la forme (1) dont les coefficients appartiennent à un cercle déterminé et qui admet par conséquent un champ de validité; le reste de la série tendant à zéro pour toute fonction ψ prise dans ce champ, la série représente $A(\varphi\psi)$ (§ 62) et le devéloppement fonctionnel de TAYLOR est valable.

77. — Si dans la formule (1) on pose $\varphi = 1$, on trouve $A(1) = \alpha_0$, de même, si l'on pose $\varphi = 1$ dans (3), on trouve

$$\alpha_q = \frac{1}{q!} A^{(q)}(1) .$$

On retombe ainsi sur le développement (19) du § 63, et l'on voit que pour une opération à détermination unique il ne peut exister qu'un seul développement de la forme (1). Un tel développement ne peut donc être nul pour toute fonction prise dans un domaine de la constante (§ 64) que si tous ses coefficients sont nuls: deux séries (1) égales pour toute fonction d'un domaine de la constante ont leurs coefficients respectivement égaux. D'où il suit qu'on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche du développement de la forme (1) d'une opération distributive définie par une propriété convenable. Nous en donnerons un exemple au § 79.

78. — Quand la validité du développement fonctionnel de TAYLOR

$$A(\varphi\psi) = \Sigma \frac{1}{q!} A^{(q)}(\varphi)\, D^q\psi \tag{4}$$

est démontrée, on peut en déduire, en posant $\varphi = \omega$, $\psi = \varphi/\omega$, le nouveau développement pour A:

$$A(\varphi) = \Sigma \frac{1}{q!} A^{(q)}(\omega)\ D^q \frac{\varphi}{\omega} ;$$

et en posant

$$\omega D \frac{\varphi}{\omega} = E\varphi , \quad \text{d'où} \quad \omega\, D^q \frac{\varphi}{\omega} = E^q \varphi ,$$

on obtient pour $A(\varphi)$ une expression de la forme

$$A(\varphi) = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_q E^q \varphi . \tag{5}$$

On voit facilement que la fonction ω joue, dans ce développement, le même rôle que joue la constante dans (1); le champ de validité de (5) est un domaine de ω (§ 64) et toute fonction de la forme $\varphi = x^n \omega$ est dans ce champ de validité, puisque $x^n \omega$ est une racine de E^q pour $q > n$, et est précisément une racine propre de E^{n+1}.

79. — Une opération A, donnée sous la forme d'une série (1), peut être dégénerée; l'opération D elle-même nous en donne un exemple. Mais une opération donnée par une série (1) peut-elle faire correspondre à l'ensemble fonctionnel une variété à un nombre fini de dimensions? La réponse est affirmative; nous allons construire effectivement, sous forme d'une série (1), une opération C qui fait correspondre à chaque fonction φ une constante, et par conséquent à un ensemble fonctionnel à un nombre infini de dimensions une variété à une seule dimension.

Soit en effet

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} \lambda_n D^n \varphi$$

une opération qui, pour toute fonction φ appartenant à son champ de validité, donne comme résultat une constante. Pour une telle fonction φ, la série du second membre est convergente uniformément et comme telle, par une proposition connue de la théorie des fonctions [1], elle représente une fonction dont la dérivée s'obtient par la dérivation terme à terme de la série même:

$$DC(\varphi) = D\lambda_0 \cdot \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (n\,\lambda_{n-1} + D\,\lambda_n)\, D^n \varphi\,.$$

Mais $C(\varphi)$, par hypothèse, est une constante quelle que soit φ dans le champ de validité de C: on doit donc avoir (§ 77):

(6) $$D\,\lambda_0 = 0\,, \qquad n\,\lambda_{n-1} + D\,\lambda_n = 0\,.$$

De ces équations il est facile de tirer l'expression des fonctions λ_n: en indiquant par $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ des constantes arbitraire, on obtient

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = (-1)^n \left\{ a_0\, x^n + n\, a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \dots + n\, a_{n-1} x + a_n \right\}.$$

---

[1] *Zur Functionenlehre,* Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1880.

La question proposée est donc résolue par le développement

$$(7)\quad C(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,!}\left\{a_0x^n+n\,a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\ldots+a_n\right\}D^n\varphi.$$

Remarquons que les polynômes λ_n, définis par les équations (6), sont ceux auxquels M. APPELL a consacré un intéressant Mémoire [1]; tout système de polynômes de M. APPELL nous donne donc une série (7) qui fait correspondre une constante à toute fonction de son champ de validité.

80. — Suivant le choix des constantes arbitraires $a_0, a_1, \ldots$, ce champ de validité peut être plus ou moins étendu. Faisons d'abord, par exemple, $a_0=1$, $a_n=0$, $(n=1,2,3,\ldots)$; la formule (7) nous donnera le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n\,!}D^n\varphi$$

et le théorème ordinaire de TAYLOR nous montre que cette série est valable pour une fonction quelconque φ: si φ appartient au cercle (r), il suffit de prendre $|x|\leq r/2$ et la série précédente représente la constante $\varphi(0)$.

Faisons ensuite $a_n=1$, $(n=0,1,2,\ldots)$: nous aurons le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n\,!}D^n\varphi.$$

Celui-ci n'est plus, comme le précédent, valable pour toute fonction φ: il faudra que φ appartienne à un cercle (r) où r est supérieur à l'unité; on devra prendre

$$|x|\leq(r-1)/2$$

et le développement aura pour valeur $\varphi(-1)$.

81. — L'opération αC, où α est une fonction donnée, fait correspondre à l'ensemble fonctionnel la variété à une dimension

(1) *Sur une classe de polynômes,* Ann. de l'École Normale Supérieure, S. II, T. IX, 1880.

$k\alpha$. Plus généralement, on peut construire une opération A qui transforme un ensemble fonctionnel à un nombre infini de dimensions en une variété linéaire donnée à n dimensions $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$: il suffit de prendre

$$A = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n\,, \tag{8}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ étant des séries (7). De plus, il est toujours possible de trouver une fonction à laquelle A fait correspondre une fonction donnée

$$\psi = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + \dots + g_n\alpha_n$$

de la variété $V_n(\alpha)$. En effet, on peut toujours trouver n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tellesque, si

$$A(\varphi_i) = c_{i,1}\,\alpha_1 + c_{i,2}\,\alpha_2 + \dots + c_{i,n}\,\alpha_n\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

le déterminant $|c_{i,j}|$ soit différent de zéro, car dans le cas contraire A transformerait l'ensemble fonctionnel en une variété ayant moins de n dimensions. On déterminera alors les nombres $h_1, h_2, \dots, h_n$ au moyen des équations

$$c_{1,j}\,h_1 + c_{2,j}\,h_2 + \dots + c_{n,j}h_n = g_j\,, \qquad (j = 1, 2, \dots, n)\,,$$

ce qui est possible, puisque le déterminant $|c_{ij}|$ est différent de zéro, et l'on aura

$$A\,(h_1\,\varphi_1 + h_2\,\varphi_2 + \dots + h_n\,\varphi_n) = \psi\,.$$

82. — L'opération (8) transforme la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ en elle-même; on peut donc lui appliquer tout ce q'on a obtenu aux §§ **29-40.**

Quant aux racines de (8), il est clair qu'elles forment une variété à un nombre infini de dimensions: étant données $n+1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$ arbitraires dans le champ de validité de (8), il existera toujours une combinaison linéaire de ces fonctions qui sera racine de A.

83. — Remarquons enfin que le produit d'une opération αC par une opération quelconque est encore une opération αC, et il en est de même du produit d'une opération quelconque par une opération C.

Une remarque analogue s'applique à l'opération A donnée par la formule (8).

II. — Séries de première et de deuxième espèce.

84. — Une série

$$(1) \qquad \Sigma\, \alpha_n D^n \varphi$$

ne converge pas en général pour une fonction quelconque φ; cette fonction (donnée, comme nous l'avons établi au § 1, par une série de puissances de x) doit ordinairement avoir un cercle de convergence de rayon supérieur à un nombre déterminé, pour qu'on puisse dire qu'elle appartient au champ de validité de (1). Toutefois, il existe des séries (1) valables pour toute fonction φ de notre ensemble fonctionnel; en d'autres termes, quelque petit que soit le rayon de convergence de φ, ou pourra toujours trouver un domaine du point $x = 0$ pour lequel la série (1) est convergente uniformément. Nous avons vu au § 80 un exemple d'une telle série. Nous sommes ainsi conduits à partager les séries (1) en deux classes: celles *de première espèce*, qui sont valables pour tout notre ensemble fonctionnel, et celles de *deuxième espèce*, dont le champ de validité est seulement une partie de cet ensemble. Ainsi

$$\Sigma \frac{x^n}{n\,!} D^n \varphi$$

est une série de première espèce, convergente uniformément pour $|x| < r/2$ si r est le rayon de convergence de φ, tandis que

$$\Sigma \frac{1}{n\,!} D^n \varphi\,, \qquad \Sigma\, D^n \varphi$$

sont des séries de deuxième espèce, valables, la première, pour les fonctions φ qui appartiennent à un cercle (r) où $r \geq 1$ et la seconde, valable seulement pour une classe de fonctions transcendantes entières.

85. — Un exemple fort simple permet de montrer qu'on peut, en certains cas, à une série de deuxième espèce en substituer une de première espèce, qui jouit des mêmes propriétés formelles qui servent de définition à la première. La série

$$(9) \qquad Z(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} D^n \varphi$$

est évidemment de deuxième espèce. D'ailleurs, elle vérifie l'équation

$$(10) \qquad DZ(\varphi) - zZ(\varphi) = \varphi ,$$

dont on pourrait l'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. D'un autre côté, la série

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{x}{z^n} + \frac{x^2}{2!\, z^{n-1}} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!\, z}\right) D^n \varphi$$

est une série (7): on l'obtient en faisant dans cette formule

$$a_0 = \frac{1}{z}, \qquad a_n = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} .$$

Par conséquent, $e^{zx} C(\varphi)$ nous donne le produit de e^{zx} par une constante, d'où il suit que l'opération

$$Z_1(\varphi) = Z(\varphi) + e^{zx} C(\varphi)$$

vérifie aussi l'équation (10). Mais cette opération peut s'écrire

$$e^{zx} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{e^{-zx}}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{x}{z^n} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!\, z}\right) D^n \varphi ,$$

et, en développant e^{-zx} et en supprimant les termes communs,

$$(11) \qquad Z_1(\varphi) = e^{zx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^{n+2} z}{(n+2)!} + \dots\right) D^n \varphi ;$$

or il est très facile de vérifier que le second membre est une série de première espèce, et pour une fonction φ appartenant à (r), cette série est convergente uniformément pour $|x| \leq r/2$ (1).

---

(1) Voir un exemple plus général dans les « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, avril 1897 ».

III. — **Puissances négatives de D. Séries ordonnées suivant ces puissances.**

86. — L'opération indiquée par $Z_1(\varphi)$, que nous avons obtenue au § précédent, peut s'écrire $(D-z)^{-1}$, puisqu'elle vérifie l'équation (10). Si maintenant on fait $z=0$, on a l'opération D^{-1}, et la série (11) donne pour cette opération l'expression :

$$D^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} D^n\varphi . \tag{12}$$

Il est facile de vérifier à posteriori l'exactitude de cette formule pour $|x| \leq r/2$ si φ appartient à (r). En outre, on voit que la détermination de D^{-1} donnée par la formule (12) est précisément celle que nous avons fixée au § 53, puisque en ordonnant le second membre de (12) suivant les puissances de x, le premier coefficient est nul. Puisque toute fonction φ rentre dans son champ de validité, la série (12) est une série de première espèce.

87. — En changeant dans (12) la fonction φ en $D^{-1}\varphi, D^{-2}\varphi, \ldots$, nous obtenons la formule suivante, facile à vérifier en général,

$$D^{-m}\varphi = \frac{x^m}{(m-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(m+n).n!} D^n\varphi . \tag{13}$$

Le second membre est encore une série de première espèce : quelle que soit φ, si elle appartient à (r), la série (13) est valable pour $|x| \leq r/2$. En outre, la détermination de D^{-m} donnée par (13) est celle que nous avons fixée au § 53.

88. — Donnons une limite supérieure des valeurs de D^{-m}, qui nous sera utile tout-à l'heure. Soit $\varphi = \Sigma\, a_n x^n$ une fonction appartenant à (r) et dont g est la valeur absolue maxima en (r) ; on a, par une propriété connue des séries de puissances,

$$|a_n| \leq g/r^n ;$$

or

$$D^{-m}\varphi = \sum_0^{\infty} \frac{a_n x^{m+n}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)} ,$$

donc, pour $|x| \leq r' < r$,

$$|D^{-m}\varphi| \leq \frac{g\, r'^m}{m!} \sum_0^{\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \left(\frac{r'}{r}\right)^n ;$$

or la série contenue sous le signe Σ a ses termes respectivement inférieurs à ceux de la progression géométrique ; donc

$$|D^{-m}\varphi| < \frac{g\, r\, r'^m}{(r - r').m!} \tag{14}$$

et en particulier, si l'on prend $r' \leq r/2$,

$$|D^{-m}\varphi| < 2g\frac{r'^m}{m!} . \tag{15}$$

89. — On peut appliquer la dérivation fonctionnelle terme à terme aux séries (12) et (13) ; on obtient ainsi le résultat que nous avons annoncé au § 60 :

$$(D^{-m})' = - m\, D^{-(m+1)} . \tag{16}$$

Si, au moyen de cette formule, on construit le développement fonctionnel de TAYLOR (§ 61) pour l'opération D^{-1}, on trouve

$$D^{-1}(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D^{-(n+1)}\psi \cdot D^n\varphi . \tag{17}$$

Nous voulons démontrer que cette formule remarquable a une validité effective quelles que soient les fonctions φ et ψ, pourvu qu'en indiquant par (r) un cercle auquel elles appartiennent toutes deux, on prenne le module de x non supérieur à $r/2$.

90. — A cet effet, par la formule d'intégration par parties et en prenant toujours les déterminations de D^{-1} et D^{-m} comme on a fixé au § 53, on a

$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi \cdot \varphi - D^{-1}(D^{-1}\,\psi \cdot D\varphi) ,$$

$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi \cdot \varphi - D^{-2}\psi \cdot D\varphi + D^{-1}(D^{-2}\psi \cdot D^2\varphi) ,$$

et ainsi de suite, en sorte que

$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi \cdot \varphi - D^{-2}\psi \cdot D\varphi + \ldots + (-1)^{n-1} D^{-n}\,\psi \cdot D^{n-1}\varphi +$$
$$+ (-1)^n D^{-1}(D^{-n}\,\psi \cdot D^n\varphi) ;$$

on voit donc que le reste (§ 62) du développement fonctionnel de TAYLOR est donné par

$$D^{-1}(D^{-n}\psi \cdot D^n\varphi)\,;$$

il s'agit de prouver que ce reste tend à zéro pour $n=\infty$. Or, puisque nous avons pris $|x|<r'\leq r/2$, en indiquant par g la valeur absolue maxima de ψ en (r), nous aurons, par l'inégalité (15),

$$|D^{-n}\psi| < 2g\frac{r'^n}{n!}\,;$$

indiquons encore par $\overline{\varphi}$ ce que devient φ lorsqu'on y remplace chaque coefficient et la variable par leurs modules respectifs, et nous aurons :

$$|D^{-n}\psi \cdot D^n\varphi| < 2g\frac{r'^n}{n!}D^n\overline{\varphi}\,,$$

mais puisque $\overline{\varphi}$ appartient à (r) et $r'\leq r/2$, le second membre de l'inégalité précédente tend évidemment à zéro pour $n=\infty$. Il en est donc de même, par (14), de $D^{-1}(D^{-n}\psi \cdot D^n\varphi)$ et la formule (17) est ainsi valable sous les conditions énoncées.

D'une façon analogue, on obtient la formule

$$D^{-m}(\varphi\psi)=\sum_0^\infty(-1)^n\binom{m+n-1}{n}D^{-(m+n)}\psi\cdot D^n\varphi, \tag{18}$$

valable sous les mêmes conditions.

91. — Passons maintenant à l'étude des séries ordonnées suivant les puissances entières et négatives de D. Soit

$$\sum_0^\infty \alpha_n D^{-n}\varphi \tag{19}$$

une telle série. Nous dirons encore qu'elle est valable pour une détermination φ_1, lorsqu'elle est uniformément convergente dans un domaine de $x=0$ pour $\varphi=\varphi_1$; l'ensemble des fonctions pour lesquelles (19) est valable en constitue le champ fonctionnel de validité. On peut donner, pour les séries de la forme (19), une condition fort peu restrictive de validité. Supposons en effet que les fonctions α_n appartiennent à un cercle commun (r_1); en outre,

m_n étant la valeur absolue maxima de α_r en (r_1), supposons qu'il existe deux nombres positifs h et c tels que

$$m_n < h\, n!\, c^n ;$$

sous ces conditions, la série (19) admet comme champ de validité tout notre ensemble fonctionnel. Soit en effet φ une fonction appartenant à un cercle quelconque (r), g sa valeur absolue maxima en (r) ; soit enfin r' un nombre positif inférieur à r, r_1 et $1/c$. On aura, par (14), pour $|x| \leq r'$,

$$|D^{-n}\varphi| < \frac{g\, r\, r'^n}{(r-r').n!},$$

d'où

$$|\alpha_n D^{-n}\varphi| < \frac{m_n g\, r\, r'^n}{(r-r').n!} < \frac{g\, h\, r}{r-r'}\, c^n r'^n,$$

et puisque cr' est plus petit que l'unité, la série $\Sigma\, \alpha_n D^{-n}\varphi$ sera absolument et uniformément convergente pour les valeurs de x indiquées.

92. — La série (19) nous donne donc, sous les conditions énoncées au § précédent, une opération distributive que nous indiquerons par $A(\varphi)$; formons $A(\varphi\psi)$ en appliquant les formules (17) et (18), nous aurons — formellement pour le moment —

$$A(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \alpha_n \binom{n+\nu-1}{\nu} D^{-(n+\nu)}\psi \cdot D^\nu\varphi .$$

Je dis que la série du second membre est absolument et uniformément convergente dans un domaine de $x=0$, φ et ψ étant deux fonctions qui appartiennent à (r). Prenons en effet deux nombres r'', r''' tels que $r'' < r''' \leq r'/2$; on aura, par les principes de la théorie des séries de puissances, k étant la valeur absolue maxima de φ en (r), et, pour $|x| < r''$,

$$|D^\nu \varphi| < \frac{2\, k\, \nu!}{r'''^\nu}$$

en outre, g étant le valeur absolue maxima de ψ en (r) on a, par le § 88, formule (15), et pour les mêmes valeurs de x,

$$|D^{-(n+\nu)}\psi| < 2g\frac{r''^{n+\nu}}{(n+\nu)!},$$

d'où il suit que le terme général du développement précédent est, en valeur absolue, plus petit que

$$4gkm_n\binom{n+\nu-1}{\nu}\frac{\nu!}{(n+\nu)!}\frac{r''^{n+\nu}}{r'''^{\nu}},$$

et par les conditions posées pour m_n au § précédent, plus petit que

$$4gkh\frac{n}{n+\nu}(c\,r'')^n\left(\frac{r''}{r'''}\right)^{\nu};$$

mais c'est là le terme d'une série convergente à termes positifs, c. q. f. d. .

Nous pouvons donc ordonner le développement précédent suivant les puissances $D^\nu\varphi$, et les coefficients de ces puissances seront les dérivées fonctionnelles de l'opération A, divisées par ν! Mais nous apercevons immédiatement que ces dérivées sont précisément les séries qu'on obtient de la série (19) en appliquant la dérivation fonctionnelle terme à terme. D'où l'on conclut qu'aux opérations fonctionnelles representées par des séries (19) on peut appliquer la dérivation terme à terme sous les conditions du § 91, et que le théorème fonctionnel de Taylor est applicable à ces opérations pour tout l'ensemble fonctionnel et pour les valeurs de la variable comprises dans un domaine convenable de $x = 0$. On en conclut encore la possibilité de substituer, pour l'opération A, à l'expression (19) une série ordonnée suivant les puissances de $E(\varphi) = \omega\,D(\varphi/\omega)$ comme cela a été indiqué au § 78.

93. — Une série (19) valable soit pour tout l'ensemble fonctionnel, soit pour un domaine quelconque de la constante, ne peut être nulle pour toute fonction φ que si ses coefficients sont nuls. Nous allons même voir qu'il suffit que la série (19) soit nulle pour toute puissance entière et positive x^h de la variable, pour que ses coefficients soient tous nuls. Faisons en effet $\varphi = x^h$ et posons

$$\alpha_n = a_{n,0} + a_{n,1}\,x + a_{n,2}\,x^2 + \dots,$$

nous aurons par hypothèse, quel que soit h,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n,0} + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \ldots) \frac{x^n}{(h+1)(h+2)\ldots(h+n)} = 0,$$

et puisque la série, étant valable, peut être ordonnée suivant les puissances de x, on devra avoir

$$a_{0,0} = 0, \qquad a_{0,1} + \frac{a_{1,0}}{h+1} = 0, \quad \ldots$$

et en général

$$(20) \quad a_{0,n} + \frac{a_{1,n-1}}{h+1} + \frac{a_{2,n-2}}{(h+1)(h+2)} + \ldots + \frac{a_{n,0}}{(h+1)(h+2)\ldots(h+n)} = 0.$$

Or on ne peut satisfaire à ces conditions qu'en faisant tous les coefficients $a_{i,j}$ égaux à zéro, car si l'on fixe n et l'on donne à h les $n+1$ valeurs consécutives $h, h+1, h+2, \ldots, h+n$, le déterminant des coefficients inconnues $a_{i,j}$ dans le système (20) sera :

$$\begin{vmatrix} (h+1)(h+2)\ldots(h+n) & (h+2) & \ldots(h+n) & \ldots\ h+n & 1 \\ (h+2)(h+3)\ldots(h+n+1) & (h+3) & \ldots(h+n+1) & \ldots\ h+n+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+n+1)\quad \ldots(h+2n) & (h+n+2) & \ldots(h+2n) & \ldots\ h+2n & 1 \end{vmatrix}$$

qui équivaut, comme on le voit par la soustraction des lignes horizontales, à

$$n! \begin{vmatrix} (h+2)(h+3)\ldots(h+n) & (h+3) & \ldots(h+n) & \ldots\ h+n & 1 \\ (h+3)(h+4)\ldots(h+n+1) & (h+4) & \ldots(h+n+1) & \ldots\ h+n+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+n+1)\quad \ldots(h+2n-1) & (h+n+2) & \ldots(h+2n-1) & \ldots\ h+2n-1 & 1 \end{vmatrix};$$

en répétant sur ce déterminant, qui a la même forme du précédent, la même réduction, on arrive enfin à un produit de factorielles par le déterminant

$$\begin{vmatrix} h+n & 1 \\ h+n+1 & 1 \end{vmatrix}$$

qui n'est certainement pas nul. On conclut de là que tous les coefficients $a_{i,j}$ doivent être nuls.

94. — Une démonstration tout-à-fait analogue permet de vérifier le même théorème pour les séries de la forme

$$\sum_{-m}^{\infty} \alpha_n D^{-n} \varphi \,. \tag{21}$$

95. — Du théorème précédent, il suit que si deux séries de la forme (19) ou (21) donnent le même résultat pour toute fonction φ d'un domaine de la constante, ou même seulement pour toute puissance entière et positive de la variable, elles ont respectivement les mêmes coefficients. De là on conclut qu'on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche de l'expression d'une opération sous forme de série ordonnée suivant les puissances entières négatives de D.

IV. — Interpolation fonctionnelle.

96. — Nous terminerons ce chapitre, qui a pour objet l'expression d'une opération fonctionnelle distributive au moyen d'opérations du calcul ordinaire, par la recherche d'une opération A définie par la condition de faire correspondre aux fonctions d'une suite donnée $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ respectivement les fonctions d'une autre suite donnée $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots$. On peut dire qu'on pose ainsi un problème d'interpolation fonctionnelle.

Si, comme nous le supposerons, l'opération, A est à détermination unique, il est clair qu'entre m quelconques des fonctions données α_n il ne devra subsister aucune relation linéaire : car à une fonction construite linéairement avec m des fonctions α_n correspond la même expression linéaire des fonctions correspondantes β_n.

97. — Commençons par le cas où les fonctions données sont en nombre fini ; on doit trouver une opération qui fasse correspondre respectivement aux fonctions données $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ linéairement indèpendantes, les fonctions données $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. On peut dire que cette opération transforme la variété linéaire d'ordre n, $V(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, dans la variété, d'ordre au plus égal à n, des fonctions β. Le problème n'est pas déterminé, car si A est l'opération cherchée et B est une opération dont $V_n(\alpha)$ est variété racine, toute opération de la forme

$$A + CB$$

répond à la question, C étant une opération arbitraire à détermination unique.

En particulier, il existe une forme différentielle linéaire d'ordre $n-1$ qui répond à la question : on peut la déterminer comme il suit. Soit

$$A = \pi_0 D^{n-1} + \pi_1 D^{n-2} + \dots + \pi_{n-1} D^0$$

cette forme : le système d'équations linéaires suivant (où pour abrèger $\alpha^{(r)}$ représente la dérivée $r^{\text{ème}}$ de α)

$$\pi_0 \alpha_i^{(n-1)} + \pi_1 \alpha_i^{(n-2)} + \dots + \pi_{n-1} \alpha_i = \beta_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

sert à déterminer les coefficients $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ de la forme A ; d'où, en indiquant comme au § 13 par $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)$ le déterminant wronskien des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$, on tire

$$(22) \qquad A = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \varphi, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)} .$$

Cette formule offre la plus grande analogie avec la formule d'interpolation de LAGRANGE. En indiquant par $U_i(\varphi)$ le coefficient de β_i dans la formule précédente et en posant

$$(23) \qquad F = \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})},$$

où F est par conséquent la forme différentielle linéaire de l'ordre n qui admet $V_n(\alpha)$ comme variété racine, on voit aisément que l'on a

$$(24) \qquad DU_i = \mu_i F, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$ étant donc les multiplicateurs de F.

98. — La formule (22) n'est pas nouvelle : je crois nouvelle au contraire la formule suivante, qu'on peut regarder comme l'analogue de la formule d'interpolation de NEWTON. Posons

$$(25) \quad A(\varphi) = \lambda_0 \frac{\varphi}{\alpha_0} + \lambda_1 \frac{W(\alpha_0, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1)} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})};$$

nous avons ainsi une forme différentielle linéaire de l'ordre $n-1$ qu'on peut déterminer aisément par les conditions

$$A(\alpha_i)=\beta_i, \quad (i=0,1,2,\ldots,n-1).$$

En effet, en remplaçant successivement φ par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ on obtient le système

$$(26)\qquad \begin{cases} \beta_0=\lambda_0, \\ \beta_1=\lambda_0\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda_1, \\ \beta_1=\lambda_0\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}+\lambda_1\dfrac{W(\alpha_0,\alpha_2)}{W(\alpha_0,\alpha_1)}+\lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

qui détermine successivement $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$; le problème est donc résolu.

99. — Les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ du développement (25) se présentent comme les analogues des fonctions interpolaires qu'on tire de la formule d'interpolation de NEWTON et qu'ont étudiées GERGONNE, CAUCHY, JACOBI, GENOCCHI, PEANO, etc.. Ils sont liés par une relation récurrente analogue et qu'on obtient aisément. Échangeons en effet dans la formule (25) α_0 et α_1, puis posons $\varphi=\alpha_1$; il vient

$$\beta_1=\lambda_0(\beta_0)\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\lambda_1(\beta_0,\beta_1), \quad \beta_1=\lambda_0(\beta_1),$$

d'où

$$\lambda_1(\beta_0,\beta_1)=\frac{\lambda_0(\beta_1)\,\alpha_0-\lambda_0(\beta_0)\,\alpha_1}{\alpha_0};$$

de même, en faisant dans (25) $\varphi=\alpha_2$, puis en échangeant dans la même formule α_1 et α_2 et en posant encore $\varphi=\alpha_2$, on obtient

$$\beta_2=\lambda_0(\beta_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_0}+\lambda_1(\beta_0,\beta_1)\frac{W(\alpha_0,\alpha_2)}{W(\alpha_0,\alpha_1)}+\lambda_2(\beta_0,\beta_1,\beta_2),$$

$$\beta_2=\lambda_0(\beta_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_0}+\lambda_1(\beta_0,\beta_2),$$

d'où

$$\lambda_2(\beta_0,\beta_1,\beta_2)=\frac{\lambda_1(\beta_0,\beta_2)\,W(\alpha_0,\alpha_1)-\lambda_1(\beta_0,\beta_1)\,W(\alpha_0,\alpha_2)}{W(\alpha_0,\alpha_1)},$$

et de même en général :

$$(27) \qquad \lambda_i(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_i) =$$

$$= \frac{\lambda_{i-1}(\beta_0,...,\beta_{i-2},\beta_i)\, W(\alpha_0,...,\alpha_{i-2},\alpha_{i-1}) - \lambda_{i-1}(\beta_0,...,\beta_{i-2},\beta_{i-1})\, W(\alpha_0,...,\alpha_{i-2},\alpha_i)}{W\ \alpha_0, ..., \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1})}.$$

100. — La formule (25) offre sur la formule (22) l'avantage de s'étendre aisément au cas de $n = \infty$, du moins formellement. Une opération telle que $A(\alpha_i) = \beta_i$ pour $i = 0, 1, 2, ...$ est donnée formellement par le développement

$$(28) \qquad A(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \frac{W(\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha)}$$

dont les coefficients λ_i se déterminent successivement soit par le système (36), soit par la formule récurrente (27).

101. — Nous laisserons pour le moment de côté les conditions de validité du développement (28) dans le cas général, pour examiner le cas particulier où l'on a $\alpha_n = x^n$; dans ce cas, les fonctions β_n sont celles que nous avons indiquées par ξ_n aux § 50 et suivants. Dans ce cas, les déterminants wronskiens se calculent immédiatement, et l'on a

$$W(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \varphi) = 0!\,1!\,2!\,...\,(i-1)!\, D^i\varphi,$$

$$W(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_i) \qquad = 0!\,1!\,2!\,...\,i!,$$

de sorte que le développement (28) se réduit à

$$(29) \qquad A(\varphi) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda_i}{i!} D^i\varphi$$

et l'on retombe sur une série (1). Le système (26) permet de déterminer les coefficients λ_i ; on a en effet

$$(30) \qquad \xi_i = \lambda_i + i\,\lambda_{i-1}\,x + \binom{i}{2}\lambda_{i-2}\,x^2 + ... + \lambda_0\,x^i,$$

d'où l'on tire pour λ_i l'expression (1)

$$(31) \qquad \lambda_i = \xi_i - i\,\xi_{i-1}\,x + \binom{i}{2}\xi_{i-2}\,x^2 - \dots + (-1)^i\,\xi_0\,x^i .$$

102. — Quant à la validité de la formule (29), on voit sans peine que si les fonctions données ξ_n appartiennent à un même cercle (r), il en est de même des coefficients λ_i de la série, en sorte que l'on peut appliquer le théorème des §§ **72-73**. Car si les fonctions $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots$ sont des séries de puissances convergentes dans un cercle de centre $x = 0$ et de rayon supérieur à r, il en est de même, par la formule (31), des fonctions $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots$.

103. — Remarquons encore que l'on peut ramener au cas particulier où les fonctions α_i sont les puissances α_i de la variable, le problème général énoncé au § **96**. En effet, si A et B sont deux opérations définies par

$$A(x^n) = \alpha_n, \quad B(x^n) = \beta_n,$$

l'opération $C = BA^{-1}$ donnera évidemment

$$C(\alpha_n) = \beta_n .$$

104. — Un cas particulier remarquable du problème d'interpolation fonctionnelle est celui où il s'agit de trouver une opération A telle que $A(\alpha_n)$ donne $c_n\alpha_n$. Dans ce cas, l'opération A admet, quel que soit n, la variété $V(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme variété invariante et $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont les racines, en général différentes, de l'équation fondamentale, comme on l'a vu au Chap. I. Ce problème se ramène à la recherche d'opérations que j'indiquerai par J, définies par

$$J(x^n) = c_n\,x^n ;$$

en effet, si T est l'opération telle que $T(x^n)$ donne α_n, on voit que $A = TJT^{-1}$.

Les opérations J jouissent de propriétés remarquables. Elles forment un groupe, qui est permutable ; toute combinaison rationnelle des opérations de ce groupe appartient au même groupe ; la derivée fonctionnelle d'une opération J appartient aussi au même groupe,

(1) Cfr. Chap. II, formules (10) et (11).

car on a

$$J'(\varphi) = (c_{n+1} - c_n)\, x^n, \tag{32}$$

d'où il serait facile de tirer des conséquences intéressantes. Parmi les opérations J, il y en a de remarquables, entre autres la transformation de LAPLACE, mais nous n'insisterons pas ici sur ce sujet.

CHAPITRE IV.

Applications.

I. — Sur les dérivées à indices quelconques.

105. — Nous avons défini, aux §§ 52 et 53, l'opérations D^s pour le cas où s est un nombre entier positif ou négatif; nous nous proposons maintenant de chercher ce que l'on doit entendre par D^s lorsque s est un nombre quelconque. A cet effet, remarquons que dans le cas de s entier, la dérivée fonctionnelle de D^s est sD^{s-1}; en indiquant par l'accent la dérivation fonctionnelle, on a donc

$$(D^s)' = s\, D^{s-1},$$

d'où

$$D\,(D^s)' = s\, D^s;$$

de sorte que l'opération D^s vérifie l'équation symbolique

$$D\,X' = s\,X. \tag{1}$$

Il sera donc naturel de chercher l'opération D^s, même lorsque s n'est plus un nombre entier, parmi les solutions de cette équation.

106. Si X_1 est une solution de l'équation (1), toute autre solution est de la forme $X = X_1 M$, où M est une opération de multiplication (§ 51). En effet, posons $X = X_1 H$ et substituons dans (1), il viendra

$$DX_1'H + DX_1H' = sX_1H,$$

et puisque X_1 vérifie l'équation (1), on aura $DX_1H' = 0$, d'où $H' = 0$, et par suite H est une opération de multiplication [§ 60, a)]. Réciproquement, quelle que soit la multiplication M, $X_1 M$ vérifie l'équation (1) en même temps que X_1. Pour fixer ce qu'on doit entendre par dérivée d'indice s, il faudra donc fixer, dans la solution de (1), cette multiplication.

107. — Intégrons maintenant l'équation (1) par la méthode des coefficients indéterminés : en posant

$$X = \sum_0^\infty \alpha_n D^n$$

et en substituant dans (1), on obtient facilement (§ 77) pour les coefficients α_n les équations

$$(n - s)\, \alpha_n + (n + 1)\, \alpha'_{n+1} = 0 \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$\alpha_n = \binom{s}{n} D^{-n} \alpha_0 ,$$

où il n'est pas nécéssaire de fixer maintenant la détermination de D^{-n}. On obtient donc

$$X = \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^{-n} \alpha_0 .\, D^n , \tag{3}$$

et en fixant α_0 et en désignant par X_1 la détermination ainsi donnée par la formule (3), la solution générale de l'équation (1) sera $X(\varphi) = X_1(\mu \varphi)$, où μ est une fonction arbitraire.

108. — Pour déterminer X_1, donnons à α_0 la détermination e^x, et fixons la détermination de $D^n \alpha_0$ en prenant aussi $D^{-n} \alpha_0 = e^x$: on a ainsi la solution particulière de l'équation (1) :

$$X_1(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n \varphi ,$$

et par conséquent la solution générale sera

$$X(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n (\mu \varphi) . \tag{4}$$

Il faut voir maintenant comment on doit choisir la fonction arbitraire μ pour que $X(\varphi)$ puisse être naturellement regardée comme la dérivée d'indice s de φ ; à cet effet, convenons avec LIOUVILLE que la dérivée d'indice s de e^{ax} soit $a^s e^{ax}$; il suffira de prendre $\mu = e^{-x}$ pour que la formule (4) donne effectivement l'opération D^s. Nous obtenons ainsi

$$D^s\varphi = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n(e^{-x}\varphi). \tag{5}$$

109. — Telle est la définition de la dérivée d'ordre s : on peut cependant modifier aisément cette formule en substituant au développement en séries de puissances de D un développement en série de puissances de formes différentielles linéaires de premier ordre, comme on l'a vu au § 78, et en variant ainsi le champ de validité de la formule. En particulier, si l'on pose

$$E(\varphi) = D\varphi - \varphi,$$

on aura

$$D^n(e^{-x}\varphi) = e^{-x}E^n\varphi,$$

et le développement (5) devient

$$D^s\varphi = \sum_0^\infty \binom{s}{n} E^n\varphi. \tag{6}$$

Sous cette forme, il est facile de justifier la définition de D^s en montrant que $D^s D^{s'} = D^{s+s'}$; en effet, la série (6) est une série de puissances de E à coefficients constants : or, à de telles séries on peut appliquer les règles ordinaires de la multiplication, et l'on a, par le même calcul qui sert pour la série binomiale ordinaire,

$$\sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n} E^n \sum_{n'=0}^\infty \binom{s'}{n'} E^{n'} = \sum_{n=0}^\infty \binom{s+s'}{n} E^n.$$

La série (6) est valable dans un domaine de la fonction e^x (§ 78) et l'on remarquera qu'a ce développement dans le domaine de e^x correspond, dans la théorie des fonctions, le développement de x^s dans le domaine de $x = 1$.

II. — Sur les équations différentielles linéaires non homogènes.

110. — Au § 54 nous avons déja défini les formes différentielles linéaires, d'ordre m,

$$F = \sum_{i=0}^\infty \pi_{m-i} D^i, \tag{7}$$

et nous savons que ces formes jouissent de propriétés tout-à-fait semblables à celles des fonctions entières rationnelles. En particulier la dérivation fonctionnelle s'exécute sur elles par la même règle que la dérivation ordinaire sur les fonctions entières [§ 60, c)]; le théorème fonctionnel de TAYLOR donne

$$(8) \qquad F(\varphi\,\psi) = \varphi\,F(\psi) + D\,\varphi\,.\,F'(\psi) + \frac{D^2\,\varphi}{1.2}\,F''(\psi) + \ldots + \frac{D^m\,\varphi}{m!}\,F^{(m)}(\psi),$$

où $F^{(m)}(\psi)$ n'est autre chose que $m!\,\pi_0\,\psi$; on a pour ces formes une règle d'interpolation analogue à celle des fonctions entières (§ 97), enfin on sait décomposer l'opération F en facteurs du premier ordre au moyen des racines de l'opération F, c'est-à-dire des intégrales de l'équation différentielle d'ordre m, $F = 0$. Remarquons que la décomposition en facteurs de F est representée par la formule

$$(9) \qquad F = M_m\,D\,M_m^{-1}\,M_{m-1}\,D\,M_{m-1}^{-1}\,M_{m-2}\ldots M_1\,D\,M_1^{-1},$$

où $M_1, M_2, \ldots, M_m$ son des opérations de multiplication.

111. — Résoudre l'équation différentielle linéaire non homogène, par rapport a la fonction inconnue ψ,

$$(10) \qquad F(\psi) = \varphi,$$

revient à exécuter sur φ l'opération F^{-1}. On pourra donc dire que l'équation (10) est résolue pour toute fonction φ d'un certain domaine fonctionnel, si l'on arrive à construire, au moyen d'opérations connues, une expression de F^{-1} qui soit valable dans ce domaine. Bien entendu, d'une détermination de F^{-1} on déduit toutes les autres en y ajoutant une racine quelconque de F.

Or on a deux formules qui donnent une expression de F^{-1}; l'une, qu'on tire immédiatement de (9),

$$(11) \qquad F^{-1} = M_1\,D^{-1}\,M_1^{-1}\,M_2\,D^{-1}\,M_2^{-1}\ldots M_m\,D^{-1}\,M_m^{-1};$$

l'autre, qu'on obtient par la méthode de la variation des constantes arbitraires de LAGRANGE,

$$(12) \qquad F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \int_{x_0}^{x} \mu_i\,\varphi\,\mathrm{d}x,$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ est un système fondamental d'intégrales de $F = 0$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ est le système des multiplicateurs correspondants. Mais ces formules présentent l'une et l'autre un inconvénient : c'est d'exiger la connaissance des racines de F. Nous allons montrer qu'il est possible de donner pour F^{-1} une autre expression, sous forme d'une série de puissances de D^{-1} et dont les coefficients s'expriment rationnellement au moyen des coefficients π_i de la forme F : en entendant par là que chaque coefficient de la série peut se déduire des coefficients π_i au moyen d'opérations rationnelles et de dérivation, exclusivement.

112. — Pour obtenir cette expression de F^{-1}, nous allons faire usage de la méthode des coefficients indéterminés (§ 95). Posons

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n D^{-n} \varphi \, ; \tag{13}$$

si ce développement est valable dans un certain champ fonctionnel, on pourra lui appliquer l'operation F terme à terme ; on aura ainsi

$$FF^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} F(\lambda_n D^{-n} \varphi)$$

et, en appliquant la formule (8),

$$FF^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F(\lambda_n) D^{-n}\varphi + F'(\lambda_n) D^{-n+1}\varphi + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_n) D^{-n+m}\varphi \right\},$$

enfin, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de D,

$$FF^{-1} = \sum_{n=-m}^{\infty} \left\{ F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \frac{1}{1.2} F''(\lambda_{n+2}) + \dots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_{n+m}) \right\} D^{-n}.$$

Mais ce résultat doit être équivalent à φ ; il faudra donc, d'après le § 94, que les coefficients des mêmes puissances de D soient les mêmes dans les deux membres, et l'on a ainsi, en notant que $F^{(r)}(\lambda_s)$ est nul si l'indice s est négatif,

$$\frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_0) = 0 \, , \quad \frac{1}{(m-1)!} F^{(m-1)}(\lambda_0) + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_1) = 0, \dots,$$

$$F'(\lambda_0) + \frac{1}{1 \cdot 2} F''(\lambda_1) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_{m-1}) = 0 \, ,$$

d'où l'on tire

$$\lambda_0 = 0\,, \quad \lambda_1 = 0, \;\ldots, \;\lambda_{m-1} = 0\,;$$

puis

$$\frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_m) = 1\,, \quad \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(\lambda_m) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_{m+1}) = 0, \;\ldots,$$

et en général

$$(14) \quad F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \frac{1}{1\cdot 2}F''(\lambda_{n+2}) + \ldots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_{n+m}) = 0\,.$$

On voit donc que les m premiers coefficients du développement (13) sont nuls, que le $m^{\text{ème}}$ est $1/\pi_0$, et que les autres s'obtiennent successivement par la formule (14), qu'on peut encore écrire

$$(14') \quad \lambda_{n+m} = -\frac{1}{\pi_0}\left\{F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(\lambda_{n+m-1})\right\},$$

au moyen d'opérations rationnelles et de dérivation. Remarquons l'analogie entre la formule (14) et l'échelle de relation des coefficients d'une série récurrente.

113. — Occupons nous à présent de la validité du développement

$$(13') \quad F^{-1}(\varphi) = -\frac{1}{\pi_0}D^{-m} + \lambda_{m+1}D^{-(m+1)} + \lambda_{m+2}D^{-(m+2)} + \ldots$$

que nous venons d'obtenir. Nous voulons démontrer que si l'on suppose que les fonctions $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_m$ et $1/\pi_0$ appartiennent à un même cercle (r), le développement précédent satisfait aux conditions de validité des séries (19) du § 91, c'est-à-dire qu'il est valable dans l'espace fonctionnel pour des valeurs de x dont le module est assez petit.

A cet effet, remarquons que $\lambda_m = 1/\pi_0$, $\lambda_{m+1}, \ldots$ et toutes les fonctions λ_{m+n} déterminées par (14') appartiendront au même cercle (r); il en sera de même des fonctions $\overline{\lambda}_{m+n}$ que l'on obtient de λ_{m+n} en y remplaçant chaque coefficient par son module. Indiquons maintenant par Φ ce que devient $(1/\pi_0)\,F$ lorsqu'on remplace, dans chacune des séries π_1/π_0, π_2/π_0, ..., π_m/π_0, chaque coefficient par son module, et par $\Phi', \Phi'', \ldots$ les dérivées fonctionnelles de Φ; puis posons $|x| \leq u < r$, et nous aurons immédiatement, par la formule (14'),

$$\overline{\lambda}_{m+n}(u) \leq \Phi(\overline{\lambda}_n(u)) + \Phi'(\overline{\lambda}_{n+1}(u)) + \dots + \frac{1}{(m+1)!}\Phi^{(m-1)}(\overline{\lambda}_{n+m-1}(u)) .$$

Or, soit g_n la valeur absolue maxima de $\overline{\lambda}_m, \overline{\lambda}_{m+1}, \dots, \overline{\lambda}_{m+n-1}$ dans (r) ; on aura, par un théorème connu,

$$\overline{\lambda}_{n+s}(u) < g_n \frac{r}{r-u}, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

et par suite

$$\overline{\lambda}_{m+n}(u) < g_n \left\{ \Phi\left(\frac{r}{r-u}\right) + \Phi'\left(\frac{r}{r-u}\right) + \dots + \frac{1}{(m-1)!}\Phi^{(m-1)}\left(\frac{r}{r-u}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m!}\Phi^{(m)}\left(\frac{r}{r-u}\right)\right\} .$$

Mais on tire immédiatement de la formule (8) :

$$F(\varphi) + F'(\varphi) + \frac{1}{1 \cdot 2}F''(\varphi) + \dots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\varphi) = e^{-x}F(\varphi\, e^x);$$

par conséquent on a

$$\overline{\lambda}_{m+n}(u) < g_n e^{-u}\Phi\left(\frac{r\, e^u}{r-u}\right) .$$

Ici, le second membre a une valeur déterminée : en indiquant par h le plus grand des deux nombres 1 et $e^{-u}\Phi\left(\frac{r\, e^u}{r-u}\right)$, nous aurons donc

$$\overline{\lambda}_{m+n}(u) < g_n h$$

et puisqu'il est clair que pour $|x| \leq u$, $\lambda_{m+n}(x)$ est, en module, au plus égal à $\overline{\lambda}_{m+n}(u)$, nous aurons

$$|\lambda_{m+n}(x)| < g_n h, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Par le même raisonnement, nous trouverons

$$|\lambda_{m+n+1}(x)| < g_n h^2, \qquad |\lambda_{m+n+2}(x)| < g_n h^3, \quad \dots,$$

conditions qui sont comprises dans celles du § 91 : d'où l'on conclut la validité du développement (13) pour tout l'ensemble fonctionnel, avec toutes les conséquences qu'on en tire par les §§ **91** et **92**.

114. — La formule (13′) nous donne une série qu'on peut, autant qu'elle est valable, ordonner suivant la puissances de x; or le terme de degré minimum en x est du degré m: cela revient à dire que la formule trouvée nous donne cette détermination de l'intégrale de (10) qu'on appelle intégrale principale.

Si dans la formule de LAGRANGE (12) on fait $x_0 = 0$, on sait que l'on a aussi l'intégrale principale: cette formule coïncide alors avec

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{-1}(\mu_i \varphi),$$

où D^{-1} est déterminé comme on l'a établi au § **53**; et en appliquant la formule (17) du Chap. III, il vient

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{n-1} \mu_i \cdot D^n \varphi. \tag{15}$$

Mais ce développement ne peut différer de (13), et d'après le § **95** il faudra donc que les coefficients des mêmes puissances de D soient égaux: on aura ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \omega_i D^s \mu_i = 0, \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-2), \\ &\sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{m-1} \mu_i = \frac{(-1)^{m-1}}{\pi_0}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

qui sont les formules connues qui déterminent les multiplicateurs, et en général

$$\lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{n-1} \mu_i, \qquad (n = m, m+1, m+2, \ldots) \text{ (1)}. \tag{17}$$

Bologne, février 1897.

---

(1) Aux travaux indiqués dans l'Introduction, il faut ajouter un Mémoire de M. BOURLET qui traite précisément des opérations distributives, et qui a paru, pendant l'impression du présent travail, dans les Annales de l'École Normale Supérieure, avril-mai 1897.