

# SALVATORE PINCHERLE

---

SALVATORE PINCHERLE

## Appunti di Calcolo funzionale distributivo

*Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti Classe di Scienze Matematiche e Naturali*, Serie 2, Vol. **30** (1897), p. 1031–1039

*in*: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 388–396

<[http://www.bdim.eu/item?id=GM\\_Pincherle\\_CW\\_1\\_388](http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_388)>

# Appunti di Calcolo funzionale distributivo.

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere,  
Rendiconti Classe di Scienze Matematiche e Naturali (Milano);  
(2) 30, 1031-1039 (1897).

1. — Un'operazione funzionale distributiva <sup>(1)</sup> si può definire in due modi: o mediante le funzioni che essa fa corrispondere alle potenze intere positive e nulla della variabile  $x$ , o mediante il suo sviluppo, sempre possibile, secondo le potenze intere positive del simbolo di derivazione  $D$ . Indicando con  $A$  l'operazione distributiva, con  $\varphi$  la funzione arbitraria cui essa si applica, la  $A$  può pertanto venire definita sia da

$$(1) \quad A(x^n) = \xi_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sia da

$$(2) \quad A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} D^n \varphi,$$

dove  $\xi_n(x)$  ed  $\alpha_n(x)$  sono funzioni <sup>(2)</sup> note, legate fra loro dalle relazioni <sup>(3)</sup>

$$(3) \quad \xi_n = x^n \alpha_0 + n x^{n-1} \alpha_1 + \binom{n}{2} x^{n-2} \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

---

<sup>(1)</sup> Vedansi varie mie Note nei Rendiconti della R. Accad. dei Lincei del 1895-1897. Cfr. BOURLET, *Sur les opérations en général etc.*, Ann. de l'Éc. Norm. Sup., S. III, T. IV, avril-mai 1897.

<sup>(2)</sup> Nel senso di serie di potenze di  $x$ .

<sup>(3)</sup> Vedasi la Nota *Sulle operazioni funzionali distributive*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, 17 febbraio 1875; formule (4) e (5).

dalle quali si deduce

$$(4) \quad \alpha_n = \xi_n - n x \xi_{n-1} + \binom{n}{2} x^2 \xi_{n-2} - \dots + (-1)^n x^n \xi_0.$$

2. — I principali problemi ai quali dà luogo lo studio dell'operazione  $A$  sono i tre seguenti:

- a) ricerca delle radici di  $A$ ;
- b) ricerca delle funzioni invarianti di  $A$  <sup>(1)</sup>;
- c) ricerca dell'operazione inversa di  $A$ .

Considerando, come abbiamo accennato altra volta <sup>(2)</sup>, un'operazione distributiva  $A$  come un'omografia dello spazio funzionale (spazio lineare ad infinite dimensioni), il problema a) equivale alla ricerca della *specie di degenerescenza* della omografia rappresentata da  $A$ , e della varietà singolare in questa degenerescenza; il problema b) consiste invece nella ricerca degli *elementi uniti* nella omografia stessa. Una funzione invariante di  $A$ , sia  $\omega$ , essendo definita da

$$(5) \quad A(\omega) = \frac{1}{z} \omega,$$

si vede che il problema a) non è che un caso di b), e precisamente il caso in cui  $z = \infty$ .

3. — Occupiamoci del problema b). Le funzioni  $\xi_n$  siano date da

$$(6) \quad \xi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n,\nu} x^\nu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

L'operazione  $A$  è dunque definita dallo specchio dei coefficienti  $a_{n,\nu}$ . Se  $\omega = \sum g_n x^n$  è una funzione invariante, essa dovrà soddisfare all'equazione (5) e, sviluppando il primo membro facendo uso della (6), si trova che le  $g_n$  devono verificare il sistema di infinite equazioni lineari omogenee ad infinite incognite:

$$(7) \quad \begin{cases} a_{0,n} g_0 + a_{1,n} g_1 + \dots + a_{(n-1),n} g_{n-1} + (a_{n,n} - 1/z) g_n + \\ + a_{(n+1),n} g_{n+1} + \dots = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Vedasi *Sulle operazioni distributive commutabili con un'operazione data*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 23 giugno 1895.

<sup>(2)</sup> Vedasi *Cenno sulla Geometria dello spazio funzionale*, Rend. della R. Accad. di Bologna, 14 febbraio 1897.

4. — Facciamo dapprima l'ipotesi che la serie doppia  $\sum_{n,v} a_{n,v}$  sia assolutamente convergente. In tal caso, per proposizioni note<sup>(1)</sup>, si sa che il sistema (7) ammette un determinante d'ordine infinito *convergente*; esso può scriversi

$$\partial(z) = \begin{vmatrix} a_{00}z - 1 & a_{10}z & a_{20}z & \dots \\ a_{01}z & a_{11}z - 1 & a_{21}z & \dots \\ a_{02}z & a_{12}z & a_{22}z - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Ora è dimostrato<sup>(2)</sup> che la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa trovare un sistema di valori  $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$  soddisfacenti alle equazioni (7) e non oltrepassanti in valore assoluto un numero assegnato, è che il determinante infinito  $\partial(z)$  sia nullo. Siamo così condotti a porre l'equazione

$$(8) \quad \partial(z) = 0,$$

e per ogni radice di questa equazione avremo una soluzione del sistema (7), cioè una funzione invariante di  $A$ .

5. — È facile provare che, sotto l'ipotesi della convergenza assoluta della serie  $\sum_{n,v} a_{n,v}$ , il determinante  $\partial(z)$  rappresenta una funzione trascendente intera di  $z$ . Basta, all'uopo, osservare che in forza di quella ipotesi il prodotto infinito

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + c \sum_{v=0}^{\infty} |a_{n,v}| \right\},$$

in cui  $c$  indica un numero positivo qualsivoglia, è convergente: onde essendo  $P_n$  il prodotto dei primi  $n$  fattori di  $P$  ed  $\varepsilon$  un numero positivo arbitrario, si potrà determinare un numero intero positivo  $m$  tale che, per  $n > m$  e per ogni valore di  $r$ , sia

$$P_{n+r} - P_n < \varepsilon.$$

(1) POINCARÉ, *Bulletin de la Soc. Math. de France*, T. XIV, p. 77; H. VON KOCH, *Acta Mathem.*, T. XVI, p. 217.

(2) H. VON KOCH, loc. cit., p. 249.

Ma sia  $\partial_n(z)$  il determinante formato dalle  $n+1$  prime linee e colonne di  $\partial(z)$ ; si ha manifestamente, per  $|z| \leq c$ ,

$$|\partial_{n+r}(z) - \partial_n(z)| < P_{n+r} - P_n < \varepsilon,$$

onde la serie

$$\partial_1(z) + [\partial_2(z) - \partial_1(z)] + [\partial_3(z) - \partial_2(z)] + \dots,$$

che rappresenta  $\partial(z)$ , è convergente in ugual grado per i valori indicati di  $z$ , e poichè  $c$  è arbitrario,  $\partial(z)$  è una funzione intera (1).

6. — Si può ora togliere la restrizione della convergenza assoluta della serie  $\sum a_{n,v}$ . Supponiamo che esistano due sistemi di numeri positivi  $p_n, q_v$  tali che  $\sum_{n,v} |a_{n,v}| p_n q_v$  sia convergente: il che accade, per es., se la serie  $\sum_{n,v} a_{n,v} x^n y^v$  non è costantemente divergente. Indichiamo allora con  $B, B_1$  le operazioni definite da

$$B(x^n) = q_n x^n, \quad B_1(x^n) = p_n x^n,$$

e si avrà che l'operazione  $BAB_1 = A'$  è definita dal sistema doppiamente infinito di coefficienti  $a'_{n,v} = a_{n,v} p_n q_v$ . Si torna quindi al caso precedente.

7. — L'equazione (8), che corrisponde all'equazione fondamentale delle omografie ordinarie, darebbe luogo ad una discussione analoga (su cui sorvoliamo per ora), a seconda dell'ordine di molteplicità delle radici della funzione intera  $\partial(z)$  e della caratteristica del determinante per queste radici multiple. Il caso normale è che le funzioni invarianti — od elementi uniti — formino una successione discreta; nei casi più generali esse possono formare varietà lineari, d'ordine finito ed infinito. Ma, mentre nello studio delle omografie degli spazi ad un numero finito di dimensioni la discussione dell'equazione fondamentale esaurisce l'argomento, non è così nelle operazioni distributive che operano su uno spazio ad un numero infinito di dimensioni, quale lo spazio funzionale. Invero, qui si presentano fatti che non hanno riscontro nella teoria ordinaria, come quello di elementi uniti formanti una varietà continua non lineare.

(1) Cfr. von KOCH, loc. cit., p. 238.

Si è già mostrato <sup>(1)</sup> come una simile varietà si possa costruire e se ne sono dati degli esempi: ciò mostra come il sistema (7) si possa soddisfare indipendentemente dal valore  $z$ ; indicheremo più avanti (§ 9) una classe estesa di operazioni per le quali ciò accade.

8. — Una classe oltremodo semplice di operazioni funzionali distributive è costituita da quelle che ammettono come funzioni invarianti le stesse potenze intere positive della variabile. Le diremo operazioni normali e le indicheremo colla lettera  $N$ : talchè una  $N$  è definita da

$$N(x^n) = a_n x^n;$$

una operazione  $N$  differisce da un'altra per la successione dei coefficienti  $a_n$ . Accenniamo rapidamente ad alcune delle loro proprietà.

a) Le operazioni  $N$  non hanno radici, e quindi non sono degeneri, a meno che non siano nulli alcuni dei coefficienti  $a_n$ .

b) Esse hanno per sole funzioni invarianti le  $x^n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), se tutti i coefficienti  $a_n$  sono differenti; varietà lineari della forma  $c_1 x^{n_1} + c_2 x^{n_2} + \dots$ , se i coefficienti  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$  sono eguali fra loro.

c) Lo sviluppo (2), per un'operazione  $N$ , è della forma

$$(9) \quad N(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n x^n}{n!} D^n \varphi,$$

dove è

$$b_n = a_n - n a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} - \dots + (-1)^n a_0.$$

d) Reciprocamente, ogni sviluppo della forma (9) rappresenta un'operazione  $N$ .

e) Le operazioni  $N$  formano un gruppo permutabile.

f) L'operazione inversa di un  $N$  in cui tutti i coefficienti  $a_n$  sono differenti da zero è un'operazione della stessa specie, definita immediatamente da  $N^{-1}(x^n) = x^n/a_n$ .

g) Infine, per le operazioni  $N$  si risolve facilmente una questione importante, che ci contentiamo qui di indicare e su cui ci proponiamo di tornare più diffusamente: ed è l'estensione dello spazio funzionale mediante l'*aggiunzione*, alle serie di potenze, di altre funzioni e l'applicazione, allo spazio così esteso, di un'opera-

<sup>(1)</sup> Vedasi la mia Nota: *Cenno sulla geometria dello spazio funzionale*, § 10.

[(E.) Questa Nota è il lavoro N. 13 del presente Volume (p. 368).]

zione distributiva originariamente definita per il solo spazio primitivo. Assumendo — conformemente al principio del minimo arbitrio — la serie (9) come definizione dell'operazione  $N$  allo spazio così esteso, si vede che la funzione di due variabili  $x^t$  è — salvo la questione di convergenza — funzione invariante di  $N$  per ogni valore di  $t$ , e quindi dal sistema discreto di elementi uniti siamo passati ad una varietà continua non lineare (curva dello spazio funzionale) di simili elementi.

9. — Un'altra classe notevole di operazioni distributive ci è data da quelle in cui, nel quadro di coefficienti  $a_{n,v}$ , sono nulli tutti i coefficienti da una parte di una parallela alla diagonale principale. Vi ha luogo a distinguere due tipi, a seconda che sono nulli tutti i coefficienti a sinistra di una parallela a sinistra della diagonale, oppure tutti quelli a destra di una parallela a destra della diagonale stessa. Anche di queste operazioni non daremo ora la teoria completa, limitandoci ad un cenno delle loro proprietà più notevoli. Per semplicità, studieremo le operazioni  $A$  del primo tipo e  $B$  del secondo, di cui scriviamo qui sotto lo schema dei coefficienti:

*Quadro dei coefficienti di un'operazione A  
o del primo tipo :*

|          |          |          |          |          |     |
|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $a_{00}$ | $a_{01}$ | $a_{02}$ | $a_{03}$ | $a_{04}$ | ... |
| $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | ... |
| 0        | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | ... |
| 0        | 0        | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | ... |
| 0        | 0        | 0        | $a_{43}$ | $a_{44}$ | ... |
| .        | .        | .        | .        | .        | .   |

*Quadro dei coefficienti di un'operazione B  
o del secondo tipo :*

|          |          |          |          |   |   |     |
|----------|----------|----------|----------|---|---|-----|
| $a_{00}$ | $a_{01}$ | 0        | 0        | 0 | 0 | ... |
| $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | 0        | 0 | 0 | ... |
| $a_{20}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | 0 | 0 | ... |
| .        | .        | .        | .        | . | . | .   |

a) Cercando le funzioni invarianti dell'operazione  $A$ , siamo condotti a considerare il sistema (7), il quale prende ora la forma

$$\begin{cases} a_{00} (g_2 - 1/z) + a_{10} g_1 = 0, \\ a_{01} g_0 + a_{11} (g_1 - 1/z) + a_{21} g_2 = 0, \\ a_{02} g_0 + a_{12} g_1 + a_{22} (g_2 - 1/z) + a_{32} g_3 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

che permette, preso  $g_0$  ad arbitrio, di determinare di mano in mano  $g_1, g_2, g_3, \dots$ . Esiste dunque una funzione invariante qualunque sia il valore di  $z$ ; in particolare si ha una radice di  $B$  per  $z = \infty$ : colle funzioni  $A(x^n) = \xi_n$  si può quindi ottenere uno sviluppo dello zero. Vi è dunque un sistema continuo (curva funzionale) di elementi uniti, la cui esistenza formale è accertata, e di cui la esistenza effettiva dipende da sole condizioni di convergenza, vale a dire di disequaglianza.

b) Invece per l'operazione  $B$ , il sistema delle equazioni (7) non si lascia risolvere formalmente senza una condizione per  $z$ , e quindi non vi sono radici senza una relazione fra i coefficienti. Si può quindi dire che, in generale, le operazioni del secondo tipo hanno un sistema discreto di elementi uniti. Ma questo tipo dà luogo ad un'osservazione nuova ed interessante. Indichiamo con  $\varphi = \sum g_n x^n$  una funzione qualunque, con  $\psi = \sum h_n x^n$  la sua trasformata mediante l'operazione  $B$ :

$$B(\varphi) = B(\sum g_n x^n) = \sum h_n x^n ;$$

e si avrà

$$h_n = a_{(n-1),n} g_{n-1} + a_{n,n} g_n + a_{(n+1),n} g_{n+1} + \dots$$

Determiniamo ora, il che è possibile in generale, un sistema di numeri  $p_0, p_1, p_2, \dots$  che verifichi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{00} p_0 + a_{01} p_1 = 0, \\ a_{10} p_0 + a_{11} p_1 + a_{12} p_2 = 0, \\ a_{20} p_0 + a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3 = 0, \\ \dots \end{cases}$$

è manifesto che, ammessa la convergenza assoluta degli sviluppi, su cui non è ora il luogo di entrare in particolari, i coefficienti

$h_n$  della funzione  $\psi = B(\varphi)$  soddisferanno, qualunque sia la  $\varphi$ , alla relazione

$$(10) \quad h_0 p_0 + h_1 p_1 + \dots + h_n p_n + \dots = 0.$$

c) Non è necessario aggiungere che si possono considerare quadri di coefficienti  $a_{n,v}$  appartenenti contemporaneamente al primo ed al secondo tipo, dando luogo ad operazioni che ammettono ad un tempo i due ordini di proprietà.

10. — Ponendo mente alla relazione (10) alla quale soddisfano i coefficienti di tutte le funzioni  $\psi$ , ottenute applicando l'operazione  $B$  agli elementi  $\varphi$  dello spazio funzionale, si è condotti ad introdurre un concetto di cui è manifesta l'importanza. Data una funzione

$$\varphi = \sum g_n x_n,$$

si possono, in infiniti modi, ottenere delle successioni di numeri  $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ , che diremo *successioni* od *enti*  $p$ , in modo che sia soddisfatta la relazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n g_n = 0,$$

il primo membro essendo supposto assolutamente convergente. Un ente  $p$  soddisfacente alla relazione precedente si dirà *appartenere* a  $\varphi$ , e  $\varphi$  si dirà pure appartenere a  $p$ , di modo che ad ogni  $\varphi$  appartengono infiniti enti  $p$  e viceversa. Ad esempio, tutte le funzioni che sono nulle per  $x = a$  appartengono all'ente  $p$  definito dalla successione  $1, a, a^2, \dots$ ; tutti i polinomi razionali interi di grado non maggiore di  $m$  appartengono alla varietà (lineare ad  $m$  dimensioni) degli enti  $p$  per i quali  $p_0 = p_1 = \dots = p_m = 0$ ; ecc. . L'insieme degli enti  $p$  costituisce uno spazio ad infinite dimensioni, che si può dire *correlativo* dello spazio funzionale.

L'insieme delle funzioni appartenenti simultaneamente ad  $r$  enti  $p$  viene a costituire uno spazio ad infinite dimensioni contenuto nello spazio funzionale e che si può rappresentare con  $s^{(r)}$ . Per le funzioni appartenenti ad  $s^{(r)}$  si può dimostrare una proprietà notevole: esse sono tutte esprimibili linearmente mediante le funzioni di un sistema

$$(a_{n,0} + a_{n,1} x + \dots + a_{n,r} x^r) x^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ogni operazione distributiva  $A$ , che dà una trasformazione omografica dello spazio funzionale, dà in pari tempo una trasformazione dello spazio correlativo; e queste trasformazioni sono fra loro in quello stesso legame di controgradienza che si presenta, nelle stesse circostanze, per gli spazi lineari ad un numero finito di dimensioni.

La grande varietà di casi che si manifesta nello studio dei problemi relativi alle operazioni distributive ed alle loro inverse, in particolare nelle questioni di sviluppabilità di funzioni date in serie procedenti secondo le funzioni di un determinato sistema, si spiega ponendo mente alla varietà degli spazi, anche lineari, che si possono immaginare contenuti nello spazio funzionale: spazi che possono essere ad un numero finito ed anche, come gli  $s^{(r)}$  di cui si è parlato ora, ad un numero infinito di dimensioni. Ciò che importa di mettere in rilievo, si è che la proiettività degenerare  $A$  di specie  $h$  in uno spazio di enti  $\varphi$  ad un numero finito  $m$  di dimensioni dà luogo ad una varietà lineare ad  $h - 1$  dimensioni di enti  $\alpha$  tali che  $A(\alpha) = 0$ , mentre contemporaneamente tutti gli enti  $A(\varphi)$  sono in uno spazio lineare ad  $m - h$  dimensioni; invece negli spazi ad un numero infinito di dimensioni, quale lo spazio funzionale, queste proprietà non si accompagnano necessariamente: ad esempio, nelle operazioni  $A$  del primo tipo, studiato al § 9, si mantiene la prima proprietà, cioè vi sono radici di  $A$ , ma non in generale la seconda, cioè le  $A(\varphi)$  non appartengono necessariamente ad un  $s^{(r)}$ ; mentre nell'operazione  $B$  del secondo tipo è conservata la seconda proprietà, ma in generale non si verifica la prima.