Ugo Amaldi

Della Vita e delle Opere di SALVATORE PINCHERLE.

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 3–16

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_3>

Commemorazione di UGO AMALDI, letta davanti alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Accademia Nazionale dei Lincei, nell'adunanza del 5 dicembre 1937.

Della Vita e delle Opere di

SALVATORE PINCHERLE. (*)

SALVATORE PINCHERLE si è spento in Bologna la sera del 10 luglio 1936. Corrispondente Linceo dal 1887, Socio Nazionale dal 1901, era oramai il decano dei matematici italiani e, fra le nuove generazioni, recava ancora l'eco diretta degli elevati insegnamenti dei grandi promotori della rinascita matematica in Italia.

Nato l'11 marzo 1853 a Trieste, era stato portato nella prima infanzia a Marsiglia, dove il padre, per sottrarsi alle crescenti vessazioni poliziesche, cui nella città nativa lo esponevano i suoi sentimenti d'italianità, apertamente manifestati e difesi, si era indotto a cercare un nuovo centro ai suoi commerci; ed ivi il PINCHERLE trascorse la fanciullezza e l'adolescenza, in un ambiente famigliare modesto e raccolto, dove l'intimità degli affetti era rinsaldata dalla tristezza dell'esilio e dall'appassionata attesa degli eventi storici, che in quegli anni, fra il '59 e il '70, preparavano l'unificazione della Patria. Compiuti i primi studi sotto la guida della madre, donna di alto sentire e di fine cultura, s'iscrisse a quel Liceo Imperiale, e, mentre dapprincipio pareva inclinare verso le discipline umanistiche, acquistò, verso la fine delle Classi speciali, la consapevolezza della Sua vocazione per le scienze esatte. Scelta la via, fu senza incertezze deciso in famiglia ch'Egli dovesse continuare gli studi presso un'Università italiana; e, sul finire del '69, appena sedicenne, lasciò la casa paterna per raggiungere Pisa, dove per concorso si aggiudicò un posto di alunno interno in quella Scuola Normale Superiore.

Vi dominava l'alta figura del BETTI, che, in quegli anni, tornando dalla Fisica matematica all'Analisi, poneva le basi della Topo-

(*) Commemorazione di UGO AMALDI, letta davanti alla Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della Accademia Nazionale dei Lincei, nell'adunanza del 5 dicembre 1937.

logia generale, mentre, accanto a lui, il DINI, conchiuso ancor giovanissimo il primo ciclo della sua attività nel campo della Geometria differenziale, si era volto con fervore alla elaborazione dei suoi *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale* e a quel nuovo indirizzo ispirava il suo geniale insegnamento. Le elevate suggestioni di quei Maestri insigni trovarono immediata rispondenza nella mente aperta e versatile, nell'entusiasmo speculativo del PINCHERLE, che, compiuto brillantemente il Suo quadriennio di studi, conseguì nel 1874 la Laurea in Scienze fisico–matematiche e l'Abilitazione all'insegnamento con le due successive parti di una dissertazione teorico-sperimentale sulle superficie di capillarità e le relative costanti caratteristiche.

Gli si apriva così, larga di promesse, la via alla carriera scientifica; ma per proseguirla tranquillamente avrebbe dovuto ricorrere ancora agli aiuti paterni, e, posto dinnanzi al dilemma di chiedere nuovi sacrifici ai Suoi Cari o d'imporre a se stesso la via più dura, prescelse decisamente di entrare nell'insegnamento secondario.

Per Sua ventura fu destinato a Pavia, dove la Facoltà di Scienze doveva l'anno seguente accogliere nel suo seno il BELTRAMI e già contava fra i suoi Maestri il CASORATI, che al pari del BETTI, era conoscitore profondo e divulgatore geniale delle concezioni del RIEMANN e, d'altra parte, per una certa propensione a problemi di natura operatoria, direttamente rispondenti alla mentalità del PINCHERLE, era destinato ad esercitare su di Lui un fascino particolare. Così, in quella sede tranquilla, il PINCHERLE trovava nuovi sussidi culturali, nuove suggestioni al Suo orientamento scientifico; e, nella freschezza delle Sue energie giovanili, apprendeva ad imporsi quella severa disciplina di lavoro, che poi costantemente osservò nella Sua lunga vita e che allora Gli consentì di non deviare dalla ricerca, pur tra le cure dell'insegnamento liceale, cui dedicava quell'indefesso fervore, che sempre Egli recò nella Scuola.

Decisivo fu per Lui l'anno accademico 1877-78, che, grazie ad una borsa di perfezionamento, potè passare a Berlino. Al Suo appassionato interesse culturale quel grande centro scientifico offriva le più larghe soddisfazioni; ma Egli si concentrò soprattutto nel seguire le lezioni del WEIERSTRASS, alle quali gli studi precedenti Lo avevano particolarmente preparato; e, tornato a Pavia, vi tenne, per invito dei professori di quell'Università, un corso, in cui, per la prima volta in Italia, venivano sistematicamente esposti i principi dell'Analisi secondo il WEIERSTRASS, fino all'applicazione della teoria generale delle funzioni analitiche alle funzioni ellittiche. Quel corso, da Lui riassunto in un *Saggio*, pubblicato nel *Giornale* del BATTAGLINI, ebbe larga risonanza e richiamò vivamente l'attenzione dei matematici italiani sulla forte tempra del giovane autore, che, conseguita per concorso nella primavera del 1880 la cattedra di Algebra complementare e Geometria analitica nell'Università di Palermo, era, nel successivo autunno, chiamato, per lo stesso insegnamento, a quella di Bologna.

Ancora era viva in quelle aule l'eco della parola incitatrice del CREMONA; e il PINCHERLE, formatosi nelle elevate tradizioni delle Scuole di Pisa e di Pavia, accolse come una missione, cui poi sempre tenne fede, il proposito di restituire anche la Scuola matematica di Bologna all'antico prestigio. Gli erano compagni in quel fervore di entusiasmo giovanile due Suoi condiscepoli di Pisa, pur essi giunti allora alla cattedra in quello stesso Ateneo, C. ARZELÀ e L. DONATI; e i tre giovani, associando i loro sforzi, ottennero anche a Bologna quel completamento dell'ordine degli studi per la Laurea in Matematica, che già era stato promosso, ma non raggiunto, dal CREMONA, dal CHELINI, dal BELTRAMI.

Così nel 1882 il PINCHERLE assumeva per incarico quell'insegnamento di secondo biennio, che poi conservò ininterrottamente per quarantasette anni. Sorretto da una cultura eccezionale, che mai cessò di approfondire e di estendere, anche fuori del Suo campo preferito di lavoro ed oltre i confini stessi della Matematica, variava di anno in anno l'argomento delle Sue lezioni, pur mirando sempre allo scopo d'illustrare la teoria generale delle funzioni analitiche nel suo sviluppo storico, nei suoi diversi orientamenti, nei suoi rapporti con gli altri rami dell'Analisi. Alle trattazioni strettamente monografiche preferì generalmente lo sviluppo a grandi linee di intere dottrine, spesso di due teorie che a vicenda s'illuminassero; e, pronto com'era a cogliere ogni nuovo atteggiamento di pensiero, recava nella Scuola i più recenti apporti di metodi e di risultati, dopo averli sottoposti ad una profonda rielaborazione personale. Le lezioni così accuratamente preparate esponeva con impeccabile nobiltà di forma e vi trasfondeva un fervore di entusiasmo, un calore di emozione estetica, che risultavano tanto più comunicativi quanto più erano contenuti e quasi dissimulati.

Altrettanto meditati e suggestivi erano i Suoi corsi di primo biennio, che Egli, costantemente dominato dalla preoccupazione delle contrastanti esigenze degli allievi ingegneri e degli aspiranti alle Lauree scientifiche, non si stancò mai di rimaneggiare e perfezionare sia nell'assetto generale, che in ogni più minuta particolarità di sviluppo; e la Sua raffinata perizia didattica resta documentata dalla serie di trattati, in cui via via riassunse le linee fondamentali del Suo insegnamento di ogni grado, dalle Matematiche elementari alla Teoria delle funzioni analitiche, dalle lezioni di Algebra complementare a quelle di Calcolo, che, già preparate di lunga mano, pubblicò quando, scomparso prematuramente, nel 1912, l'ARZELÀ, ne assunse la cattedra di Analisi infinitesimale.

Col volgere degli anni, il crescente prestigio personale e la rinomanza scientifica via via più larga Lo designavano a sempre nuovi e più gravi doveri di uffici accademici; ma trovava tempo a tutto e mai negò di assecondare fattivamente qualsiasi iniziativa diretta al vantaggio della Scienza o della Scuola. Dal 1918 in poi partecipò con assidua cura alla direzione degli « Annali di Matematica »; nel 1922 promosse la costituzione dell'*Unione Matematica Italiana*, di cui tenne per un decennio la presidenza e sempre diresse il « Bollettino »; nel 1928, su mandato conferitogli a Toronto dai Delegati dei Comitati aderenti all'Unione Matematica Internazionale, organizzò e presiedette il Congresso di Bologna.

E, intanto, Gli erano venuti, dall'Italia e dall'estero, molteplici onori accademici; e, come già nel 1889 l'Accademia dei Lincei Lo aveva designato a dividere con L. BIANCHI il Premio Reale, che, per la prima volta, si assegnava a matematici; così, al Suo collocamento a riposo il Comune di Bologna Gli conferiva il Premio « SACCHETTI », destinato ad onorare i Maestri più insigni e più benemeriti di quello Studio glorioso.

Ma a chi ebbe la ventura di conoscerNe a fondo l'animo e le intime aspirazioni, tutto ciò non appare che estrinseco episodio in una vita, che, fuori di ogni preoccupazione di personale interesse, fu tutta raccolta e tesa in un perenne sforzo di elevazione intellettuale, in una completa dedizione alla ricerca scientifica.

Come generalmente accade, anche il PINCHERLE, nei primi passi della Sua attività scientifica, aveva traversato un periodo d'incerto orientamento, e, pur essendosi decisamente volto dalla Fisica, cui s'era dapprincipio indirizzato, all'Analisi pura, aveva cercato la Sua via in direzioni svariate: superficie ad area minima ed equazioni algebrico-differenziali; relazioni fra coefficienti e radici di una trascendente intera, riprese più tardi dal MAILLET; funzioni monodrome dotate di un teorema di moltiplicazione bilineare e funzioni a moltiplicatori, quali punto di partenza per una teoria delle funzioni ellittiche, che per quella stessa via fu, molti anni dopo, sviluppata dal RAUSENBERGER.

Ma la Sua personalità matematica si delineò precisa dopo il viaggio a Berlino. Del WEIERSTRASS Egli amò sempre considerarsi discepolo; e in verità ne risentì fortemente l'influsso; tuttavia gli impulsi, che ne aveva tratto, si erano in Lui composti con quelli, che, a Pisa e a Pavia, aveva ricevuto dal BETTI e dal CASORATI in senso prevalentemente riemanniano; mentre già la Sua prima formazione culturale Lo aveva naturalmente condotto, fin dall'inizio dei Suoi studi matematici, a famigliarizzarsi con gli indirizzi della Scuola francese. Di qui il largo eclettismo di metodi e di vedute, che Egli sempre recò nella teoria delle funzioni di variabile complessa e che, in particolare, si rispecchia nel tipo dei problemi, da Lui affrontati nel dodicennio dall'82 al '94, in cui il Suo pensiero matematico, traverso una progressiva evoluzione doveva raggiungere la sua piena maturità.

Era apparsa nell'80 la classica Memoria del WEIERSTRASS *Zur Funktionenlehre,* che col celebre teorema sulle serie uniformemente convergenti di funzioni analitiche aveva aperto la via a superare il tecnicismo delle serie di potenze; e il PINCHERLE, intuendo acutamente i nessi profondi, che intercedono fra il problema, così sollevato, dello sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le funzioni di un sistema prestabilito e il problema dell'inversione degli integrali definiti nel campo complesso, concepì un vasto programma di ricerche, dirette a indagare sistematicamente i rapporti fra le singolarità di una funzione e quelle degli elementi funzionali di riferimento adottati per una sua rappresentazione analitica sia mediante lo sviluppo in serie di funzioni prefissate, sia mediante un integrale curvilineo. E si può notare come nella natura stessa di tali questioni Egli trovasse un incentivo ad applicare considerazioni di quel tipo operatorio, verso cui doveva in seguito orientarsi sempre più decisamente.

Degli sviluppi in serie, sotto ipotesi svariate circa il sistema base, si occupò in tutta una ricca serie di lavori, che per lo stesso tipo dei problemi e dei risultati, sfuggono alla possibilità di un rapido riassunto; ma già in quelle ricerche giovanili colpisce l'ingegnosa novità di taluni concetti e di taluni spedienti, che assai più tardi dovevano entrare nell'uso corrente: tali la nozione di successione di funzioni equilimitate, l'intervento di relazioni nettamente pertinenti alla teoria dei determinanti infiniti, in quel tempo nemmeno abbozzata, l'esplicito enunciato e l'applicazione, nel caso delle regioni piane, di quel *teorema di copertura,* che un ventennio dopo fu ritrovato e messo in valore dal BOREL.

Seguono in quello stesso periodo di tempo — e più precisamente dall'85 in poi — le ricerche sull'inversione degli integrali definiti nel campo complesso. Secondo la nomenclatura odierna, i problemi da Lui affrontati per primi in questo campo si riconnettono alla risoluzione di notevoli classi di equazioni integrali di prima specie; ma in ogni singolo caso Egli fissa più particolarmente la Sua attenzione sull'operazione funzionale, rappresentata dall'integrale a primo membro, e ne indaga le proprietà analitiche sia in rapporto al nucleo — o, com'Egli allora diceva, alla *funzione caratteristica* —, sia in relazione al campo funzionale, cui l'operazione s'intende applicata. Ed anche qui taluni Suoi risultati precorsero i tempi: cercando le operazioni integrali, la cui inversa ammette una analoga rappresentazione analitica, fu condotto a quei nuclei, che conservano la derivazione, e che più tardi, nel campo reale, si ripresentarono nella teoria della composizione del VOLTERRA, il quale, com'è ben noto, li chiamò *del ciclo chiuso*.

Ma sull'ulteriore sviluppo del pensiero del PINCHERLE un più decisivo influsso ebbero gli studi da Lui compiuti sulle proprietà intrinseche e sulle applicazioni di talune fra le più importanti operazioni funzionali classiche, in ispecie sulla trasformazione di LAPLACE–ABEL. Egli per primo riconobbe come questa trasformazione, indipendentemente da ogni sua espressione analitica, si possa univocamente definire per mezzo di certe due proprietà operatorie — relative al suo comportamento di fronte alla derivazione e alla moltiplicazione per la variabile indipendente — e mise in luce come l'espressione, che per tale operazione va adottata, dipenda caso per caso dalla natura analitica della classe funzionale, in cui essa è destinata ad operare. Così svincolata da contingenti particolarità di forma, la trasformazione acquista una maggiore agilità algoritmica e una più larga possibilità di applicazioni, che il PINCHERLE illustrò in direzioni svariate; e fra i molti e notevoli risultati così conseguiti va ricordata una inattesa e riposta dualità fra le due generalizzazioni dell'equazione differenziale lineare ipergeometrica, dovute al POCHHAMMER e al GOURSAT, alla quale Egli pervenne, movendo dall'osservazione (da Lui per primo rilevata nella sua forma esplicita e generale) che la trasformazione di LAPLACE–ABEL stabilisce una corrispondenza biunivoca fra le equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali e le analoghe equazioni alle differenze.

Ritrovava così sul Suo cammino il vecchio Calcolo delle differenze, al quale, in quegli stessi anni, era stato ricondotto anche il POINCARÉ nelle sue celebri ricerche sulle equazioni differenziali lineari a integrali irregolari; e il PINCHERLE, riesumando quell'antico ordine di questioni alla luce dei metodi e delle vedute della teoria delle funzioni di variabile complessa, vi conseguì taluni dei Suoi risultati più importanti e più originali.

Tornando dapprima sugli sviluppi in serie secondo le funzioni di un sistema prestabilito, ravvisò nella *ricorrenza lineare,* quale risulta definita fra le funzioni di un tale sistema da un'equazione lineare alle differenze, un presupposto particolarmente atto a consentire, nello studio di quegli sviluppi, conclusioni precise; ed, esaurito rapidamente il caso delle ricorrenze del primo ordine, si trovò, con quelle del secondo, di fronte all'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che indagò in senso inverso a quello prima di Lui considerato, cioè mirando a risalire dalle proprietà analitiche delle ridotte di una frazione continua convergente, data a priori, a quelle della funzione così definita. Ma ben più ardue difficoltà si presentavano nel caso delle ricorrenze d'ordine superiore, dove si trattava di scoprire la via a quella generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue algebriche, che già era stata inutilmente cercata da E. HEINE, sulla traccia del tentativo compiuto in senso strettamente aritmetico dallo stesso JACOBI; e il PINCHERLE risolse la questione in modo definitivo e geniale, introducendo, come analogo del valore della frazione continua, l'integrale da Lui chiamato *distinto,* che è quell'integrale dell'equazione lineare alle differenze, caratteristica della ricorrenza considerata, il cui rapporto ad ogni altro integrale della stessa equazione converge allo zero al tendere all'infinito dell'indice. Non è qui possibile render conto degli importanti sviluppi, che il PINCHERLE dedicò alla determinazione di siffatto integrale e alla sua applicazione al problema della migliore approssimazione di una data funzione per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti polinomiali, di prefissate serie di potenze. Basti ricordare, come una delle più profonde Memorie del PINCHERLE, quella del tomo 16^0 degli *Acta Matematica* sulla generazione di sistemi ricorrenti per mezzo di equazioni differenziali lineari, nella quale estende agli sviluppi di una funzione analitica secondo serie procedenti per gli elementi di un sistema ricorrente le condizioni per la sviluppabilità secondo i denominatori delle ridotte di una frazione continua algebrica e pone in evidenza le proprietà asintotiche dei sistemi ricorrenti costituiti dai coefficienti dello sviluppo del TAYLOR degli integrali delle equazioni differenziali lineari di tipo regolare.

In tutte queste ricerche le equazioni lineari alle differenze, pur considerate nel campo complesso, intervenivano ancora sotto il loro originario aspetto di semplici relazioni di ricorrenza; ma il PINCHERLE, seguendo il naturale orientamento del Suo pensiero, fu condotto a superare quella concezione ristretta del Calcolo delle differenze e a considerarlo un particolare capitolo del Calcolo funzionale nel campo complesso. Come tale lo ricostruì sistematicamente, raccogliendo dapprima le teorie formali in un'*Algebra delle forme lineari alle differenze,* poi volgendosi ai problemi analitici veri e propri, fino ad una prima risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, da Lui conseguita per mezzo di serie operatorie, di accertata convergenza, ordinate secondo le potenze dell'operatore del CASORATI.

Con questo vasto e ben connesso gruppo di ricerche il PINCHERLE contribuì, forse più di ogni altro, a promuovere ed avviare quell'indirizzo, per cui il Calcolo delle differenze, uscendo dal primitivo suo stadio puramente formale ed aritmetico, è oramai entrato in modo organico nel quadro della teoria generale delle funzioni analitiche; e, se a quel nuovo ordine d'indagini più decisivi contributi sono stati in seguito recati da tutta una schiera di altri ricercatori, fra cui primeggia il NÖRLUND, basta scorrere le magistrali *Vorlesungen über Differenzenrechnung* dell'insigne matematico danese per riconoscere come, anche in un assetto definitivo della teoria, le vedute e i risultati del PINCHERLE conservino immutata la loro fondamentale importanza.

Tuttavia, nella progressiva evoluzione del Suo pensiero, le ricerche da Lui compiute sino allora costituirono soprattutto il prodromo ad una più larga visione di problemi e a un più elevato programma di lavoro. Sulla base del ricco materiale di osservazioni, di raffronti, di risultati concreti, raccolto nei precedenti Suoi studi su svariate classi di operazioni funzionali, e traverso una larga indagine storica sui vecchi metodi di Calcolo simbolico, il PINCHERLE concepì, intorno al 1894, il disegno di costruire nel campo complesso una teoria generale delle operazioni funzionali lineari, o, come Egli preferì dire, *distributive,* la quale, conservando l'agilità di quegli antichi metodi formali, conducesse a procedimenti di effettiva validità, controllabile, quanto meno caso per caso, così da costituire un nuovo ramo della teoria delle funzioni analitiche. Fu quello per Lui il periodo di più acceso fervore di ricerca, sicchè già nel 1897 potè presentare nel *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (« Math. Annalen », XLIX) lo schema organico della Sua teoria sintetica delle operazioni funzionali; poi, sperimentato in ripetuti corsi universitari lo sviluppo sistematico delle Sue idee, ne curò una trattazione divulgativa nel volume su *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi,* pubblicato nel 1901.

A fondamento della Sua teoria Egli pose quel concetto di *spazio funzionale,* che, da Lui per primo definito e fecondamente studiato, doveva poi evolversi in forme più larghe o più determinate, fino a costituire oramai una delle nozioni fondamentali e, in un certo senso, caratteristiche dell'Analisi contemporanea. Per il PINCHERLE si trattava di quegli *spazi affini,* o meglio *vettoriali,* ad una infinità numerabile di dimensioni, che costituiscono un'immagine geometrica degli insiemi lineari di funzioni analitiche svilluppabili secondo le funzioni di un prestabilito sistema, quando agli elementi di un tale sistema si attribuisca l'ufficio di vettori fondamentali di una base di riferimento.

Già nel caso di un numero finito di dimensioni sorgono per le operazioni distributive, che trasformano in sè un tale spazio — e che i vettorialisti chiamarono più tardi *omografie vettoriali* —, interessanti problemi di classificazione; e, per quanto, astrazion fatta dalla particolare interpretazione, tutto sostanzialmente si riduca alla classica discussione dell'equazione caratteristica di una sostituzione lineare, la trattazione sintetica datane dal PINCHERLE e, in ispecie, una Sua caratterizzazione operatoria dei divisori elementari presentano, rispetto alle molte trattazioni congeneri, singolari pregi di semplicità e di eleganza.

Negli spazi funzionali ad un'infinità di dimensioni, e, in particolare, in quello delle serie di potenze, cui più spesso si riferiva il PINCHERLE, ogni operazione distributiva assume la forma di un'affinità omogenea su infinite variabili, onde risulta, per l'operazione, una prima rappresentazione analitica per mezzo di una *matrice infinita;* e di questo tipo di rappresentazione (divenuta più tardi famigliare, oltre che ai matematici, ai fisici teorici) Egli si valse a più riprese, soprattutto per caratterizzare e studiare quelle operazioni, da Lui dette *normali,* che generalizzano sotto l'aspetto geometrico le cosiddette deformazioni pure, sotto l'aspetto analitico le forme differenziali lineari della classe del FUCHS, e che, nel gruppo totale delle operazioni distributive, costituiscono un sottogruppo di particolare interesse per le eleganti proprietà, di cui gode, e per le applicazioni, largamente illustrate dal PINCHERLE, di cui è suscettibile. E va rilevato come fin dal 1897 il PINCHERLE, in base a siffatta rappresentazione di un'operazione per mezzo di una matrice infinita, associasse sistematicamente, sotto ipotesi di larga generalità, al fascio dell'operazione e dell'identità quel determinante infinito, che doveva poi assumere un ufficio essenziale nella teoria del FREDHOLM; e, assodatone il carattere di trascendente intera rispetto al parametro del fascio, ne deducesse quegli elementi, che oggi diconsi gli *autovalori* e le *autofunzioni* dell'operazione.

Ma allo sviluppo della teoria occorreva si assegnasse per le operazioni distributive qualche altra rappresentazione più maneggevole; e il PINCHERLE vi pervenne movendo da una geniale osservazione algoritmica. Notò che, se per una qualsiasi operazione distributiva si valuta lo scarto dalla permutabilità rispetto ad un'operazione fissa, si perviene ad una nuova operazione, la cui deduzione da quella di partenza presenta una completa analogia algoritmica con l'ordinaria derivazione delle funzioni. Assumendo, perciò, come *derivata funzionale* di un'operazione il suo scarto dalla permutabilità rispetto alla moltiplicazione per la variabile indipendente, potè stabilire che ogni operazione distributiva, nell'intorno di una generica funzione, è rappresentabile formalmente con una serie di potenze operatorie della derivazione ordinaria, perfettamente analoga alla serie del TAYLOR per le funzioni.

Non sfuggì naturalmente al PINCHERLE che tali serie operatorie, già da Lui prima incontrate nell'inversione delle forme differenziali lineari (o, se si vuole, nell'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee) hanno di regola un campo funzionale di effettiva validità piuttosto ristretto; ma non mancò di mostrare (e di questo essenziale complemento non si è sempre tenuto il debito conto) che, con un ingegnoso trasporto di quegli stessi spedienti, che al WEIERSTRASS e al MITTAG–LEFFLER avevano consentito di assicurare la convergenza degli sviluppi di una funzione analitica in prodotto infinito e in serie di frazioni semplici, è possibile, caso per caso, ampliare quel primitivo campo funzionale di convergenza.

Ad ogni modo a questa rappresentazione di un'operazione con una serie di potenze della derivazione spetta, nella teoria del PINCHERLE, un ufficio in qualche modo sussidiario, giacchè per Lui ogni operazione è un'entità astratta, caratterizzata, indipendentemente da ogni espressione analitica, dalle sue proprietà operatorie intrinseche, che, quanto meno nei casi più noti, si traducono in equazioni simboliche assai semplici; e la *legge di permanenza* di tali proprietà consente, in generale, di *prolungare* l'operazione oltre i limiti del suo primitivo campo funzionale di definizione. Di queste Sue vedute, cui giustamente il PINCHERLE annetteva particolare importanza, diede un'espressiva applicazione, discutendo in modo esauriente il problema della derivazione di indice complesso qualsiasi, su cui già avevano fermato la loro attenzione, fra gli altri, il LIOUVILLE, il RIEMANN, l'HOLMGREN, il BOURLET.

D'altro canto, uno studio approfondito delle analogie, che intercedono fra le affinità vettoriali ordinarie e le operazioni distributive agenti in uno spazio ad infinite dimensioni condusse il PINCHERLE a riconoscere fra i due casi una differenza essenziale, che, rimasta allora pressochè inavvertita, fu nuovamente rilevata per le operazioni integrali da HELLINGER e TOEPLITZ quindici anni più tardi. In uno spazio ad un numero finito di dimensioni ogni operazione distributiva degenere gode insieme delle due proprietà di trasformare l'intero spazio in uno spazio ad un numero minore di dimensioni e di possedere, come il PINCHERLE diceva, qualche vettore *radice,* cioè qualche vettore, cui corrisponde il vettore nullo. Orbene, quando si passa alle operazioni distributive in uno spazio ad infinite dimensioni, queste due proprietà, pur trovandosi talvolta associate, possono anche presentarsi separatamente, talchè si hanno due tipi distinti di degenerazione; ed è manifesto come risulti essenzialmente diverso il problema d'inversione per le operazioni degeneri dell'una o dell'altra specie. Di queste operazioni degeneri il PINCHERLE indagò largamente le proprietà. In particolare, introdotta nello spazio funzionale l'omogeneità e sostituita all'immagine vettoriale quella puntuale, stabilì, pel tramite di convenienti operazioni degeneri, l'esistenza di spazi lineari, pur essi a infinite dimensioni, ma meno comprensivi di quello totale, cui competono tutte le proprietà di incidenza e di appartenenza che caratterizzano gli iperpiani ordinari; e, definite per questi *iperpiani* dello spazio funzionale punteggiato opportune coordinate omogenee, aventi carattere contragrediente rispetto a quelle puntuali, pervenne ad una corrispondenza per *dualità,* che Gli consentì di associare ad ogni operazione un'operazione correlativa, la quale generalizza, con le rispettive proprietà caratteristiche, tanto l'*aggiunta* del LAGRANGE, quanto quell'altra operazione analoga, che, sotto il medesimo nome, lo stesso PINCHERLE aveva introdotto nel Calcolo delle differenze.

Della Geometria dello spazio funzionale considerò anche altri problemi più tardi ripresi, sotto punti di vista diversi, da varî ricercatori (curve e varietà non lineari dello spazio funzionale, loro spazi osculatori dei vari ordini, gruppi continui di operazioni e loro operazioni infinitesime, ecc.); ma non vi si indugiò, giacchè rifuggiva dalle generalizzazioni che potessero apparire scopo a se stesse; e si volse, invece, ad illustrare operosamente le applicazioni, di cui la Sua teoria era suscettibile nel campo delle funzioni analitiche:

operazioni normali, come atte ad aggiungere o togliere ad una funzione singolarità di natura determinata, onde risultarono chiariti nella loro origine profonda i teoremi dell'HADAMARD e del DARBOUX sulle singolarità delle serie di potenze; indagine approfondita delle dipendenze fra le singolarità di una *funzione determinante* e quelle della corrispondente *generatrice;* teoria generale dell'inversione delle operazioni integrali del ciclo chiuso nel campo complesso; classificazione delle equazioni funzionali lineari di seconda specie nei tre grandi tipi del VOLTERRA, del FREDHOLM, dell'HILBERT.

A queste ricerche, direttamente legate al progressivo sviluppo delle Sue idee, altre ne intercalava di carattere collaterale o, in qualche modo, sussidiario. Così, in relazione alla risoluzione analitica delle equazioni lineari alle differenze, riprendeva quelle serie di fattoriali e del NEWTON, che già aveva incontrate in un Suo precedente studio sulla interpolazione nel campo complesso, e ne indagava le proprietà di convergenza, pervenendo per primo alle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè una data funzione ammetta uno sviluppo in serie newtoniana. Inoltre, da una ricerca, per se stessa molto notevole, su taluni nuclei analitici era condotto a svariati problemi d'iterazione, in particolare a quello fondamentale dell'iterazione «in grande» delle funzioni razionali, che doveva poi essere ulteriormente approfondito dal JULIA, dal FATOU, dal RITT.

Nell'ultimo periodo della Sua vita ebbe l'intimo compiacimento di veder confermate l'importanza e la vitalità delle Sue vedute sintetiche sulle operazioni funzionali non soltanto da recenti sviluppi di Analisi, ma più ancora da nuovi e inaspettati nessi coi concetti e i procedimenti algoritmici impostisi ai teorici della nuova Fisica. Con rinnovata fiducia tornò sui principi della Sua teoria e forse vagheggiò l'idea di rielaborarla su basi più larghe, chè ad un tale disegno sembra rispondere l'ultima Sua Memoria, che la morte interruppe e fu pubblicata postuma, quasi auspicio di ulteriori sviluppi per il Suo retaggio d'idee.

Quale posto Egli attribuisse alle Sue ricerche e ai Suoi contributi nel quadro generale degli indirizzi congeneri fu da Lui stesso chiarito nel magistrale articolo sulle equazioni e operazioni funzionali per la grande Enciclopedia delle Scienze matematiche [1]. Ma nella

---

[1] Vedasi specialmente l'edizione francese: *Équations et operations fonctionnelles,* t. III, 5me vol., pp. 1-81, Paris 1912.

rigida Sua obbiettività scientifica, nel Suo scrupoloso senso delle proporzioni finì con l'essere severo con se stesso; e ben più alta e più giusta valutazione dell'opera Sua fu solennemente espressa a Bologna, nel 1928, da J. HADAMARD, che, delineando da par suo in una larga sintesi le origini, gli sviluppi, i futuri presumibili orientamenti del Calcolo funzionale (²), additò nel PINCHERLE uno degli iniziatori ed uno dei cultori più insigni di quel promettente e caratteristico indirizzo della Matematica contemporanea.

A questo giudizio autorevolissimo null'altro andrebbe aggiunto; ma il vecchio discepolo, chiamato all'onore di parlare di Lui in quest'alta sede, non può negare a se stesso di rievocarne qui la luminosa figura morale, quale gli apparve fin dagli anni lontani della giovinezza. Pensoso e parco di parole, pareva che, soprattutto di fronte ai discepoli, amasse nascondere la Sua personalità dietro un fitto velo di geloso riserbo. Ma appunto per questo i giovani, con più intenso sforzo di comprensione e di reverente simpatia, scrutavano oltre quel velo le sue note profondamente umane: il culto tenerissimo degli affetti famigliari, il fervido amor patrio, il multiforme interesse per ogni indirizzo speculativo, la raffinata sensibilità per ogni forma d'Arte, particolarmente per la Musica. Era ambito privilegio di pochissimi l'essere ammessi nell'intimità della Sua casa, dove, in piccola cerchia, recava nella conversazione, con arguzia garbata e senz'ombra di pesantezza, tutte le risorse della Sua vastissima cultura; e talvolta sedeva al pianoforte per interpretarvi, con una Sua caratteristica finezza di passione contenuta, le musiche classiche, che più Gli erano care, e alle quali mai cessò di dedicar quotidianamente qualche ora, nemmeno nei periodi di più intensa attività scientifica, quasi vi cercasse, più che uno svago, una fonte d'ispirazione intellettuale. In ogni circostanza Egli conservava quel Suo contegno di composta superiorità, in cui si rifletteva l'interiore equilibrio, da Lui raggiunto fra le ingenite inclinazioni di un'indole affettiva e sensibilissima e la concezione elevata ed austera che della vita e dei rapporti umani aveva imposto a se stesso. Così alla profonda modestia, che Gli era istintiva, si associava in Lui un alto senso di dignità personale; l'estrema mitezza dell'animo si armonizzava con la sicura fermezza delle convinzioni, con la severità rettilinea dei criteri morali; e chi più Gli era vicino ben sapeva come,

---

(²) *Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel,* Atti del Congresso Intern. dei Matematici, tomo I, pp. 143-161, Bologna 1928.

ad ogni richiamo della coscienza, Egli fosse pronto ad assumere la responsabilità di atteggiamenti o di decisioni, che pur ferivano la Sua sensibilità. Ma non ebbe nemici, nè mai suscitò intorno a sè risentimento o rancore, perchè la rigidezza della Sua dirittura era temperata dalla larga tolleranza di chi dalla stessa saldezza delle proprie convinzioni sa trar motivo a comprendere chiunque batta altre vie con pari purezza di cuore, e da ogni Suo atto traspariva limpidamente, come unica norma, l'ossequio incondizionato al dovere, cui sempre seppe sacrificare per primo se stesso.

Fu soprattutto per sentimento del dovere che, alieno per indole da ogni ufficio di comando e già quasi settantacinquenne, accettò a Toronto l'arduo compito di preparare e presiedere il Congresso di Bologna, col preciso mandato, confermatoGli dal Governo Nazionale, di restaurarvi, per la prima volta dopo la Grande Guerra, la completa internazionalità delle adesioni e degli interventi. Gli animi erano turbati e divisi; e al di là delle Alpi parve dapprima che, sull'una e sull'altra sponda, quel tentativo di riavvicinamento non fosse destinato che ad esasperare le mal sopite passioni, ad approfondire i dissensi tenacemente superstiti. Ma il PINCHERLE, convinto di servire insieme la causa della Scienza e la secolare tradizione di universalità culturale dell'Italia, non si scoraggiò. Ai contrasti e alle amarezze, che non Gli furono risparmiate, oppose la Sua dignitosa serenità; le difficoltà ostinatamente risorgenti dominò e superò con un mirabile sforzo di tatto, di energia, di saggezza; e mai si ebbe, in quest'Europa senza pace, un più largo e più concorde raduno di scienziati di ogni nazione. Fu quello il coronamento ideale della Sua vita; e, assolto il nobile mandato, scese, in silenzioso accoramento, dalla cattedra, che aveva onorato per quasi cinquant'anni.

Giusto compenso alla Sua perenne spiritualità, non conobbe l'angoscioso declinare dell'attività intellettuale; e conservò intatti, nella vegeta vecchiezza, l'interesse per la ricerca, la gioia del lavoro, la fede nella missione progressiva della Scienza. Così, anche nell'ultimo Suo giorno, incurante di qualche oscuro presagio dell'incombente ora suprema, tornò all'usato lavoro, si raccolse ancora una volta a meditare sulla Memoria che doveva lasciare incompiuta, ancora una volta nella serena intimità domestica irradiò fra i Suoi Cari l'inesausta Sua affettività, quando, al calar della notte sulla giornata operosa, quasi d'improvviso il puro e fervido cuore si arrestò.

Ma Egli vive nella Sua opera di Scienziato e di Maestro, vive nella luce della incontaminata Sua nobiltà morale.