Salvatore Pincherle

Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti

Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. **32** (1894), p. 209–291

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 273–357

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_273>

11 [73].

Delle funzioni ipergeometriche, e di varie questioni ad esse attinenti.

Giornale di Matematiche di BATTAGLINI (diretto da A. CAPELLI, Napoli); **32**, 209-291 (1894).

La serie ipergeometrica, studiata dal GAUSS come sintesi delle trascendenti elementari, è stata alla sua volta presa come punto di partenza per la ricerca e la formazione di innumerevoli classi di nuove funzioni. A persuadere dell'importanza della parte che la serie di GAUSS ha avuto nello sviluppo dell'analisi moderna, basta ricordare come dallo studio di essa siano scaturite due delle teorie più notevoli di cui, in questo ultimo trentennio, si sia arricchita la scienza: quella delle equazioni differenziali lineari fondata dal FUCHS in una ormai classica Memoria, ma le cui prime origini si trovano nel celebre lavoro del RIEMANN sulla serie ipergeometrica, e quella delle funzioni automorfe, che deve al POINCARÉ e al KLEIN i suoi risultati, ma il cui metodo sembra contenuto in germe nelle ricerche dello SCHWARZ sui casi in cui l'equazione differenziale ipergeometrica ammette un integrale algebrico. Per il suo interesse storico, per le molte generalizzazioni che, anche in questi ultimi tempi, distinti matematici ne hanno date in diverse direzioni, per le varie ed utili digressioni di cui essa porge l'opportunità, mi è sembrato che *la teoria delle funzioni ipergeometriche* potesse egregiamente fornire il tema di un corso di lezioni destinate a studenti sufficientemente iniziati ai principi della teoria delle funzioni analitiche.

In tale persuasione ho tenuto nella R. Università di Bologna, durante il corrente anno scolastico, una serie di lezioni su tale argomento. Ora nel raccogliere il materiale necessario per quel corso, mi è venuto fatto di notare come varie teorie, presentatesi come distinte generalizzazioni delle funzioni ipergeometriche, potessero invece scaturire da un'unica fonte e come alcune trattazioni, senza appaparente legame fra di loro, presentatesi in tempi diversi e con metodi differenti, fossero suscettibili di essere raggruppate sotto un unico punto di vista col doppio vantaggio della maggiore semplicità e brevità di esposizione e della uniformità di metodo. Questa osservazione mi ha indotto a pensare che potrebbe sembrare non del tutto inutile la pubblicazione di qualche parte di quel corso; e mi vi sono deciso anche per la considerazione che tale pubblicazione mi porge il destro di presentare, sotto forma semplice, le applicazioni di alcuni risultati da me ottenuti in precedenti lavori. Il capitolo VI della presente Memoria contiene infatti la teoria di una operazione o trasformazione assai semplice, da me altra volta incontrata, e nel capitolo stesso, come applicazione di essa operazione, si presentano in modo del tutto ovvio le due distinte generalizzazioni che, partendo da vedute assai diverse, hanno data delle funzioni ipergeometriche il POCHHAMMER ed il GOURSAT. Così pure nel capitolo VII, facendo uso di alcune proposizioni generali sulle equazioni lineari alle differenze, specie del secondo ordine, si dànno fra altri risultati: 1^0) un metodo per calcolare il valore di una frazione continua i cui termini siano funzioni razionali dell'indice e, come caso particolare, la formula nota di GAUSS per lo sviluppo in frazione continua del quoziente di due serie ipergeometriche contigue; 2^0) lo sviluppo di una funzione analitica in serie ordinata secondo i denominatori od i resti delle ridotte di una frazione continua algebrica, in particolare secondo un sistema di funzioni ipergeometriche, ad esempio le funzioni sferiche, con un metodo per determinarne le condizioni di convergenza (del tutto diverso da quello seguito dal THOMÉ nella sua Memoria del T. 66 del Giornale di Crelle) su cui mi permetto di richiamare l'attenzione del lettore, perchè confido che possa essere trovato più semplice ed assai più generale.

Riflettendo che il Periodico in cui mi sono proposto di pubblicare queste pagine è stato destinato dal suo illustre e compianto fondatore ai giovani studenti delle Università italiane, e che l'argomento in esse svolto è di natura tale da poterli interessare particolarmente, mi è sembrato doveroso di presentarle nella forma più accessibile e perciò di richiedere in esse il minimo di cognizioni. Ciò mi ha obbligato a dare posto ad alcune cose note: tali sono infatti quelle del primo capitolo, in cui sono semplicemente riassunte le proprietà più ovvie della serie di GAUSS, del terzo, che contiene gli elementi della teoria delle equazioni differenziali lineari, ed in parte quelle del secondo, in cui è svolta con qualche larghezza la teoria delle equazioni lineari ricorrenti (o alle differenze) in ispecie del secondo ordine, teoria la cui utilità risulta manifesta ad ogni pagina dei capitoli successivi. Potrà forse sembrare dubbia l'opportunità di avere dato posto ad una teoria ormai tanto nota come quella delle equazioni differenziali lineari. Varie ragioni mi hanno deciso a ciò: primo, i continui richiami che vi si debbono fare nel seguito del lavoro; secondo, l'essere tale teoria meno familiare ai nostri studenti di quello che dovrebbe, per la mancanza di un nostro testo che la riassuma in modo semplice e chiaro, e per la difficoltà che molti fra essi trovano nella lettura delle Memorie originali; infine, perchè si è presentata così l'occasione di adattare alla scuola un genialissimo metodo del compianto prof. CASORATI, metodo che consiste nell'applicare all'esposizione della teoria delle equazioni differenziali lineari le nozioni sulle equazioni lineari alle differenze e che offre una semplicità senza pari ed interesse scientifico non meno che didattico.

Sarebbe ventura se il mio tentativo invogliasse altri, dotato di maggiori forze, a compilare un lavoro completo sulla generalizzazione delle funzioni ipergeometriche, in cui trovassero il loro posto, convenientemente fusi e riuniti sotto il punto di vista comune della teoria dei gruppi di sostituzioni, i risultati ottenuti dallo SCHWARZ (1) cercando le soluzioni algebriche dell'equazione differenziale ipergeometrica, dallo HEUN (2) aumentando il numero dei suoi punti singolari, dal PAPPERITZ (3) che reca un contributo allo studio delle funzioni uniformi, automorfe, che hanno origine dall'equazione stessa, dal KLEIN (4) che trova in modo così elegante le radici delle serie ipergeometriche, e da tanti altri (5), tacendo poi della estensione delle funzioni ipergeometriche al campo di più variabili, tentata già con successo dal PICARD (6), dall'APPELL (7) e dallo HORN (8), e che da sola fornirebbe già materia di una apposita monografia.

---

(1) Crelle, T. LXXV, pag. 292.

(2) Math. Annalen, T. 33, pag. 161.

(3) Ibid., T. 34, pag. 247.

(4) Ibid., T. 37, pag. 573.

(5) Mentre la presente Memoria era finita di comporre, ho appreso che il chiarissimo prof. KLEIN ha tenuto nel decorso semestre d'inverno un corso sulle funzioni ipergeometriche, ora pubblicato in litografia. Non ho potuto ancora prendere cognizione di quel corso, ma senza dubbio il *desideratum* qui formulato si troverà da esso appagato.

(6) Annales de l'École Normale Supérieure, 1881.

(7) Journal de Mathématiques, S. III T. 8, pag. 173.

(8) Acta Mathematica, T. XV, pag. 113.

CAPITOLO I.

Riassunto delle principali proprietà della serie ipergeometrica.

1. — Dal nome di *serie geometrica* dato allo sviluppo

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

è venuto quello di *serie ipergeometrica* dato dall'EULER alla serie

$$(1) \qquad \begin{aligned} &1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1) \cdot 1 \cdot 2} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \cdot \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots . \end{aligned}$$

Di questa il GAUSS, in un lavoro rimasto classico [1], ha fatto uno studio approfondito per quanto lo concedevano le nozioni analitiche del suo tempo; egli ha indicata la serie (1) col simbolo

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

chiamando α, β, γ *parametri* ed x *argomento*: notazione e denominazioni che sono state conservate dai suoi continuatori.

La serie (1) racchiude come casi particolari molte delle serie che si presentano negli elementi del calcolo. Notiamo le seguenti:

a) $$F(-m, \beta, \beta, -x) = \sum_0^\infty \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m,$$

cioè la serie binomiale;

b) $$F(1, 1, 2, -x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \log(1+x),$$

onde la serie logaritmica; ecc. .

---

[1] Werke, Bd. III, pag. 123.

Notiamo ancora, più per l'interesse storico che per l'importanza scientifica, che

$$F\left(1\,,\varrho\,,1\,,\frac{x}{\varrho}\right)=\sum_0^\infty\frac{\varrho\,(\varrho+1)\ldots(\varrho+n-1)}{n\,!\,\varrho^n}\,x^n$$

dà, passando al limite per $\varrho=\infty$, la funzione e^x, come dimostra un ragionamento ossai ovvio che si fa scindendo la sommatoria in due parti, di cui la prima contiene un numero di termini fisso al variare di ϱ. In modo analogo si trova pure che

$$F\left(\varrho\,,\varrho'\,,\frac{1}{2}\,,-\frac{x^2}{\varrho\varrho'}\right)$$

si riduce per $\varrho=\infty$, $\varrho'=\infty$ alla serie rappresentante $\cos x$. In ciò che segue non considereremo però valori infiniti dei parametri.

2. — Se nella serie (1) si fa il rapporto fra un termine ed il precedente e si passa al limite per $n=\infty$, si trova subito che il limite di tale rapporto è x: onde si conclude che la serie è convergente assolutamente per $|\,x\,|<1$, divergente per $|\,x\,|>1$. Nel piano della variabile complessa x la serie (1) ha dunque un cerchio di convergenza di centro $x=0$ e di raggio eguale all'unità: entro questo cerchio essa rappresenta quindi una funzione analitica regolare in ogni punto ed ha pertanto tutte quelle proprietà che, dai principii della teoria delle funzioni analitiche, si sanno spettare a tali funzioni nei campi in cui esse si mantengono regolari.

Per $|\,x\,|=1$, il criterio usato lascia in dubbio circa la convergenza o divergenza della serie. È facile però dimostrare che, sotto la condizione che la parte reale di $\alpha+\beta-\gamma$ sia negativa, la serie converge assolutamente anche per $|\,x\,|=1$. Ponendo infatti

$$\alpha=\alpha'+i\,\alpha''\quad,\quad\beta=\beta'+i\,\beta''\quad,\quad\gamma=\gamma'+i\,\gamma''$$

si ottiene senza difficoltà che

$$\left|\frac{(\alpha+n)\,(\beta+n)}{(\gamma+n)\,(n+1)}\right|=1+\frac{\alpha'+\beta'-\gamma'-1}{n}+\left(\text{potenze superiori di }\frac{1}{n}\right).$$

Ricordando ora che la serie a termini positivi Σa_n è convergente se è

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}}\right) > 1,$$

si conclude che, sotto la condizione che sia $\alpha' + \beta' - \gamma'$ negativo, la serie

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1\cdot 2} x^2 + \ldots$$

è convergente assolutamente per $|x| = 1$.

La serie ipergeometrica si riduce ad un polinomio se, e soltanto se, uno dei numeri α, β è intero negativo.

3. — Sia α un numero complesso, ϱ un numero positivo, e $|\alpha| \leq \varrho$; si avrà

$$|\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)| \leq \varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+n-1),$$

onde per i valori di x posti sulla circonferenza di centro $x=0$ e di raggio $\xi < 1$ e per i valori di α interni al cerchio di centro $\alpha = 0$ e di raggio ϱ si avrà

$$|F(\alpha, \beta, \gamma, x)| \leq |F(\varrho, \beta, \gamma, \xi)|.$$

Sia ora M il limite superiore dei valori del secondo membro: per un noto teorema sulle serie di potenze, si ha

$$\left|\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,1\cdot2\cdot3\ldots n}\right| \leq \frac{M}{\xi^n},$$

e ciò basta ad asserire che per i detti valori di α e $\xi' < \xi$, la serie $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi')$ è convergente in ugual grado. Un teorema fondamentale del WEIERSTRASS sulle serie di funzioni razionali (1) permette allora di concludere che la detta serie è funzione analitica uniforme di α, regolare per ogni α finito, cioè che essa è una funzione *trascendente intera* di α. Lo stesso dicasi di F riguardata come funzione di β.

---

(1) Monatsberichte der Akad. der Wissensch. zu Berlin, Agosto 1880.

Consideriamo ora F come funzione di γ. Sia ancora $\gamma = \gamma' + i\gamma''$, e supponiamo $\gamma' + m > 0$, essendo m un numero intero positivo. Si avrà

$$|\gamma + m| \geq \gamma' + m,$$

onde

$$\left| \frac{1}{(\gamma+m)(\gamma+m+1)\ldots(\gamma+n-1)} \right| \leq \frac{1}{(\gamma'+m)(\gamma'+m+1)\ldots(\gamma'+n-1)}.$$

Pertanto la serie F si può scrivere

$$F = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m-1)\,1\cdot 2\cdot 3\ldots m} x^m F_1,$$

dove è, posto $|x| = \xi$, ed essendo γ''' un numero positivo minore di $\gamma' + m$,

$$|F_1| < 1 + \frac{(\alpha+m)(\beta+m)|\xi}{\gamma'''(m+1)} +$$

$$+ \frac{|(\alpha+m)(\alpha+m+1)(\beta+m)(\beta+m+1)|\xi^2}{\gamma'''(\gamma'''+1)(m+1)(m+2)} + \ldots .$$

Detto M il valore di questa serie convergente, si ha $|F_1| < M$, onde per ogni γ tale che sia $\gamma' + m > 0$ la F_1 è convergente in ugual grado e rappresenta quindi una funzione analitica ad un valore e regolare di γ. La parte che precede il termine in F_1 è una funzione razionale di γ, con poli di primo ordine nei punti

$$\gamma = 0, -1, -2, \ldots, -m+1.$$

Da ciò risulta che la F, considerata come funzione di γ, è una funzione *trascendente fratta* avente un polo di primo ordine in ciascun punto $0, -1, -2, \ldots, -m, \ldots$, e, per conseguenza, un unico punto singolare essenziale all'infinito.

Da quanto è dimostrato in questo paragrafo risulta, per i noti principi della teoria delle funzioni analitiche, che la serie F si può differenziare termine a termine rispetto ai parametri α, β, γ.

4. — È facile trovare le varie proprietà funzionali di cui gode la serie F in seguito alla forma speciale dei suoi coefficienti.

a) Derivando la (1) rispetto ad x, ed indicando la derivazione rispetto a questa variabile mediante accenti, si avrà subito

$$F' = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x). \tag{2}$$

b) Si ha

$$x F' = \alpha \left\{ \frac{\beta}{\gamma \cdot 1} x + \frac{(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1} x^2 + \dots \right\},$$

dove la parentesi non è altro che

$$F(\alpha+1, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Ponendo in evidenza il solo parametro di cui si voglia modificare il valore, si esprime $x F'$ mediante la differenza $F(\alpha+1) - F(\alpha)$, e così, per gli altri parametri, colle formule:

$$\begin{aligned} x F' &= \alpha \{F(\alpha+1) - F(\alpha)\}, \\ x F' &= \beta \{F(\beta+1) - F(\beta)\}, \\ x F' &= -\frac{1}{\gamma} \{F(\gamma+1) - F(\gamma)\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Indicando con ΔF la differenza finita $F(\alpha+1) - F(\alpha)$, e con $\Delta^n F$ la differenza n^{sima}

$$F(\alpha+n) - n F(\alpha+n-1) +$$

$$+ \binom{n}{2} F(\alpha+n-2) - \dots + (-1)^n F(\alpha),$$

si ha dalla prima delle (3), derivando ancora rispetto ad x e moltiplicando per x,

$$x^2 F'' = \alpha(\alpha+1) \Delta^2 F,$$

ed in generale

$$x^n F^{(n)} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \Delta^n F, \tag{4}$$

formula che si dimostra senza difficoltà mostrando che, supposta vera per l'indice n, essa sussiste ancora per l'indice $n+1$.

c) Data l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$(5) \qquad (x^2 - x)\,\varphi''(x) + \{(\alpha + \beta + 1)\,x - \gamma\}\,\varphi'(x) + \alpha\,\beta\,\varphi(x) = 0\,,$$

se si tenta di integrarla per serie col metodo dei coefficienti indeterminati, ponendo $\varphi(x) = \Sigma\, k_n\, x^n$, si trova senza difficoltà che

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{(n+\alpha)\,(n+\beta)}{(n+\gamma)\,(n+1)}\,,$$

e perciò, dato al coefficiente arbitrario k_0 il valore $k_0 = 1$, la serie $\varphi(x)$ coincide con $F(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,x)$. Sostituendo in questa identità

$$(x^2 - x)\,F'' + \{(\alpha + \beta + 1)\,x - \gamma\}\,F' + \alpha\,\beta\,F = 0$$

i valori dati dalla (4) per $x\,F'$ ed $x^2\,F''$, si ottiene con una semplice riduzione

$$(6) \qquad (\alpha + 1)\,(x - 1)\,\Delta^2 F + \{(\alpha + \beta + 1)\,x - \gamma\}\,\Delta F + \beta\,x\,F = 0\,;$$

cosicchè la serie ipergeometrica soddisfa ad un'equazione lineare differenziale di secondo ordine rispetto all'argomento, e ad un'equazione lineare alle differenze rispetto a ciascuno dei parametri.

d) All'equazione (6) si può dare un'altra forma sostituendo alla differenza $\Delta\,F$ il suo valore $F(\alpha+1) - F(\alpha)$, e così per la differenza seconda. Si ottiene in tal modo l'equazione lineare

$$(\alpha + 1)\,(x - 1)\,F(\alpha + 2) - \{(\alpha - \beta + 1)\,x - 2\,(\alpha + 1) + \gamma\}\,F(\alpha + 1) -$$
$$- (\alpha - \gamma + 1)\,F(\alpha) = 0\,,$$

e sostituendo ad $\alpha\,,\alpha + n$ e ponendo per brevità F_n per $F(\alpha + n)$, si ottiene l'equazione lineare, che si può dire *ricorrente del secondo ordine*,

$$(7) \qquad (\alpha + n + 1)\,(x - 1)\,F_{n+2} -$$
$$- \{(\alpha - \beta + n + 1)\,x - 2\,(\alpha + n + 1) + \gamma\}\,F_{n+1} - (\alpha + n - \gamma + 1)\,F_n = 0.$$

Per mezzo di questa relazione si può esprimere di mano in mano $F_2\,,F_3\,,\ldots$ per mezzo di F ed F_1 mediante una equazione della forma

$$F_n = P_n F + Q_n F_1 ,$$

essendo P_n e Q_n funzioni razionali di x e di α. Relazioni analoghe valgono per gli altri parametri β e γ. Enuncieremo il fatto espresso dall'equazione (7) dicendo che le F_n costituiscono un sistema ricorrente di funzioni, lineare e del secondo ordine.

e) Il GAUSS ha chiamate contigue (*functiones contiguae*) due funzioni F in cui due dei parametri avendo lo stesso valore, differiscono di un'unità i valori del terzo parametro. Data la $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$, essa ha dunque 6 contigue, e si possono associare due di queste e la primitiva F in 15 modi diversi. Fra queste 15 terne di funzioni passano delle relazioni lineari omogenee a coefficienti di primo grado in x, di cui tre risultano dal comma a) del presente §, e le altre si ottengono facilmente dalle formule (3).

5. — È noto che, col LEGENDRE, si chiama *integrale euleriano di prima specie*, e si indica con $B(p, q)$, l'integrale definito

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du,$$

dove p e q sono sia numeri positivi, sia numeri complessi colla parte reale positiva; è noto pure che si ha la relazione ricorrente rispetto a p:

$$B(p+1) = \frac{p}{p+q} B(p),$$

onde

$$B(p+n, q) = \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{(p+q)(p+q-1)\dots(p+q+n-1)} B(p, q). \tag{a}$$

Da questa si deduce

$$\int_0^1 u^{\beta+n-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du,$$

dove si suppongono positive le parti reali di β e $\gamma - \beta$.

Ciò posto, si prenda lo sviluppo binomiale

$$(1 - u\,x)^{-\alpha} = \Sigma \frac{\alpha\,(\alpha + 1) \ldots (\alpha + n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\, u^n\, x^n\,;$$

questo, se u è reale e compreso fra 0 ed 1, estremi inclusi, mentre è $|x| < 1$, è convergente in ugual grado. Si può dunque moltiplicare per $u^{\beta-1}\,(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\,du$ ed integrare fra 0 ed 1. In tal modo si ottiene, tenendo presente la relazione ora stabilita,

$$\int_0^1 u^{\beta-1}\,(1 - u\,x)^{-\alpha}\,(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\,du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\, x^n \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du,$$

onde

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{B\,(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}\,(1 - u\,x)^{-\alpha}\,(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\,du\,,$$

cioè, astrazione fatta dal fattore esterno, la serie ipergeometrica si può porre sotto forma di un integrale definito contenente sotto il segno la variabile x.

Ricordate così le principali proprietà della classica serie ipergeometrica, si studieranno, nei seguenti Capitoli, le singole teorie alle quali ciascuna di queste proprietà si riconnette, e cominceremo da quella alla quale si riferiscono le equazioni (6) e (7), la teoria cioè delle equazioni lineari ricorrenti.

CAPITOLO II.

Le equazioni lineari alle differenze.

6. — Considereremo in questo Capitolo equazioni *ricorrenti lineari*, cioè relazioni in cui figurano linearmente i valori di una funzione $f(n)$ di n, per i valori $n + 1, n + 2, \ldots$ della variabile. La relazione si dirà *dell'ordine* r se in essa entrano $f(n)$, $f(n + 1), \ldots,$ $f(n + r)$.

La forma di una tale relazione sarà dunque

(1) $\quad f(n + r) + a_{1,n} f(n + r - 1) + a_{2,n} f(n+r-2) + \ldots + a_{r,n} f(n) = b_n\,,$

e si dirà, o no, omogenea, secondo che in essa b_n è zero o differente da zero.

Se Δ è il noto simbolo della differenza finita

$$\Delta f = f(n+1) - f(n),$$

per la nota formula [1]

$$f(n+h) = f(n) + h\,\Delta f(n) + \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f + \dots + \Delta^h f, \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

la (1) si può trasformare nella forma

$$\Delta^r f + a'_{1,n}\,\Delta^{r-1} f + a'_{2,n}\,\Delta^{r-2} f + \dots + a'_{r,n} f = b_n,$$

per questa ragione la (1) verrà anche detta *equazione lineare alle differenze* dell'ordine r.

Nella presente teoria, e finchè non figuri alcuna altra variabile all'infuori di n, si intenderà con *costante* qualunque quantità che non muta al variare di n per numeri interi: in particolare ogni funzione periodica di n col periodo uguale all'unità.

7. — Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente a che, fra r funzioni $f_1, f_2, \dots, f_r$, di n, passi una relazione lineare omogenea, identica, a coefficienti costanti, è che si annulli il determinante* [2]

$$D = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots f_r(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots f_r(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(n+r-1) & f_2(n+r-1) & \dots f_r(n+r-1) \end{vmatrix}.$$

a) La condizione è *necessaria*. Se infatti, $c_1, c_2, \dots, c_r$ essendo costanti, si ha

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_r f_r(n) = 0,$$

scrivendo insieme a questa relazione quelle che se ne deducono mutando n in $n+1, n+2, \dots, n+r-1$, si hanno r equazioni lineari

---

(1) Vedasi p. es.: Cesàro, *Analisi algebrica,* pag. 461.

(2) Casorati, *Il Calcolo delle differenze finite interpretato ecc.,* § 7, Annali di Matematica, S. II, T. X.

omogenee fra le $c_1, c_2, \dots, c_r$, le quali per coesistere richiedono che sia $D = 0$.

b) La condizione è *sufficiente.* Ciò è vero per due funzioni. Infatti se è

$$\begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) \end{vmatrix} = 0,$$

ne risulta

$$\frac{f_2(n+1)}{f_1(n+1)} = \frac{f_2(n)}{f_1(n)},$$

cioè $f_2(n)/f_1(n)$ è una costante nel senso stabilito; si ponga eguale a $-c_1/c_2$, e viene

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = 0.$$

Supponiamo ora la verità della proposizione provata per $r-1$ funzioni, dico che essa risulta vera per r. Infatti, una trasformazione identica assai semplice permette di porre il determinante D nella forma:

$$D = \frac{D_1}{f_1(n+1)\dots f_1(n+r-2)}$$

dove è D_1 il determinante

$$\begin{vmatrix} f_2(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_2(n+1) & \dots f_r(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_r(n+1) \\ f_2(n+1)f_1(n+2) - f_1(n+1)f_2(n+2) & \dots f_r(n+1)f_1(n+2) - f_1(n+1)f_r(n+2) \\ \dots & \dots \\ f_2(n+r-2)f_1(n+r-1) - f_1(n+r-2)f_2(n+r-1) & \dots \\ & \dots f_r(n+r-2)f_1(n+r-1) - f_1(n+r-2)f_r(n+r-1) \end{vmatrix}.$$

Ora qui $f_1(n)$ si suppone non infinita: perciò D_1 dovrà essere identicamente zero. Ma esso è un determinante della stessa forma di D, relativo alle $r-1$ funzioni

$$f_2(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_2(n+1), \dots, f_r(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_r(n+1),$$

perciò passerà fra queste una relazione lineare omogenea, identica:

$$c'_1\{f_2(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_2(n+1)\} + \dots + c'_{r-1}\{f_r(n)f_1(n+1) - f_1(n)f_r(n+1)\} = 0,$$

da cui

$$\begin{vmatrix} f_1(n) & c_1' f_2(n) & + \dots + c_{r-1}' f_r(n) \\ f_1(n+1) & c_1' f_2(n+1) & + \dots + c_{r-1}' f_r(n+1) \end{vmatrix} = 0 ;$$

ma questo essendo un determinante D relativo alle funzioni

$$f_1(n), \quad c_1'(n) f_2(n) + \dots + c_{r-1}' f_r(n) ,$$

ne viene che fra queste, e cioè fra le $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$, passerà una relazione lineare omogenea identica a coefficienti costanti, c.d.d..

8. — Data una equazione della forma (1), ogni sua soluzione si dirà un suo *integrale*. Considerando d'ora innanzi l'equazione omogenea d'ordine r:

$$f(n+r) + a_{1,n} f(n+r-1) + \dots + a_{r,n} f(n) = 0 , \tag{2}$$

in cui ammetteremo che, almeno da un valore di n in avanti, $a_{r,n}$ non sia nullo, è chiaro che se $\varphi(n)$ è un suo integrale, è tale anche $C\varphi(n)$, essendo C una costante. Se $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$ sono due integrali della (2), sarà integrale anche $C_1 \varphi_1(n) + C_2 \varphi_2(n)$, essendo c_1, c_2 pure costanti.

Teorema. *Ogni equazione della forma* (2) *ammette r integrali linearmente indipendenti, cioè fra i quali non passa alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, ogni altro integrale della stessa equazione è legato agli r precedenti da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti.*

Sia z un valore speciale di n [1]: se ad $f(z)$, $f(z+1), \dots$, $f(z+r-1)$ si dànno valori arbitrari, la (2) permetterà di ricavare $f(z+r)$, $f(z+r+1), \dots$, e con ciò si avrà un integrale della (2). Si potranno determinare r simili integrali fra i quali non passerà alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti se i valori arbitrari

$$\begin{matrix} f_1(z) & f_2(z) & \dots f_r(z) \\ f_1(z+1) & f_2(z+1) & \dots f_r(z+1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(z+r-1) & f_2(z+r-1) & \dots f_r(z+r-1) \end{matrix}$$

[1] In questa nostra teoria il valore di z si può senza restrizione supporre intero, ed anche nullo.

verranno scelti in modo che il loro determinante non sia nullo (§ 7). Determinati così gli r integrali $f_1(n)$, $f_2(n), \dots, f_r(n)$ linearmente indipendenti,

$$C_1 f_1(n) + C_2 f_2(n) + \dots + C_r f_r(n)$$

sarà pure manifestamente integrale della (2). Di più, ogni altro integrale $\varphi(n)$ sarà legato linearmente agli r integrali considerati, poichè scrivendo che $f_1(n), \dots, f_r(n)$, $\varphi(n)$ soddisfano alla (2) e fra le equazioni così scritte eliminando 1, $a_{1,n}$, $a_{2,n}, \dots, a_{r,n}$ si ottiene

$$\begin{vmatrix} f_1(n) & f_1(n+1) & \dots & f_1(n+r) \\ f_2(n) & f_2(n+1) & \dots & f_2(n+r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_r(n) & f_r(n+1) & \dots & f_r(n+r) \\ \varphi(n) & \varphi(n+1) & \dots & \varphi(n+r) \end{vmatrix} = 0,$$

da cui risulta effettivamente che fra $\varphi(n)$, $f_1(n), \dots, f_r(n)$ passa una relazione lineare omogenea, identica, c. d. d..

Un sistema di r integrali linearmente indipendenti si dice un *sistema fondamentale* d'integrali dell'equazione (2). Ogni integrale è esprimibile in funzione lineare omogenea di r altri costituenti un sistema fondamentale.

Se $f_1(n)$, $f_2(n), \dots, f_r(n)$ costituiscono un sistema fondamentale, costituiranno un tale sistema anche

$$(3) \qquad c_{h,1} f_1(n) + c_{h,2} f_2(n) + \dots + c_{h,r} f_r(n), \qquad (h = 1, 2, \dots, r),$$

essendo $c_{h,k}$ costanti arbitrarie, purchè il loro determinante sia differente da zero. Si dirà che le (3) operano sul sistema fondamentale primitivo la sostituzione $(c_{h,k})$.

9. — Facendo il valore speciale z di n uguale a zero, è spesso opportuno considerare il sistema fondamentale $f_1(n)$, $f_2(n), \dots, f_r(n)$ tale che

$$\begin{gathered} f_1(0) = 1,\ f_1(1) = 0,\ \dots,\ f_1(r-1) = 0, \\ f_2(0) = 0,\ f_2(1) = 1,\ \dots,\ f_2(r-1) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_r(0) = 0,\ f_r(1) = 0,\ \dots,\ f_r(r-1) = 1. \end{gathered}$$

Un tal sistema verrà detto *principale.* Ogni altro integrale $\varphi(n)$ si potrà manifestamente porre sotto la forma

$$\varphi(n) = \varphi(0) f_1(n) + \varphi(1) f_2(n) + \dots + \varphi(r-1) f_r(n) .$$

Il determinante D formato col sistema principale gode di una proprietà notevole. Si ponga

$$D(n) = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots f_r(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots f_r(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(n+r-1) & f_2(n+r-1) & \dots f_r(n+r-1) \end{vmatrix} ;$$

moltiplicando rispettivamente per $a_{r-1,n}, a_{r-2,n}, \dots, a_{1,n}$ la seconda, terza, ... , ultima linea e sommando colla prima moltiplicata per $a_{r,n}$, viene, in forza dell'equazione (2) stessa,

$$D(n+1) = (-1)^r a_{r,n} R(n) ,$$

onde se $a_{r,n}$ non è zero da $n = 0$ in avanti, e notando che $D(0) = 1$, viene

(4) $$D(n) = (-1)^{nr} a_{r,0} a_{r,1} \dots a_{r,n-1} .$$

10. — È noto, dagli elementi della teoria delle serie di potenze di una variabile, che tali serie possono dare luogo a tre casi: o esse convergono per ogni valore finito della variabile, o convergono per tutti i valori della variabile il cui modulo è inferiore ad un numero positivo determinato, oppure convergono solo per la variabile uguale a zero. Ora ci proponiamo di dimostrare che se una successione di numeri k_n è definita da un'equazione ricorrente della forma (2), i cui coefficienti $a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{r,n}$ si mantengono, per ogni valore di n, inferiori in modulo ad un numero positivo M, la serie di potenze $\Sigma k_n z^n$ non si trova certamente nel terzo caso, cioè essa ammette un cerchio di convergenza di raggio finito od infinito, ma non nullo. Sia infatti

$$k_{n+r} = a_{1,n} k_{n+r-1} + a_{2,n} k_{n+r-2} + \dots + a_{r,n} k_n .$$

Presi ad arbitrio i valori di $k_0, k_1, \dots, k_{r-1}$, si potranno sempre assegnare due numeri positivi A ed R tali che sia

$$|k_0| < A,\ |k_1| < AR^2,\ |k_2| < AR^4, \dots, |k_{r-1}| < AR^{2(r-1)} ;$$

potendosi inoltre prendere R superiore ad M, e superiore all'unica radice positiva dell'equazione

$$x^{2r-1} - x^{2r-2} - x^{2r-4} - \dots - x^2 - 1 = 0 .$$

Si avrà allora

$$|k_r| < AM(1 + R^2 + R^4 + \dots + R^{2r-2}) < AMR^{2r-1} < AR^{2r} ,$$

indi

$$|k_{r+1}| < AM(R^2 + R^4 + \dots + R^{2r}) < AMR^{2r+1} < AR^{2r+2} ,$$

e così, in generale, $|k_n| < A\,R^{2n}$. La serie $\Sigma\, k_n\, z^n$ converge dunque per lo meno entro il cerchio di raggio $1/R^2$, c. d. d..

11. — La proposizione precedente si può generalizzare. Se la successione di numeri k_n è definita da una equazione ricorrente non omogenea

$$k_{n+r} = a_{1,n}\, k_{n+r-1} + a_{2,n}\, k_{n+r-2} + \dots + a_{r,n}\, k_n + b_n ,$$

dove i coefficienti $a_{1,n}\ a_{2,n}, \dots, a_{r,n}$ hanno per ogni valore di n i loro moduli inferiori ad un numero positivo M, e la serie $\Sigma\, b_n\, z^n$ ammette un cerchio di convergenza di raggio non nullo, in guisa che si possono assegnare due numeri positivi B e ϱ tali che

$$|b_n| < B\,\varrho^n .$$

Dico che anche in questo caso la serie di potenze $\Sigma\, k_n\, z^n$ ha un raggio di convergenza certamente non nullo. Si prendano ancora ad arbitrio i valori di $k_0, k_1, \dots, k_{r-1}$, poi si determinino due numeri positivi A ed R tali che sia

$$|k_0| < A, \quad |k_1| < AR^2, \quad |k_2| < AR^4, \ \dots, \ |k_{r-1}| < AR^{2(r-1)} ,$$

prendendo inoltre $MA > B$, $R^2 > \varrho$, infine R superiore ad M e superiore all'unica radice positiva dell'equazione

$$x^{2r-1} - x^{2r-2} - x^{2r-4} - \dots - x^2 - 2 = 0 .$$

Si avrà allora

$$|k_r| < AM(1+R^2+R^4+\dots+R^{2r-2}) + B < AM(2+R^2+R^4+\dots+R^{2r-2}),$$

ed anche, in forza delle ipotesi fatte su R,

$$|k_r| < AMR^{2r-1} < AR^{2r}.$$

Analogamente, si ha

$$|k_{r+1}| < AM(R^2+R^4+\dots+R^{2r})+B\varrho < AMR^2(2+R^2+R^4+\dots+R^{2r-2}),$$

onde

$$k_{r+1} < AMR^{2r+1} < AR^{2(r+1)};$$

e nello stesso modo si dimostra che per ogni valore intero di n si ha $|k_n| < AR^{2n}$: da cui risulta che la serie $\Sigma k_n z^n$ converge per lo meno entro il cerchio di centro $z = 0$ e di raggio $1/R^2$, c. d. d..

12. — Quando sono date r funzioni dell'intero n, indipendenti linearmente fra di loro, $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_r(n)$, è sempre possibile costruire l'equazione alle differenze della forma (2), di cui le funzioni date costituiscono un sistema fondamentale. Infatti, ogni altro integrale $F(n)$ di quella equazione sarà legato da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti con $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_r(n)$; da cui consegue che (§ 7) sarà

$$\begin{vmatrix} F(n) & f_1(n) & f_2(n) & \dots f_r(n) \\ F(n+1) & f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots f_r(n+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F(n+r) & f_1(n+r) & f_2(n+r) & \dots f_r(n+r) \end{vmatrix} = 0,$$

e questa è l'equazione richiesta.

13. — Indicando ancora con $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione (2), ogni altro suo integrale si potrà porre sotto la forma

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + \dots + c_r f_r(n).$$

Ora, come si vedrà in seguito, ha una grande importanza il caso in cui l'equazione ammette un integrale dotato della proprietà che il suo rapporto ad ogni altro integrale della stessa equazione tenda a zero per $n = \infty$. L'integrale avente questa proprietà, se esiste, sarà unico [1] per la stessa sua definizione: esso verrà detto *integrale distinto* [2], e quando l'equazione (2) ammette un tale integrale si dirà che essa definisce un algoritmo *convergente.*

Quando i rapporti $f_1/f_r, f_2/f_r, \dots, f_{r-1}/f_r$ hanno limiti determinati e finiti per $n = \infty$, la ricerca dell'integrale distinto della equazione (2) si può ricondurre ad una ricerca consimile per una equazione della stessa forma, ma di ordine inferiore di un'unità.

Si ponga infatti

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_i(n)}{f_r(n)} = \alpha_i$$

e si considerino le funzioni, di n,

$$f_1(n) - \alpha_1 f_r(n), \quad f_2(n) - \alpha_2 f_r(n), \quad \dots, \quad f_{r-1}(n) - \alpha_{r-1} f_r(n);$$

per quanto è detto al § 12 si può costruire l'equazione alle differenze dell'ordine $r-1$ di cui queste $r-1$ funzioni, manifestamente senza relazione lineare, costituiscono un sistema fondamentale. Se ora questa equazione ammette l'integrale distinto, è chiaro che esso sarà integrale distinto anche per l'equazione primitiva, e reciprocamente.

14. — Consideriamo in particolare l'equazione omogenea della forma (2), in cui i coefficienti sono costanti, e sia

$$f_{n+r} + a_1 f_{n+r-1} + \dots + a_r f_n = 0 . \tag{5}$$

Se α_i è una radice dell'equazione algebrica

$$z^r + a_1 z^{r-1} + a_2 z^{r-2} + \dots + a_r = 0 , \tag{6}$$

è chiaro che α_i^n sarà integrale della (5): se pertanto la (6) ha le sue radici tutte distinte, l'integrale generale della (5) avrà la forma

$$f_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n + \dots + c_r \alpha_r^n .$$

Se fra queste radici ve n'è una α_r, il cui modulo sia minore di quello di ogni altra, α_r^n ci dà l'integrale distinto.

---

(1) Due integrali di un'equazione della forma (2) non si riguardano come differenti se il loro rapporto è una costante.

(2) *Sur la génération des systèmes récurrents etc.,* Acta Mathematica, T. XVI, pag. 341.

Quando la (6) non ha tutte le radici distinte, ma h di esse sono eguali ad α, si scorge senza difficoltà che l'integrale contenente h costanti arbitrarie, corrispondente a queste h radici, è dato da [1]

$$\alpha^n (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \dots + c_h n^{h-1}) .$$

Fra le $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_r^n$, se le radici della (6) sono distinte, non può passare una relazione lineare a coefficienti costanti

$$C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \dots + C_r \alpha_r^n = 0 .$$

Infatti, formando per le $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_r^n$ il determinante D, si ottiene il noto determinante di VANDERMONDE, diverso da zero. Se una delle radici α_1 è multipla dell'ordine h, fra $\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \dots, n^{h-1}\alpha_1^n, \alpha_h^n, \dots, \alpha_r^n$ non può neppure passare una simile relazione, poichè anche qui formando il determinante D, la teoria dei determinanti permette facilmente [1] di dimostrare che il suo valore è diverso da zero. Per darne un esempio, su cui si modellerà facilmente la dimostrazione nel caso generale, sia α_1 una radice doppia, e le altre $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$ siano semplici. Il determinante D è allora

$$\begin{vmatrix} 1 & l & 1 & 1 \\ \alpha_1 & (l+1)\alpha_1 & \alpha_3 & \dots \alpha_r \\ \alpha_1^2 & (l+2)\alpha_1^2 & \alpha_3^2 & \dots \alpha_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{r-1} & (l+r-1)\alpha_1^{r-1} & \alpha_3^{r-1} & \dots \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots 1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_3 & \dots \alpha_r \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \alpha_3^2 & \dots \alpha_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{r-1} & (r-1)\alpha_1^{r-2} & \alpha_3^{r-1} & \dots \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix} .$$

Ora il sistema di r equazioni

$$\begin{cases} \alpha_1^r + a_1 \alpha_1^{r-1} + \dots + a_r = 0 , \\ r\alpha_1^{r-1} + (r-1) a_1 \alpha_1^{r-2} + \dots + a_{r-1} = 0 , \\ \alpha_3^r + a_1 \alpha_3^{r-1} + \dots + a_r = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r^r + a_1 \alpha_r^{r-1} + \dots + a_r = 0 \end{cases}$$

---

[1] CASORATI, loc. cit., § 6. Ivi è usato il metodo della scomposizione della (5) in fattori lineari simbolici, assai ovvio nel caso dei coefficienti costanti. Ma questo metodo si può applicare anche alle equazioni a coefficienti variabili, come ho mostrato nelle due Note « *Sulle equazioni alle differenze,* R. C. della Reale Accademia dei Lincei, 7 gennaio e 4 febbraio 1894 ».

rispetto alle r incognite $a_1, a_3, \dots, a_r$ è determinato e perciò il suo determinante, che coincide con D, è diverso da zero, c. d. d..

CAPITOLO III.

Equazioni lineari alle differenze del secondo ordine.

15. — In questo Capitolo applicheremo le cose dette alle equazioni del secondo ordine, delle quali potremo approfondire maggiormente lo studio. Scriveremo l'equazione ricorrente nella forma

$$f_{n+2} = a_n f_{n+1} + b_n f_n \,, \tag{1}$$

e supporremo che b_n non sia nullo da un n in avanti, e per es. precisamente da $n = 0$. Indichiamo con A_n, B_n il sistema *principale* di integrali di questa equazione, cioè quello per il quale i valori iniziali sono

$$A_0 = 1, \; A_1 = 0, \; B_0 = 0, \; B_1 = 1 \,;$$

ogni altro suo integrale si potrà scrivere (§ 9):

$$f_n = f_0 A_n + f_1 B_n \,. \tag{2}$$

La proprietà trovata al § 9 per il determinante $D(n)$ ci dà, per il caso dell'equazione di secondo ordine,

$$D(n) = A_n B_{n+1} - B_n A_{n+1} = (-1)^n b_0 b_1 \dots b_{n-1} \,,$$

onde

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = (-1)^n \frac{b_0 b_1 \dots b_{n-1}}{B_n B_{n+1}}$$

e da questa

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+r}}{B_{n+r}} = (-1)^n b_0 b_1 \dots b_{n-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{b_n b_{n+1} \dots b_{n+\nu-1}}{B_{n+\nu} B_{n+\nu+1}} \,. \tag{3}$$

È facile ora concludere:

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale distinto della (1), *è che il rapporto* A_n / B_n *ammetta limite per* $n = \infty$.

Se infatti λ è questo limite, si scorge subito che il rapporto di $A_n - \lambda B_n$ ad ogni altro integrale $h A_n + k B_n$ dell'equazione tende a zero per $n = \infty$, e reciprocamente, se esiste l'integrale distinto σ_n, esso si potrà esprimere in funzione di A_n e B_n, secondo la (2),

$$\sigma_n = \sigma_0 A_n + \sigma_1 B_n,$$

indi, dividendo per B_n e passando al limite per $n = \infty$,

$$\lim \frac{\sigma_n}{B_n} = \lim \left(\sigma_0 \frac{A_n}{B_n} + \sigma_1\right) = 0, \quad \text{onde} \quad \lim \frac{A_n}{B_n} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_0}.$$

Ma la condizione d'esistenza del limite per $\frac{A_n}{B_n}$ è che $\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n+r}}{B_{n+r}}$ tenda a zero per $n = \infty$, cioè coincide colla condizione di convergenza della serie

$$(3') \qquad \sigma = \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \frac{b_0 b_1 \dots b_{\nu-2}}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

il cui resto è, dalla (3),

$$\frac{A_n}{B_n} - \sigma = (-1)^n b_0 b_1 \dots b_{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{b_n b_{n+1} \dots b_{n+\nu-1}}{B_{n+\nu} B_{n+\nu+1}},$$

si ha dunque che l'integrale distinto è dato da

$$\sigma_n = -A_n + \sigma B_n.$$

Tutto ciò non è, sotto una nuova forma, che ha sulla usuale il vantaggio di prestarsi alla estensione ad equazioni ricorrenti di ordine qualunque, che la condizione di convergenza della frazione continua

$$\cfrac{b_0}{a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots}}},$$

i numeratori e denominatori delle cui ridotte non differiscono da $A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ e $B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$ rispettivamente. Le ridotte (virtuali) $\frac{A_0}{B_0}$ ed $\frac{A_1}{B_1}$ sono rispettivamente $\frac{1}{0}$ e $\frac{0}{1}$.

La condizione dell'esistenza dell'integrale distinto coincide con quella della *convergenza* della frazione continua. Il valore σ testè considerato coincide col valore della frazione continua e l'integrale distinto σ_n viene dunque ad essere definito dalla condizione iniziale $\sigma_1/\sigma_0 = -\sigma$.

16. — Al POINCARÉ è dovuta una proposizione che è di somma utilità nelle applicazioni della teoria delle equazioni ricorrenti. Dimostreremo quella proposizione per il caso delle equazioni di secondo ordine, rimandando alla Memoria originale [1] per la dimostrazione nel caso delle equazioni d'ordine qualunque.

Teorema di POINCARÉ. *Nell'equazione* (1) *sia* $\lim_{n=\infty} a_n = a$, $\lim_{n=\infty} b_n = b$. *L'equazione*

$$t^2 - a\,t - b = 0\,, \tag{4}$$

che si dirà caratteristica di (1), *abbia le radici* α *e* β *e sia* $|\alpha| > |\beta|$. *Il limite del rapporto* f_{n+1}/f_n *è, per un integrale* f_n *di* (1), *generalmente uguale ad* α *ed eccezionalmente uguale a* β.

a) Si ponga, essendo f_n un integrale di (1),

$$f_n = X_n + Y_n\,, \qquad f_{n+1} = \alpha\,X_n + \beta\,Y_n\,,$$

onde si deduce

$$f_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1}\,, \qquad f_{n+2} = \alpha\,X_{n+1} + \beta\,Y_{n+1}\,.$$

Da queste si ricava, tenuto conto dell'equazione (1),

$$X_{n+1} = \frac{(a_n\,\alpha + b_n - \beta\alpha)\,X_n + (a_n\,\beta + b_n - \beta^2)\,Y_n}{\alpha - \beta}\,,$$

$$Y_{n+1} = \frac{(\alpha^2 - a_n\,\alpha - b_n)\,X_n + (\alpha\beta - a_n\,\beta - b_n)\,Y_n}{\alpha - \beta}$$

e ponendo

$$\frac{\alpha^2 - a_n\,\alpha - b_n}{\alpha - \beta} = A_n\,, \qquad \frac{\beta^2 - a_n\,\beta - b_n}{\alpha - \beta} = B_n\,,$$

---

[1] *Sur les équations linéaires etc.*, American Journal of Mathematics, T. VII, n⁰. 3, 1885.

viene

$$\begin{cases} X_{n+1} = \alpha X_n - (A_n X_n + B_n Y_n), \\ Y_{n+1} = \beta Y_n + (A_n X_n + B_n Y_n), \end{cases}$$

dove le A_n, B_n tendono a zero per $n = \infty$. Posto $G_n = Y_n/X_n$, si ha, dividendo membro a membro le precedenti equazioni,

$$G_{n+1} = G_n \frac{\beta + B_n + A_n/G_n}{\alpha - A_n - B_n G_n}. \tag{5}$$

b) Si può ora determinare un numero positivo λ, che per n crescente tenda a zero e tale che per ogni numero positivo k compreso fra λ ed $1/\lambda$ sia

$$|\beta + B_n + A_n/k| < |\alpha - A_n - B_n k|,$$

da un n in avanti. Infatti la diseguaglianza precedente è certamente soddisfatta se è

$$|\beta| + \varepsilon(1 + 1/k) < |\alpha| - \varepsilon(1 + k),$$

essendo ε un numero positivo superiore ad $|A_n|$, $|B_n|$ e che per n sufficientemente grande si può supporre piccolo a piacere: basta fare

$$k < \frac{|\alpha| - |\beta|}{2\varepsilon} - 1, \qquad \frac{1}{k} < \frac{|\alpha| - |\beta|}{2\varepsilon} - 1,$$

talchè il numero richiesto λ è

$$\lambda = \frac{2\varepsilon}{|\alpha| - |\beta| - 2\varepsilon}.$$

c) Preso ε piccolo a piacere, ed n abbastanza grande perchè sia

$$|A_n| < \varepsilon, \qquad |B_n| < \varepsilon,$$

se sarà $|G_n|$ pure minore di ε, verrà dalla (5)

$$|G_{n+1}| < \frac{(|\beta| + 1 + \varepsilon)\varepsilon}{|\alpha| - \varepsilon(1 + \varepsilon)},$$

e questa si potrà rendere piccola a piacere, ed in ogni caso minore dell'unità.

d) Ciò posto, esaminiamo in qual modo G_n possa variare al crescere di n. Si potranno fare tre ipotesi:

1°. Per un dato n, $|G_n|$ è minore di $\lambda < \varepsilon$. Allora, per c), sarà $|G_{n+1}| < 1$ quindi, o esso è pure minore di λ, o è compreso fra λ ed $1/\lambda$.

2°. Sia invece $|G_n|$ compreso fra λ ed $1/\lambda$. Risulta allora da b) che è

$$|\beta + B_n + A_n/G_n| < |\alpha - A_n - B_n\, G_n|$$

e quindi $\left|\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|$ è minore di una quantità minore di uno, e che si mantiene tale al crescere di n.

3°. Sia infine $|G_n|$ maggiore di $1/\lambda$. Allora $|G_{n+1}|$ o si mantiene pure tale, o risulta inferiore ad $1/\lambda$, rientrando in una delle due ipotesi precedenti.

Da questa analisi risulta che se, per un valore di n, $|G_n|$ diviene inferiore ad $1/\lambda$, esso tende al limite zero per $n = \infty$. All'infuori di questo caso è possibile che $|G_n|$ sia sempre superiore ad $1/\lambda$, ed allora il suo limite, per $n = \infty$, è infinito.

e) Ma si ha

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\alpha\, X_n + \beta\, Y_n}{X_n + Y_n}\,.$$

Nel caso che $G_n = Y_n\, X_n$ tenda a zero per $n = \infty$, si ottiene

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha;$$

nel caso che G_n tenda all'infinito, si ha invece

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \beta,$$

c. d. d..

17. — D'ora innanzi ammetteremo che l'equazione (1) contenga linearmente una variabile x nel suo coefficiente a_n:

$$a_n = a'_n\, x + a''_n\,;$$

talchè la (1) si scriverà:

(5) $$f_{n+2} = (a'_n\, x + a''_n)\, f_{n+1} + b_n\, f_n\,.$$

Gli integrali A_n, B_n sono in questo caso polinomi razionali interi in x, ed è facile scorgere che A_n è del grado $n-2$, B_n del grado $n-1$.

Dal § 15 risulta che la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'integrale distinto della (5) è che sia convergente la serie

$$\sigma = \sum_{\nu=2}^{\infty} (-1)^\nu \frac{b_0\, b_1 \dots b_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\, B_\nu};$$

fatta tale ipotesi, avremo che

$$\frac{A_n}{B_n} - \sigma = (-1)^n \left(\frac{b_0\, b_1 \dots b_{n-1}}{B_n\, B_{n+1}} - \frac{b_0\, b_1 \dots b_n}{B_{n+1}\, B_{n+2}} + \dots \right).$$

Se ora la serie che figura in questo secondo membro ed i cui termini sono funzioni di x, si sviluppa — formalmente — in serie di potenze negative di x, si vede subito che essa è della forma

$$\frac{c}{x^{2n-1}} + \frac{c'}{x^{2n}} + \frac{c''}{x^{2n+1}} + \dots,$$

poichè B_n è del grado $n-1$ in x. Esprimeremo questo fatto dicendo che tale serie è del grado $-2n+1$ in x. Formando dunque l'integrale distinto $\sigma_n = A_n - \sigma B_n$, esso sarà del grado $-n$. Talchè:

L'integrale distinto della (5) *è formalmente rappresentabile mediante un sistema di serie di potenze negative di* x, *del grado rispettivo* $-n$.

È facile dimostrare che l'equazione (5) non può avere un secondo integrale di questa forma, poichè la condizione che $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ siano serie di potenze negative di x dei gradi $-1, -2, \dots, -n, \dots$ basta (fatto $f_0 = 1$) a determinare univocamente e di mano in mano tutti i coefficienti di queste serie.

Rimane ora da vedere se gli sviluppi in serie di potenze negative, ottenuti così *formalmente* per le σ_n, hanno anche un significato effettivo: ciò risulterà dai §§ seguenti, in cui si dimostrerà che *se* a'_n, a''_n, b_n *hanno limiti finiti per* $n = \infty$, *si può sempre assegnare nel piano della variabile complessa* x *un cerchio col centro nell'origine e di raggio finito, fuori del quale non solo esiste l'integrale distinto per la* (5), *ma questo integrale è inoltre costituito da un sistema* σ_n *di serie di potenze negative della* x, *del grado* $-n$ *e convergenti fuori del detto cerchio.*

18. — a) A questo effetto, supporremo che nessuna delle a'_n possa essere nulla e neppure il loro limite: allora un facile cambiamento di variabili permette di porre, senza restrizione,

$$\lim_{n=\infty} a'_n = 2\,, \qquad \lim_{n=\infty} a''_n = 0\,, \qquad \lim_{n=\infty} b_n = 1.$$

L'equazione caratteristica (4) della (5) diviene così

$$z^2 - 2\,x\,z + 1 = 0\,, \tag{6}$$

avente due radici che si indicheranno con $\alpha(x)$ ed $1/\alpha(x)$; il modulo di $\alpha(x)$ essendo ϱ, si potrà supporre $\varrho > 1$ per ogni x, eccettuati i valori di x reali e compresi fra -1 e $+1$. I valori di x per i quali ϱ si mantiene costante si trovano su di una ellisse coi fuochi nei punti $+1$ e -1.

b) Le a'_n essendo tutte diverse da zero, i loro moduli avranno un limite inferiore che potrà essere 2, ed in caso diverso sarà un minimo effettivo diverso da zero, che indicheremo con A'. I moduli delle a''_n e b_n avranno limiti superiori che indicheremo con A'' e B. Sia infine η una quantità positiva arbitrariamente piccola, ma fissa.

Nel piano della variabile complessa x descrivo un cerchio di centro $x = 0$ e raggio

$$R = \frac{A'' + B + \eta + 1}{A'}\,,$$

che dirò cerchio R. Essendo $B_1 = 1\,, B_2 = (a'_0\,x + a''_0)\,B_1\,,$ se si fa $|x| > R$ sarà

$$\left|\frac{B_2}{B_1}\right| > B + \eta + 1 > 1 + \eta\,;$$

così

$$\left|\frac{B_3}{B_2}\right| = \left|a'_1\,x + a''_1 + b_1\frac{B_1}{B_2}\right| \geq |a'_1 x| - |a''_1| - \left|b_1\frac{B_1}{B_2}\right| > 1 + \eta\,.$$

Supposta dimostrata fino ad un dato indice la disuguaglianza

$$\left|\frac{B_{n+1}}{B_n}\right| > 1 + \eta\,,$$

essa risulta vera per l'indice seguente, supposto sempre $|x| > R$, poichè

$$\left|\frac{B_{n+2}}{B_{n+1}}\right| = \left|a'_n\,x + a''_n + b_n\frac{B_n}{B_{n+1}}\right| \geq |a'_n x| - |a''_n| - \left|b_n\frac{B_n}{B_{n+1}}\right| > 1 + \eta\,.$$

Ma il teorema di POINCARÉ c'insegna che il rapporto B_{n+1}/B_n tende ad una delle radici dell'equazione (6): perciò il limite di quel rapporto non può essere che la radice α di modulo maggiore dell'unità; si conclude cioè che per i valori $|x| > R$ si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \alpha(x).$$

c) Osserviamo infine che per i valori $|x| > R$, le $B_n(x)$ non si possono annullare. Se infatti fosse $B_{n+2} = 0$ per un tale valore di x, ne dovrebbe risultare

$$a_n' x + a_n'' = - \frac{b_n B_n}{B_{n+1}},$$

risultato impossibile poichè il modulo del primo membro è maggiore di $B + \eta + 1$, mentre quello del secondo membro è minore di B.

19. — Le considerazioni svolte nel § precedente ci permettono ora di dimostrare che

Per i valori di x esterni al cerchio R, la frazione continua definita dall'equazione (5) *è convergente o — ciò che torna lo stesso — l'equazione* (5) *ammette l'integrale distinto.*

Osserviamo pertanto che il valore σ della frazione continua è dato dalla serie (3'), di cui basta quindi dimostrare la convergenza. Ora prendendo i termini della detta serie nel loro valore assoluto, il rapporto fra un termine ed il precedente è dato da

$$\frac{b_{\nu-1} B_{\nu-1}}{B_{\nu+1}}$$

e questo tende, per $\nu = \infty$, al limite $1/|\alpha^2(x)| = 1/\varrho^2$, dove è $\varrho > 1$.

Essendosi poi escluso che per valori di x fuori del cerchio R i termini della serie possano essere infiniti [§ 18, c)], concludiamo che per ogni tale valore di x la serie (3') converge assolutamente, c. d. d..

20. — Della serie (3') si può dimostrare ancora la convergenza in egual grado fuori del cerchio R.

Infatti il modulo del rapporto di un termine di essa serie al precedente è

$$b_\nu \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} < \frac{B}{(1+\eta)^2};$$

ora la quantità η potendosi scegliere ad arbitrio, purchè R si prenda in modo opportuno [§ 18, b)], si potrà fare (k essendo un numero positivo minore dell'unità)

$$\eta > \sqrt{\frac{B}{k}} - 1$$

onde segue

$$\left| b_\nu \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \right| < k < 1 .$$

Essendo preso R in seguito al valore così fissato per η, e k essendo indipendente da x, ne risulta che la (3') converge in egual grado fuori del cerchio R. Lo stesso avviene delle serie indicate al § 17 con σ_n, le quali sono formate coi resti della σ.

Ma le serie σ e σ_n essendo convergenti in egual grado per $|x| > R$, un noto teorema della teoria delle funzioni (1) c'insegna che esse sono in conseguenza funzioni analitiche di x regolari in quel campo, e, come tali, sviluppabili in serie di potenze decrescenti di x. Rimane così stabilito quanto avevamo enunciato alla fine del § 17, e cioè che *l'integrale distinto della* (5), *non solo esiste fuori del cerchio* R, *ma coincide coll'unico integrale rappresentato da serie* σ_n *di potenze negative di* x *di grado* $-n$, *convergenti fuori del medesimo cerchio* (2).

21. — Le proposizioni dimostrate nei §§ precedenti permettono ora di applicare alle $A_n(x)$, $B_n(x)$ e $\sigma_n(x)$ tutte le proprietà che si hanno per i numeratori, denominatori e resti delle ridotte dello sviluppo di una funzione data in frazione continua algebrica. Non ci tratteniamo più oltre su tali proprietà, per la conoscenza delle quali il lettore può consultare la prima parte del T. II di *Handbuch der Kugelfunctionen* di HEINE, nonchè il Cap. V della parte prima del T. 1, ed il libro del POSSÉ: *Sur quelques applications des fractions*

(1) WEIERSTRASS, *Zur Functionenlehre,* Monatsbericht der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1881.

(2) Le ricerche esposte in questo Capitolo, come pure quelle del seguente, si possono estendere coi medesimi metodi alle equazioni ricorrenti d'ordine superiore al secondo. Nella recente Memoria « *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue,* Mem. dell'Accademia delle Scienze di Bologna, S. V, T. IV, 1894 » ho dimostrato anche per le equazioni del terzo ordine di forma analoga alla (5) l'esistenza dell'integrale distinto e la sua rappresentazione mediante serie di potenze negative di x, per valori di $|x|$ abbastanza grandi.

continues algébriques (S. Petersbourg, 1886). Ci limiteremo a stabilire qui formalmente uno sviluppo che dovremo richiamare nell'ultimo Capitolo del presente lavoro, ove se ne daranno le condizioni di convergenza per un caso di una notevole generalità. È da osservare che, almeno a mia conoscenza, nulla era stato detto di generale circa alle condizioni di convergenza di un simile sviluppo.

Riscriviamo l'equazione (5) nella forma

$$a_n f_{n+2} + (b'_n x + b''_n) f_{n+1} + c_n f_n = 0 , \tag{5'}$$

e consideriamo accanto a questa l'altra, che diremo sua *inversa*,

$$a_{n-1} f_n + (b'_n z + b''_n) f_{n+1} + c_{n+1} f_{n+2} = 0 . \tag{5''}$$

Sia $S_n(z)$ un integrale di questa ultima, per il quale valga la condizione iniziale

$$c = (b'_0 z + b''_0) S_1 + c_1 S_2 .$$

Moltiplicando allora la (5') per $S_{n+1}(z)$ e sommando per tutti i valori di n da zero all'infinito, considerando per f_n l'integrale $B_n(x)$ determinato da $B_0 = 0$, $B_1 = 1$, viene:

$$-x \sum_{n=1}^{\infty} b'_{n-1} B_n(x) S_n(z) = B_1 (b''_0 S_1 + c_1 S_2) +$$

$$+ B_2 (a_0 S_1 + b''_1 S_2 + c_2 S_3) + \dots ,$$

ora, tenendo conto della (5'') e della condizione iniziale enunciata, si ottiene

$$-x \sum_{n=1}^{\infty} b'_{n-1} B_n(x) S_n(z) = c - b'_0 z S_1 - b'_1 z S_2 B_2 - \dots$$

ossia

$$(z - x) \sum_{n=1}^{\infty} b'_{n-1} B_n(x) S_n(x) = c ,$$

onde

$$\frac{1}{z - x} = \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} b'_{n-1} B_n(x) S_n(z). \tag{7}$$

Questo è lo sviluppo formale che volevamo stabilire [1], e di cui al § 55 si dimostrerà la validità pel caso che a_n, b'_n, b''_n, c siano funzioni razionali intere dell'indice n.

CAPITOLO IV.

Le equazioni differenziali lineari [2].

22. — Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente a che, fra r funzioni analitiche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ di x, regolari in un campo comune di valori della variabile, passi una relazione lineare omogenea identica a coefficienti costanti, è che si annulli il determinante*

$$D(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & & \varphi_r \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \ldots & \varphi'_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(r-1)} & \varphi_2^{(r-1)} & \ldots & \varphi_r^{(r-1)} \end{vmatrix},$$

dove si sono indicate le derivate rispetto ad x mediante gli indici superiori.

a) La condizione è *necessaria.* Se infatti, essendo $c_1, c_2, \ldots, c_r$ costanti, si ha

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots + c_r \varphi_r = 0,$$

(1) Lo HEINE dà questo sviluppo nel caso di $a_n = c_n = 1$ (op. cit., T. I, pag. 203) ma si limita ad aggiungere: *freilich die Convergenz noch vorausgesetz.* Così pure il JORDAN, *Cours d'Analyse,* 2.ème édit., T. II. pag. 259. Nelle opere citate la formula (7) viene stabilita con altro metodo: quello da noi seguito ha il vantaggio di potersi estendere senza difficoltà ad equazioni ricorrenti di qualunque ordine.

(2) In questo Capitolo si parla esclusivamente di funzioni analitiche della variabile x, nonostante che alcune delle proposizioni che vi si trovano siano applicabili anche a funzioni non analitiche, ma che ammettono le derivate dei primi ordini. I teoremi di questo Capitolo sono dovuti al FUCHS (Crelle, T. LXVI); le considerazioni del § 27 appartengono al CASORATI (Mem. cit.).

basta derivare $r-1$ volte rispetto ad x ed eliminare $c_1, c_2, \dots, c_r$ per vedere che è $D(x) = 0$.

b) La condizione è *sufficiente*. Sia infatti $D = 0$, e non siano nulli i reciproci dell'ultima linea, altrimenti il teorema si dimostrerebbe per uno di quelli. Derivando D colla regola per la derivazione dei determinanti, tutti i determinanti che si ottengono sono identicamente nulli ad eccezione di uno, talchè si ha

$$D'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_r \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_r' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(r-2)} & \varphi_2^{(r-2)} & \dots & \varphi_r^{(r-2)} \\ \varphi_1^{(r)} & \varphi_2^{(r)} & \dots & \varphi_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

e per essere D identicamente nullo, $D'(x) = 0$. Siano ora $U_1, U_2, \dots, U_r$ i reciproci della prima linea in D: quelli della prima linea in D' ne saranno rispettivamente le derivate, e si avrà

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 \varphi_1 + U_2 \varphi_2 + \dots + U_r \varphi_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ U_1 \varphi_1^{(r-2)} + U_2 \varphi_2^{(r-2)} + \dots + U_r \varphi_r^{(r-2)} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1' \varphi_1 + U_2' \varphi_2 + \dots + U_r' \varphi_r = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ U_1' \varphi_1^{(r-2)} + U_2' \varphi_2^{(r-2)} + \dots + U_r' \varphi_r^{(r-2)} = 0, \end{array} \right.$$

da cui, poichè non sono tutti zero i determinanti della matrice di questo sistema, risulta

$$U_1 : U_2 : \dots : U_r = U_1' : U_2' : \dots : U_r',$$

onde

$$\frac{d \log U_h}{d\, x} = \frac{d \log U_k}{d\, x}, \qquad U_h / U_k = (\text{costante}),$$

e quindi fra le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ passa una relazione lineare a coefficienti costanti, c. d. d..

23. — Considereremo in ciò che segue equazioni differenziali lineari omogenee dell'ordine n:

$$A_0\, y^{(n)} + A_1\, y^{(n-1)} + \dots + A_n\, y = 0\,, \tag{1}$$

dove $A_0, A_1, \dots, A_n$ sono funzioni analitiche della x, regolari in un campo comune di valori della variabile.

a) Una tale equazione ammette tanti integrali linearmente indipendenti quante sono le unità del suo ordine. Supposto infatti che ciò sia vero per la equazione dell'ordine $n-1$, si ponga

$$y = u\,\varphi\,;$$

sostituendo in (1):

$$A_0\, \varphi\, u^{(n)} + (A_1\, \varphi + n\, A_0\, \varphi')\, u^{(n-1)} + \dots = 0\,, \tag{2}$$

dove il termine in u è nullo, e quindi la (2) è un'equazione differenziale lineare di ordine $n-1$ in u' ed ha, per il supposto, $n-1$ integrali linearmente indipendenti $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$. Si considerino ora le funzioni

$$\varphi\,, \quad \varphi \int \psi_2\, \mathrm{d}x\,, \quad \varphi \int \psi_3\, \mathrm{d}x\,, \dots, \quad \varphi \int \psi_n\, \mathrm{d}x\,;$$

esse saranno tutte integrali della (1): di più, se per queste funzioni si forma il determinante $D(x)$, si scorge immediatamente che esso è uguale a

$$\varphi^n \begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 & \dots & \psi_n \\ \psi_2' & \psi_3' & \dots & \psi_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_2^{(n-2)} & \psi_3^{(n-2)} & \dots & \psi_n^{(n-2)} \end{vmatrix}\,,$$

per ipotesi differente da zero.

b) Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ sono integrali della (1), sarà pure integrale ogni espressione $c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \dots$.

c) Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono n integrali della (1) linearmente indipendenti, ogni altro integrale φ sarà della forma

$$\varphi = c_1\, \varphi_1 + c_2\, \varphi_2 + \dots + c_n\, \varphi_n\,.$$

Infatti sostituendo nella (1) i valori $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ed eliminando, fra le identità così scritte, i coefficienti $A_0, A_1, \dots, A_n$, si ottiene

$$\begin{vmatrix} \varphi^{(n)} & \varphi^{(n-1)} & \dots & \varphi' & \varphi \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_1' & \varphi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n^{(n)} & \varphi_n^{(n-1)} & \dots & \varphi_n' & \varphi_n \end{vmatrix} = 0 ,$$

da cui risulta (§ 22) che fra $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

24. — Un sistema di n integrali della (1), fra i quali non passi alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, dicesi *sistema fondamentale* della equazione (1). Sia $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ un tale sistema: se si pone

$$(3) \qquad \Phi_i = a_{i,1}\,\varphi_1 + a_{i,2}\,\varphi_2 + \dots + a_{i,n}\,\varphi_n , \qquad (i = 1, 2, \dots, n) ,$$

essendo il determinante $\delta = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}$ diverso da zero, il sistema $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ sarà pure un sistema fondamentale e reciprocamente, ogni sistema fondamentale è espresso mediante uno di essi sotto la forma (3). Detto Δ il determinante formato come D con gli integrali $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, segue dalle (3) che

$$\Delta = \delta\, D ,$$

il che si esprime dicendo che D è un *invariante* dell'equazione (1). Se nel determinante

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

si moltiplica l'ultima linea per A_1 e si aggiunge alla prima, seconda, ..., $(n-1)^{\text{esima}}$ moltiplicate rispettivamente per $A_n, A_{n-1}, \dots, A_2$, si ottiene $-A_0 D'(x)$, onde risulta per D l'espressione notevole:

(4) $$D(x) = c\, e^{-\int \frac{A_1}{A_0} dx} .$$

25. — Teorema di FUCHS. *L'equazione* (1) *ammette un sistema fondamentale di integrali che sono funzioni analitiche regolari nell'intorno di ogni punto* x_0 *preso in un campo* T *in cui siano regolari le funzioni analitiche*

$$A_1/A_0\,,\ A_2/A_0\,,\ \dots,\ A_n/A_0\,.$$

Si ponga per brevità $A_i/A_0 = B_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, e l'equazione (1) si scriverà

(1′) $$y^{(n)} + B_1 y^{(n-1)} + B_2 y^{(n-2)} + \dots + B_n y = 0\,.$$

Si considerino gli sviluppi delle funzioni B_i nell'intorno del punto x_0, e per semplicità si ponga $x = 0$ in luogo di $x = x_0$: caso a cui si può sempre ricondurre ogni altro facendo la trasformazione $z = x - x_0$. Indicando con ϱ il raggio di un circolo di centro $x = 0$ entro cui si mantengono regolari le $B_1, B_2, \dots, B_n$, si avrà, per $|x| < \varrho$,

$$B_i = a_{i,0} + a_{i,1}\, x + a_{i,2}\, x^2 + \dots, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Si cerchi ora di soddisfare alla (1′) ponendo

(5) $$y = f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_\nu x^\nu + \dots\,.$$

Presi i coefficienti $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ ad arbitrio, e notando che $k_\nu = \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0)$, possiamo determinare dalla (1′), con derivazioni successive, $y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \dots$ in funzione di $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, cioè $k_n, k_{n+1}, k_{n+2}, \dots$ in funzione di $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$. Nelle espressioni di k_ν in funzione di $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ figurano sole operazioni di somme e moltiplicazioni sulle quantità $a_{i,\nu}$ e le $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$, queste ultime entrando linearmente.

L'equazione si può dunque soddisfare *formalmente* con uno sviluppo della forma (5), contenente linearmente le n costanti $k_1, k_2, \dots, k_\nu$. Rimane da mostrare che questo sviluppo è convergente in un intorno di $x = 0$.

A questo effetto, si indichi con M un numero positivo maggiore del massimo modulo delle $B_1, B_2, \dots, B_n$ entro il cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $r < \varrho$. Per un noto teorema sulle serie di potenze sarà

$$|a_{i,r}| < M/r^\nu .$$

Si consideri ora l'equazione

$$Y^{(n)} = \frac{M}{1 - x/r} (Y^{(n-1)} + Y^{(n-2)} + \dots + Y' + Y) : \tag{6}$$

sviluppando in serie il coefficiente di $Y^{(i)}$, il termine generale di essa serie sarà $(M/r^\nu) x^\nu$, maggiore pertanto in valore assoluto del termine corrispondente in B_i. Si ponga ora

$$Y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_\nu x^\nu + \dots \tag{7}$$

con $\lambda_0 = |k_0|, \lambda_1 = |k_1|, \dots, \lambda_{n-1} = |k_{n-1}|$; l'equazione (6) permetterà di ricavare i valori di $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$ in funzione di $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$: i calcoli da fare saranno quelli stessi che si facevano per ottenere dalla (1′) le $k_n, k_{n+1}, \dots$ in funzione di $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$: solo nelle λ_ν al posto delle $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ figureranno i loro moduli, e al posto delle $a_{i,\nu}$ figureranno le quantità positive M/r^ν, maggiori in modulo delle corrispondenti $a_{i,\nu}$. Pertanto i coefficienti $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots$ saranno tutti positivi, e sarà $\lambda_\nu > |k_\nu|$. Da ciò risulta che per dimostrare la convergenza dello sviluppo (5) basta dimostrare quella dello sviluppo (7).

A questo scopo osserviamo che dalla (6) risulta, sostituendo lo sviluppo (7), l'equazione ricorrente fra le λ_ν:

$$(\nu + n)(\nu + n - 1) \dots (\nu + 1) \lambda_{\nu+n} =$$

$$= (\nu + n - 1)(\nu + n - 2) \dots (\nu + 1) \{(\nu/r) + M\} \lambda_{\nu+n-1} +$$

$$+ (\nu + n - 2) \dots (\nu + 1) M \lambda_{\nu+n-2} + \dots + (\nu + 1) M \lambda_{\nu+1} + M \lambda_\nu ,$$

ora risulta immediatamente dal teorema del § 10 che questa equazione definisce un sistema λ_ν tale che la serie $\Sigma \lambda_\nu x^\nu$ ha un raggio determinato (non nullo) di convergenza: con ciò il teorema è dunque dimostrato.

26. — Data un'equazione differenziale lineare della forma (1), un punto x_0 in cui sono regolari le funzioni $A_1/A_0, A_2/A_0, \dots, A_n/A_0$ si dirà punto *non singolare* per l'equazione; ogni altro punto sarà punto *singolare*. Possiamo dunque enunciare, in seguito al teorema precedente, che:

Nell'intorno di ogni punto non singolare di un'equazione differenziale lineare, tutti i suoi integrali sono funzioni analitiche regolari.

Per ciò, e per i principi generali della teoria delle funzioni analitiche, si può di ogni integrale della (1) costruire la continuazione analitica in ogni area connessa in cui le $A_1/A_0, A_2/A_0, \dots, A_n/A_0$ non abbiano punti singolari, e la continuazione analitica di un integrale non cesserà mai di essere integrale della medesima equazione.

27. — Sia x_0 un punto singolare isolato dell'equazione (1). Nel caso che x_0 sia il punto all'infinito del piano-sfera della variabile x, si fa la trasformazione $x = 1/z$. È sempre possibile assegnare un intorno (r) di x_0 entro il quale non si trovi alcun altro punto singolare della (1): riguardando come positive le rotazioni che avvengono nel senso contrario a quello in cui ruotano le lancette di un orologio, immaginiamo che la variabile x, senza uscire dall'intorno (r), compia un giro positivo intorno ad x_0: quando, dopo compiuto questo giro, la variabile torna al punto di partenza x, un integrale $\varphi(x)$ avrà mutato valore, in generale, ed il nuovo valore si indichi con $\overline{\varphi}(x)$. Se ora si nota che la funzione

$$t = \frac{1}{2\pi i} \log(x - x_0) \tag{8}$$

si aumenta di 1 per un tal giro, si potrà indicare $\varphi(x)$ con φ_t, $\overline{\varphi}(x)$ con φ_{t+1}, e così con $\varphi_{t+2}, \varphi_{t+3}, \dots$ ciò che diviene $\varphi(x)$ dopo due, tre, ... giri della variabile in senso positivo.

Ora, considerando $\varphi_t, \varphi_{t+1}, \dots, \varphi_{t+n}$, queste $n+1$ funzioni sono tutte integrali della (1) e perciò fra di esse passa una relazione lineare omogenea, i cui coefficienti sono costanti rispetto a t, cioè funzioni di x ad un sol valore *nell'intorno* (r); questa relazione ha la forma:

$$A_0\,\varphi_{t+n} + A_1\,\varphi_{t+n-1} + A_2\,\varphi_{t+n-2} + \dots + A_n\,\varphi_t = 0, \tag{9}$$

e rispetto alla t considerata come variabile essa non è altro che *una equazione lineare omogenea a coefficienti costanti*, e come tale si può integrare come è indicato al § **14**. Supporremo che in questa equazione φ significhi l'integrale generale della (1), con n costanti arbitrarie.

Se, formata l'equazione

$$A_0\,\omega^n + A_1\,\omega^{n-1} + \dots + A_{n-1}\,\omega + A_n = 0\,, \tag{10}$$

questa ha tutte le sue radici distinte, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, l'integrale dell'equazione (9) sarà dato, secondo il § 14, da

$$u_1\,\omega_1^t + u_2\,\omega_2^t + \dots + u_n\,\omega_n^t, \tag{11}$$

dove $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono costanti rispetto a t, cioè funzioni di x *ad un valore* nell'intorno di x_0. Se l'equazione (9) ha radici multiple, ed ω_1 è, per es., una radice dell'ordine h di multiplicità, agli h termini corrispondenti della (10) va sostituito (§ 14)

$$\omega_1^t\,(v_1 + v_2\,t + \dots + v_h\,t^{h-1}). \tag{12}$$

Ciò posto, si sostituisca nelle espressioni (11) e (12) per t il valore (8): esse si mutano rispettivamente, posto $\omega_k = e^{2\pi i \varrho_k}$, in

$$u_1\,(x - x_0)^{\varrho_1} + u_2\,(x - x_0)^{\varrho_2} + \dots + u_n\,(x - x_0)^{\varrho_n}, \tag{13}$$

$$(x - x_0)^{\varrho_1}\,\{v_1 + v_2'\log(x - x_0) + \dots + v_h'\log^{h-1}(x - x_0)\}\,. \tag{14}$$

Ora se noi poniamo una espressione della forma (13) in luogo di y nel primo membro della equazione (1), otteniamo evidentemente una espressione della stessa forma, cioè della forma (11) in t. Ma questa (§ 14) non può essere zero se non sono zero tutti i suoi coefficienti e lo stesso succede se nella (1) si pone una espressione della forma (14), onde si conclude:

Se l'equazione (10) *ha tutte le sue radici distinte, l'equazione* (1) *ammette nell'intorno del punto* x_0 *gli* n *integrali, detti* c a n o n i c i *e formanti un sistema fondamentale,*

$$u_k\,(x - x_0)^{\varrho_k}, \quad \varrho_k = \frac{1}{2\pi i}\log \omega_h\,, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\,, \tag{15}$$

dove u_k *è una funzione di* x *ad un valore nell'intorno* (r) *di* x_0*; se l'equazione* (10) *ha una radice multipla* ω_1 *dell'ordine* h *di multipli-*

città, la (1) *ha nell'intorno di* x_0 *gli* h *integrali*

$$
(16) \begin{cases} v_1 (x - x_0)^{\varrho_1} , \\ v_1' (x - x_0)^{\varrho_1} \log (x - x_0) + v_2' (x - x_0)^{\varrho_1} , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{v_1^{(h)} \log^h (x - x_0) + v_2^{(h)} \log^{h-1} (x - x_0) + \dots + v_h^{(h)}\} (x - x_0)^{\varrho_1} . \end{cases}
$$

28. — a) La dimostrazione che di questo teorema del FUCHS è data nel precedente § è dovuta, come si è detto, al CASORATI. L'equazione (10) è stata detta equazione *fondamentale* relativa al punto singolare x_0, ed equazione *determinante* quella che ha per radici le $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ e si deduce dalla fondamentale ponendo $\omega = e^{2\pi i \varrho}$.

b) Per la formazione dell'equazione fondamentale può servire il seguente metodo. Sia $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ un sistema fondamentale qualunque della (1), e ψ un integrale canonico. Quando x ruota attorno ad x_0, φ_k si muterà in un nuovo integrale $\overline{\varphi}_k$ della (1) e perciò

$$
(17) \quad \overline{\varphi}_k = \alpha_{k,1} \varphi_1 + \alpha_{k,2} \varphi_2 + \dots + \alpha_{k,n} \varphi_n , \qquad (k = 1, 2, \dots, n) ;
$$

queste formule dànno la *sostituzione lineare* che subisce il sistema $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ per un giro della variabile attorno ad x_0. Ora essendo

$$
\overline{\psi} = \omega \psi ,
$$

posto

$$
\psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n ,
$$

sostituendo le (17) e notando che una funzione lineare omogenea a coefficienti costanti di $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ non può essere nulla altro che se sono nulli tutti i suoi coefficienti, sarà:

$$
\begin{aligned}
& c_1 (\alpha_{11} - \omega) + c_2 \alpha_{21} + \dots + c_n \alpha_{n1} = 0 , \\
& c_1 \alpha_{12} + c_2 (\alpha_{22} - \omega) + \dots + c_n \alpha_{n2} = 0 , \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& c_1 \alpha_{1n} + c_2 \alpha_{2n} + \dots + c_n (\alpha_{nn} - \omega) = 0 ,
\end{aligned}
$$

da cui

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{21} & \dots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \omega & \dots \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione ha le stesse radici della (10) e coincide pertanto con quella; essa non dipende dal sistema fondamentale da cui si è partiti (poichè ne sono indipendenti le sue radici) e perciò ai suoi coefficienti si è dato il nome di *invarianti* dell'equazione differenziale.

c) Per la formazione dell'equazione determinante si può formare l'equazione fondamentale, indi porre in essa $\omega = e^{2\pi i \varrho}$; ma si può anche porre, nell'equazione differenziale (1), $y = (x - x_0)^{\varrho}$, indi sviluppare il primo membro dell'equazione per le potenze crescenti di $x - x_0$. Quando in tale sviluppo si trova una minima potenza di $x - x_0$, il suo coefficiente, posto eguale a zero, darà un'equazione in ϱ e precisamente l'equazione determinante.

Le formule (16) si presentano invece delle (15) quando l'equazione determinante ha radici eguali o radici differenti fra loro per numeri interi.

d) Risultati analoghi a quelli di questo § e del precedente si avrebbero supponendo che la variabile ruoti intorno ad un sistema di più punti singolari.

29. — L'operazione per la quale, dato un sistema di quantità $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, si passa alle quantità $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_n$ mediante le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\varphi}_1 = \alpha_{11}\, \varphi_1 + \alpha_{12}\, \varphi_2 + \dots + \alpha_{1n}\, \varphi_n , \\ \overline{\varphi}_2 = \alpha_{21}\, \varphi_1 + \alpha_{22}\, \varphi_2 + \dots + \alpha_{2n}\, \varphi_n , \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overline{\varphi}_n = \alpha_{n1}\, \varphi_1 + \alpha_{n2}\, \varphi_2 + \dots + \alpha_{nn}\, \varphi_n , \end{array} \right.$$

si chiama *sostituzione lineare*; essa è definita dal sistema di coefficienti

$$\text{(A)} \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}, \quad \alpha_{22}, \quad \dots, \quad \alpha_{1n}, \\ \alpha_{21}, \quad \alpha_{22}, \quad \dots, \quad \alpha_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n1}, \quad \alpha_{n2}, \quad \dots, \quad \alpha_{nn}. \end{array}$$

Il determinante della sostituzione $\Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn}$ essendo supposto diverso da zero, si può esprimere $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mediante una operazione analoga eseguita su $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_n$, e che si dice *inversa* della prima.

L'operazione in discorso, che si può rappresentare in modo abbreviato con $\mathrm{A}(\varphi)$, è l'elemento di un calcolo detto *calcolo delle sostituzioni lineari*; l'operazione inversa di A si rappresenta con A^{-1}. Se una seconda operazione è definita dal sistema di coefficienti

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{array}{cccc} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \dots, & \beta_{1n} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \dots, & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}, & \beta_{n2}, & \dots, & \beta_{nn}, \end{array}$$

si indica con BA l'operazione che consiste nell'eseguire su $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ prima l'operazione A, poi la B. Si noti che AB non è in generale uguale a BA: quando ciò avviene, le sostituzioni A e B si dicono *commutabili.* È facile verificare che *il determinante del prodotto di due sostituzioni è uguale al prodotto dei determinanti delle sostituzioni stesse.*

Si vede pure immediatamente che se ad un sistema φ si applica la sostituzione A in guisa che φ si muti in $\mathrm{A}(\varphi)$, contemporaneamente un sistema $\psi = \mathrm{B}(\varphi)$, ottenuto da φ mediante una sostituzione lineare B, si muta in $\mathrm{BAB}^{-1}(\psi)$.

Quando un insieme di operazioni è tale che combinando in qualunque modo operazioni in esso contenute, si ritrovano sempre operazioni del medesimo insieme, si dice che quell'insieme forma un *gruppo.*

30. — [1] Sia data una equazione differenziale lineare della forma (1); sia x_0 un punto non singolare, e si consideri una linea chiusa l che partendo da x_0 vi faccia ritorno, senza passare per alcun punto singolare. Nell'intorno di x_0 sia $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ un sistema fondamentale d'integrali: esso è tale che φ_h sarà una serie di potenze intere

---

[1] Sul concetto di gruppo di un'equazione differenziale e sulla sua determinazione v., oltre alle Memorie di FUCHS (Crelle, T. LXVI e LXXV) e HAMBURGER (Ibid., T. LXXXIII), quelle di POINCARÉ (Acta Matematica, T. I a V, *passim*) specialmente quella *Sur les groupes des équations linéaires, ibid.,* T. IV, e VOLTERRA (Memorie della Società Italiana delle Scienze, S. III, T. VI, e R. C. del Circ. Mat. di Palermo, T. II). V. pure JORDAN, *Cours d'Analyse,* T. III, pag. 193.

positive di $x - x_0$; se di ciascuno di questi sviluppi in serie si fa la continuazione analitica lungo la linea l, si ritornerà nel punto x_0 con uno sviluppo eguale o diverso da quello con cui si era partiti, ma che in ogni caso potrà porsi sotto la forma

$$\overline{\varphi}_h = \alpha_{h,1}\,\varphi_1 + \alpha_{h,2}\,\varphi_2 + \dots + a_{h,n}\,\varphi_n\,.$$

Percorrendo la l, si viene dunque ad eseguire sul sistema fondamentale φ_h una sostituzione lineare A, e ad ogni linea l che parte dal punto x_0 e vi ritorna, corrisponde così una sostituzione lineare. L'insieme delle linee uscenti dal punto x_0 costituendo evidentemente un gruppo, e alla linea composta delle due linee l', l'' successivamente percorsa corrispondendo il prodotto BA delle sostituzioni lineari corrispondenti ad l', l'', risulta che le sostituzioni lineari eseguibili sul sistema fondamentale φ_h costituiscono pure un gruppo. Questo gruppo viene chiamato *gruppo dell'equazione differenziale.* Se in luogo del sistema fondamentale φ se ne considera un altro ψ, siccome ψ si deduce da φ mediante una sostituzione lineare $\mathrm{H}(\varphi)$, così alle sostituzioni A operate su φ corrispondono su ψ le sostituzioni $\mathrm{HAH}^{-1}(\psi)$, le quali si possono riguardare come costituenti un gruppo non diverso dal primo, poichè ad ogni sostituzione dell'uno corrisponde una sostituzione ed una sola dell'altro, e viceversa.

31. — Abbiasi una equazione differenziale lineare (1) con un numero finito di punti singolari $z_1, z_2, \dots, z_p$, oltre al punto $z = \infty$, e a coefficienti uniformi. Ad ogni punto singolare z corrisponde un sistema di integrali canonici (§ **27**), per i quali la sostituzione lineare subita in seguito ad un giro della variabile intorno a z è

$$\begin{matrix} \omega_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \dots 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \omega_n \end{matrix}$$

nel caso che l'equazione fondamentale abbia tutte le radici ω distinte, e si vede facilmente la modificazione da fare nel caso che alcune delle radici ω siano multiple. Ora il gruppo dell'equazione differenziale, cioè le sostituzioni che subisce un sistema fondamentale per tutte le linee chiuse uscenti da uno stesso punto, sarà trovato quando si conosceranno le sostituzioni che subisce il detto sistema fondamentale per le linee semplici che, partendo da un punto qualunque x_0, ruotano una sola volta intorno agli $r+1$ punti singolari, poichè ogni altro cammino chiuso si può ricondurre ad una combinazione e reiterazione di questi. Queste sostituzioni saranno conosciute alla loro volta se si conosceranno le radici delle equazioni fondamentali relative agli $r+1$ punti singolari e le relazioni che legano il sistema fondamentale primitivo agli integrali canonici relativi a ciascuno degli $r+1$ punti singolari.

Si noti che una linea semplice intorno ad $x=\infty$ descritta in senso assunto come positivo, si può ricondurre alla successione delle linee semplici descritte intorno ai punti $z_1, z_2, \dots, z_r$ nel senso negativo: da cui risulta che dette $S_1, S_2, \dots, S_r$ le sostituzioni subite dal sistema φ per le rotazioni intorno a $z_1, z_2, \dots, z_r$ ed S_{r+1} quella subita per una rotazione intorno ad $x=\infty$, si avrà:

$$S_1 S_2 \dots S_r S_{r+1}(\varphi) = \varphi\,,$$

o, simbolicamente, $S_1 S_2 \dots S_r S_{r+1} = 1$.

CAPITOLO V.

Equazioni differenziali lineari regolari. Applicazione all'equazione ipergeometrica.

32. — Per le applicazioni che dobbiamo fare della precedente teoria, ci occorrerà considerare le equazioni (1) in cui i coefficienti $A_0, A_1, \dots, A_n$ sono della forma

$$A_0 = P_0^n,\ A_1 = P_0^{n-1}P_1,\ A_2 = P_0^{n-2}P_2, \dots,\ A_n = P_n\,,$$

dove $P_0, P_1, \dots, P_n$ sono polinomi razionali interi in x dei gradi rispettivi $r, r-1, 2(r-1), \dots, n(r-1)$. Le radici di P_0 si supporranno distinte, e si indicheranno con $z_1, z_2, \dots, z_r$. Una tale equazione (1) si dirà *regolare*.

Non si esclude che $P_1, P_2, \dots, P_n$ siano divisibili per una stessa potenza di $x - z_i$; talchè è della forma indicata, cioè regolare, l'equazione (1) in cui $A_0, A_1, \dots, A_n$ sono polinomi dei gradi rispettivi $r, r-1, \dots, r-n$, come si vede subito colla moltiplicazione di tutta l'equazione per A_0^{n-1}.

33. — Si considerino gli integrali di questa equazione nell'intorno del punto singolare z_h, e per semplicità riconduciamo questo punto al punto zero mediante la posizione $x' = x - z_h$. Cerchiamo di soddisfare all'equazione mediante uno sviluppo della forma

$$\varphi = x'^{\varrho} (k_0 + k_1 x' + k_2 x'^2 + ...) ,$$

applicando il metodo dei coefficienti indeterminati; con ciò φ sarà un integrale canonico (§ 27). Il termine di più basso grado in x' nel primo membro dell'equazione differenziale sarà

$$k_0\{a_{0,0}\varrho(\varrho-1)...(\varrho-n+1)+a_{1,0}\varrho(\varrho-1)...(\varrho-n+2)+...+a_{n-1,0}\varrho+a_{n,0}\}x'^{\varrho},$$

essendosi posto

$$A_h = a_{h,0} + a_{h,1} x' + ... + a_{h,n(r-1)} x'^{n(r-1)} ;$$

ora questo termine dovendo essere zero, dovrà essere soddisfatta l'equazione (equazione determinante)

$$f_0 (\varrho) = a_{0,0} \varrho (\varrho - 1) ... (\varrho - n + 1) + \tag{18}$$

$$+ a_{1,0} \varrho (\varrho - 1) ... (\varrho - n + 2) + ... + a_{n-1,0} \varrho + a_{n,0} = 0 ,$$

e questa ci fa conoscere i valori di ϱ.

Se ora l'equazione (18) non ha radici multiple, nè differenti fra loro per numeri interi, si determini una di queste radici $\varrho = \varrho_1$, e per mezzo del metodo stesso dei coefficienti indeterminati, posto $s = nr$ e

$$f_h(\varrho)=a_{0,h}\varrho(\varrho-1)...(\varrho-n+1)+a_{1,h}\varrho(\varrho-1)...(\varrho-n+2)+...+a_{n-1,h}\varrho+a_{n,h},$$

si hanno le equazioni

$$\tag{19} \left\{ \begin{array}{l} k_0 f_1 (\varrho_1) + k_1 f_0 (\varrho_1 + 1) = 0 , \\ k_0 f_2 (\varrho_1) + k_1 f_1 (\varrho_1 + 1) + k_2 f_0 (\varrho_1 + 2) = 0 , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ k_{\nu-s+n} f_{s-n} (\varrho_1 + \nu - s + n) + \\ \qquad + k_{\nu-s+n+1} f_{s-n-1}(\varrho_1+\nu-s+n+1) + ... + k_\nu f_0(\varrho_1+\nu) = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ; \end{array} \right.$$

dalle quali si determinano i coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_\nu, \dots$, restando arbitrario k_0. Lo sviluppo φ, determinato così formalmente, è anche convergente entro un cerchio di centro $x' = 0$ e di raggio non nullo: ciò risulta dal teorema del § 10, e dall'essere finito il limite di $\dfrac{f_h(\varrho_1 + \nu)}{f_0(\varrho_1 + \nu)}$ per $\nu = \infty$.

34. — Supponiamo ora che l'equazione determinante abbia due radici eguali, od anche differenti per un numero μ. Ciò equivale a supporre che l'equazione *fondamentale* relativa al punto singolare x' abbia una radice doppia, poichè le radici della (18) sono (cfr. §§ 27, 28) i logaritmi delle radici dell'equazione fondamentale divisi per $2\pi i$. Per trattare questo caso, ci conviene premettere le due seguenti osservazioni:

a) Un'espressione della forma

$$\mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}_1(x) \log x,$$

dove $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ sono serie di potenze di x, non può essere nulla in tutto un intorno di $x = 0$ se non sono nulle $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ e quindi tutti i loro coefficienti. Ciò risulta subito dall'ultima proposizione del § 14, come si vede facendo $x = e^{2\pi i t}$.

b) Derivando n volte rispetto ad x l'espressione $x^\varrho \log x$, si ottiene

$$\frac{\partial^n \, x^\varrho \log x}{\partial \, x^n} = \varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - n + 1)\, x^{\varrho - n} \log x +$$
$$+ \, x^{\varrho - n} \, \frac{\partial \, \varrho(\varrho - 1) \dots (\varrho - n + 1)}{\partial \, \varrho}:$$

questa formula si verifica per $n = 2$, e si vede facilmente che se essa è vera per un dato n, è vera per $n + 1$.

Ciò posto, la teoria generale (§ 27) c'insegna che quando l'equazione fondamentale ha una radice doppia, esiste un integrale dell'equazione differenziale che contiene due costanti arbitrarie ed ha la forma

$$\varphi = v\, x'^\varrho + v_1\, x'^\varrho \log x',$$

dove v e v_1 sono funzioni ad un valore di x' nell'intorno di $x' = 0$.

Se ora prendiamo per v, v_1 serie di potenze intere positive di x,

$$v = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu, \qquad v_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu x^\nu,$$

e sostituiamo l'espressione φ nell'equazione (1), si avranno per le osservazioni a) e b), i seguenti due sistemi di equazioni, in cui $f'_h(\varrho)$ rappresenta la derivata di $f_h(\varrho)$ rispetto a ϱ,

$$(20)\quad \begin{cases} k_0 f_0(\varrho) + h_0 f'_0(\varrho) = 0\,, \\ k_0 f_1(\varrho) + k_1 f_0(\varrho+1) + h_0 f'_1(\varrho) + h_1 f'_0(\varrho+1) = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{\nu-s+n} f_{s-n}(\varrho+\nu-s+n) + k_{\nu-s+n+1} f_{s-n-1}(\varrho+\nu-s+ \\ \quad + n+1) + \dots + k_\nu f_0(\varrho+\nu) + h_{\nu-s+n} f'_{s-n}(\varrho+\nu-s+n) + \\ \qquad + \dots + h_\nu f'_0(\varrho+\nu) = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} h_0 f_0(\varrho) = 0\,, \\ h_0 f_1(\varrho) + h_1 f_0(\varrho+1) = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ h_{\nu-s+n} f_{s-n}(\varrho+\nu-s+n) + h_{\nu-s+n+1} f_{s-n-1}(\varrho+\nu-s+ \\ \qquad + n+1) + \dots + h_\nu f_0(\varrho+\nu) = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nel caso che l'equazione determinante $f_0(\varrho) = 0$ abbia due radici eguali, il sistema (21) ci dà i valori di $h_1, h_2, \dots, h_\nu, \dots$, essendo h_0 arbitraria; poi, la prima delle (20) essendo identicamente soddisfatta, si dà a k_0 un valore arbitrario e si determinano k_1, $k_2, \dots$ in funzione dei valori già ottenuti per le h_ν. Nel caso invece che l'equazione $f_0(\varrho) = 0$ abbia due radici differenti per un numero intero μ (preso positivo), la prima delle (20) non è più identicamente soddisfatta, e deve essere $h_0 = h_1 = \dots = h_{\mu-1} = 0$; la h_μ è arbitraria e le (21), a partire dalla $(\mu+2)^{\text{sima}}$ determinano $h_{\mu+1}, h_{\mu+2}, \dots$. Le equazioni (20) determinano k_1, $k_2, \dots$ fino a $k_{\mu-1}$ in funzione dell'arbitraria k_0; k_μ viene determinata in funzione di questa e dell'arbitraria h_μ, e le (20) seguenti determinano $k_{\mu+1}$, $k_{\mu+2}, \dots$ sostituendovi i valori dati dalle (21) per $h_{\mu+1}$, $h_{\mu+2}$, ... L'integrale φ ha così i suoi coefficienti determinati con due costanti arbitrarie; in quanto alla convergenza delle serie di potenze v e v_1, essa risulta verificata in un cerchio non nullo in forza del teorema del § 10 per la serie v_1, ed in forza dell'analogo teorema del § 11 per la serie v.

Analogamente si procede nel caso che l'equazione fondamentale abbia una radice tripla: si giunge cioè in modo analogo ad un integrale della (1), contenente tre costanti arbitrarie, della forma

$$\varphi = v\, x'^{\varrho} + v_1\, x'^{\varrho} \log x' + v_2\, x'^{\varrho} \log^2 x',$$

dove v, v_1, v_2 sono serie di potenze intere positive di x' convergenti in un intorno assegnabile di $x' = 0$: e ciò vale, sia se le radici corrispondenti dell'equazione determinante sono eguali, sia se differiscono per numeri interi. Analogamente per radici dell'equazione fondamentale aventi un ordine qualunque di multiplicità.

Importa appena avvertire che, dimostrata la convergenza degli sviluppi in serie di potenze precedenti in un cerchio di centro $x' = 0$ (od $x = z$) e di raggio non nullo, risulta dai principi della teoria delle funzioni che il raggio di convergenza delle dette serie sarà per lo meno eguale alla distanza del punto z_k dal più prossimo degli altri punti singolari.

Considerazioni analoghe valgono per il punto $x = \infty$, come si vede mediante la trasformazione $x = 1/z$, e si mantengono gli stessi risultati, colla avvertenza di sostituire alle serie di potenze intere positive di x, serie di potenze intere negative della stessa variabile. Se poniamo z_{r+1} in luogo di ∞, e conveniamo, secondo il solito, di sostituire $1/x$ ad $x - \infty$, se infine usiamo il simbolo $\mathcal{P}(x)$ a rappresentare una serie di potenze intere e positive della x, possiamo enunciare il seguente risultato:

Un'equazione differenziale lineare regolare, coi punti singolari z_h, $(h = 1, 2, 3, \ldots, r, r+1)$ *ammette nell'intorno di ogni punto singolare e corrispondentemente alle radici semplici* ϱ *dell'equazione determinante relativa a quel punto, gli integrali canonici della forma*

$$(x - z_h)^{\varrho}\, \mathcal{P}(x - z_h). \tag{22}$$

La presenza di una radice multipla ϱ *dell'equazione determinante porta ad un integrale della forma precedente, ed inoltre ad integrali della* *forma*

$$(23)\quad \begin{cases} (x - z_h)^\varrho \{ \mathcal{P}(x - z_h) + \mathcal{P}_1(x - z_h) \log(x - z_h) \}, \\ (x - z_h)^\varrho \{ \mathcal{P}(x - z_h) + \mathcal{P}_1'(x - z_h) \log(x - z_h) + \mathcal{P}_2'(x - z_h) \log^2(x - z_h) \}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

fino ad un integrale contenente $\log^\lambda(x - z_h)$ *se la radice* ϱ *è dell'ordine* λ *di multiplicità.*

35. — Indicando con $\varrho_{h,k}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, le radici della equazione fondamentale relativa al punto z_h, $(h = 1, 2, \ldots, r, r + 1)$, supposte semplici, gli integrali della forma (22) relativamente a quel punto formeranno un sistema fondamentale che designeremo con ψ_h. Rappresentando con S_h la sostituzione lineare subita da ψ_h per un giro della variabile intorno a z_h, il determinante della sostituzione sarà manifestamente

$$|S_h| = e^{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \varrho_{h,k}}.$$

Ora, ogni sistema fondamentale φ si può porre sotto la forma $T_h \psi_h$, T_h essendo simbolo di una conveniente sostituzione lineare, e la sostituzione subita da φ per un giro della variabile intorno a z_h è $T_h S_h T_h^{-1}$ (§ 29). Ricordando ora la relazione stabilita alla fine del § 31 fra le sostituzioni subite da un sistema φ nei giri della variabile intorno agli $r + 1$ punti singolari, si avrà

$$T_1 S_1 T_1^{-1}\, T_2 S_2 T_2^{-1} \ldots T_{r+1} S_{r+1} T_{r+1}^{-1} = 1,$$

e poichè il determinante del prodotto di sostituzioni è uguale al prodotto dei determinanti delle sostiuzioni medesime (§ 29) si avrà

$$|S_1|\,|S_2| \ldots |S_{r+1}| = 1,$$

onde

$$e^{2\pi i \sum_{h=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{n} \varrho_{h,k}} = 1,$$

e pertanto la somma delle $\varrho_{h,k}$ sarà un numero intero. Ma le (22) non si alterano se le ϱ variano per numeri interi, talchè si può scrivere senza restrizione:

(24)
$$\sum_{h=1}^{r+1} \sum_{k=1}^{n} \varrho_{h,k} = 1 .$$

36. — L'equazione differenziale regolare ha i suoi coefficienti formati con polinomi $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (§ **32**) dei gradi $r, r-1, 2(r-1), \ldots, n(r-1)$. Dati i punti singolari $z_1, z_2, \ldots, z_r$, radici di P_0, l'equazione contiene i coefficienti di $P_1, P_2, \ldots, P_n$ in numero di

$$\frac{r\,n\,(n+1) - n\,(n-1)}{2}$$

indeterminate; d'altra parte, gli $n\,(r+1)$ esponenti $\varrho_{h,k}$, essendo legati dalla relazione (24), costituiscono un sistema di $n\,(r+1)-1$ indeterminate. Ora il numero delle prime è in generale maggiore di quello delle seconde; la condizione d'eguaglianza

$$\frac{rn\,(n+1) - n(n-1)}{2} = n\,(r+1) - 1$$

porta facilmente, come si vede risolvendo rispetto ad n e fatta astrazione dal valore $n = 1$, alla equazione

$$n = 2/(r-1)\,, \qquad \text{onde} \qquad n = 2\,,\ r = 2.$$

Da ciò si conclude:

Un'equazione differenziale lineare regolare, di ordine superiore al primo, non è in generale determinata dalla conoscenza dei suoi punti singolari e degli esponenti in questi punti. È però pienamente determinata dalla conoscenza di questi numeri l'equazione di secondo ordine con due punti singolari a distanza finita.

37. — L'equazione regolare del secondo ordine cui siamo giunti nel § precedente avrà la forma

$$P_0^2\, y'' + P_0 P_1\, y' + P_2\, y = 0\,,$$

essendo

$$P_0 = (x - z_1)\,(x - z_2)$$

e P_1, P_2 polinomi razionali interi rispettivamente del primo e secondo ordine. Intanto una facile trasformazione lineare di variabile permette di portare le singolarità dell'equazione nel punto 0 e nel punto 1, ($z_1 = 0$, $z_2 = 1$); talchè l'equazione in discorso si può scrivere

$$(25) \quad x^2 (x-1)^2 y'' + x(x-1)(hx + h') y' + (gx^2 + g'x + g'') y = 0 ,$$

dove i coefficienti h, h', g, g', g'' sono da determinare in funzione degli esponenti $\varrho_{h,k}$ relativi ai punti singolari $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$. Ci proponiamo ora di fare questa determinazione e di studiare le proprietà degli integrali dell'equazione (25); poi, giovandoci di queste proprietà, di semplificare la forma dell'equazione stessa.

A questo effetto, notiamo anzitutto che, se si pone

$$(26) \qquad y = x^p (x-1)^q v ,$$

la funzione v soddisferà ad una equazione della medesima forma (25), come si verifica facilmente colla semplice sostituzione. Indicando ora gli esponenti relativi al punto $x = \infty$ con ϱ, ϱ', quelli relativi ad $x = 0$ con ϱ_0, ϱ_0', quelli relativi ad $x = 1$ con ϱ_1, ϱ_1' (escludendosi il caso che ϱ e ϱ' siano eguali o differenti per numeri interi, e così per ϱ_0 e ϱ_0' e per ϱ_1 e ϱ_1'), la sostituzione (26) trasformerà queste coppie di esponenti in

$$\varrho + p, \ \varrho' + p; \ \varrho_0 - p, \ \varrho_0' - p; \ \varrho_1 - q, \ \varrho_1' - q$$

rispettivamente, talchè *le trasformazioni della forma* (26) *lasciano invariate le differenze degli esponenti* $\varrho - \varrho'$, $\varrho_0 - \varrho_0'$, $\varrho_1 - \varrho_1'$, inoltre si possono sempre scegliere p e q in modo che per la nuova equazione (25) due degli esponenti non relativi allo stesso punto, per esempio ϱ_0' e ϱ_1', siano eguali a zero.

Ciò posto, le equazioni determinanti dell'equazione (25) relative ai punti $x = \infty$, $x = 0$, $x = 1$ si calcolano senza difficoltà (§ 33) e sono rispettivamente

$$\varrho(\varrho + 1) - h\varrho + g = 0 ,$$

$$\varrho(\varrho - 1) - h'\varrho + g'' = 0 ,$$

$$\varrho(\varrho - 1) + (h + h')\varrho + (g + g' + g'') = 0 ;$$

e di queste, la prima ha per radici ϱ e ϱ', la seconda ϱ_0, ϱ_0', la terza ϱ_1, ϱ_1'. Se ora supponiamo, in seguito a quanto si è detto, l'equazione (25) ridotta tale che siano ϱ_0' e ϱ_1' eguali a zero, sarà

$$g'' = 0\,,\ g + g' + g'' = 0\,,$$

ossia

$$g'' = 0\,,\ g = -g'.$$

Ponendo α e β in luogo di ϱ, ϱ', la prima delle equazioni determinanti precedenti ci dà

$$h = \alpha + \beta + 1\,,\ g = -g' = \alpha\,\beta\,;$$

ponendo poi $\varrho_0 = 1 - \gamma$, viene $h' = -\gamma$, onde $\varrho_1 = \gamma - \alpha - \beta$; dalle quali risulta verificata la (24).

Sostituendo nell'equazione (25) per h, h', g, g', g'' i loro valori e riducendo si ottiene l'equazione stessa sotto la forma:

$$x\,(x-1)\,y'' + \{(\alpha + \beta + 1)\,x - \gamma\}\,y' + \alpha\beta y = 0\,. \tag{27}$$

A questa si dà il nome *equazione differenziale ipergeometrica*; si dice *funzione ipergeometrica* il suo integrale generale, *ramo* della funzione un integrale particolare. È da ricordare che le sostituzioni

$$x = \frac{1}{z}\,,\quad x = 1 - z\,,\quad x = 1 - \frac{1}{z}\,,\quad x = \frac{z}{z-1}\,,\quad x = \frac{1}{1-z}\,,$$

le quali *formano un gruppo* ([1]), trasformano la (25) in una equazione della stessa forma in cui sono soltanto scambiate le coppie degli esponenti.

38. — Qualora, attenendoci al metodo del § **33**, volessimo ottenere gli sviluppi degli integrali canonici della (27) nell'intorno dei punti singolari 0, 1, ∞, troveremmo senza difficoltà che questi sviluppi si esprimono mediante serie ipergeometriche. Per l'intorno del punto $x = 0$, gli esponenti sono $1 - \gamma$ e 0, e gli integrali canonici corrispondenti sono

$$x^{1-\gamma}\,F(\alpha + 1 - \gamma\,,\ \beta + 1 - \gamma\,,\ 2 - \gamma\,,\ x),\quad F(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\,,\ x)$$

([1]) Detto *gruppo anarmonico* per le ben note relazioni fra i rapporti anarmonici cui dànno luogo 4 elementi in una forma geometrica di prima specie.

[che quest'ultima serie sia integrale della (27), si è già notato fino dal § 4, c)]. Per il punto $x = 1$ gli esponenti sono $\gamma - \alpha - \beta$ e 0, e gli integrali corrispondenti sono

$$(x - 1)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma\beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x),$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x),$$

infine per il punto $x = \infty$, gli esponenti sono α e β e gli integrali corrispondenti sono

$$x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha + \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, 1/x),$$

$$x^{-\beta} F(\beta, \beta + \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, 1/x).$$

Tornando ora alla serie di GAUSS, le cui proprietà sono riassunte nel Cap. I, ricordiamo che questa serie è convergente per $|x| < 1$ ed eventualmente per punti della circonferenza $|x| = 1$, non mai però per $|x| > 1$ se i valori dei parametri sono finiti. La funzione analitica rappresentata da questa serie ammette una continuazione analitica, che non cessa di soddisfare all'equazione (27) e ad essere pertanto funzione ipergeometrica; ma per sapere quale è il valore che la funzione assume quando la continuazione analitica è fatta secondo una linea determinata (non passante per i punti $0, 1, \infty$) è necessario conoscere ciò che si è chiamato al § 27 *gruppo* dell'equazione differenziale.

39. — La ricerca del gruppo dell'equazione (25) non presenta maggiori difficoltà che per l'equazione (27) e pertanto verrà fatta per la prima. Indicheremo con u, u', con v, v' e con w, w' le coppie di integrali canonici relative ai punti $0, 1, \infty$. Il gruppo dell'equazione sarà perfettamente determinato ove si conoscano le sostituzioni subite da u, u' per le tre linee semplici che partendo da un punto x_0 ($|x_0| < 1$) circondano uno solo dei punti $0, 1, \infty$, poichè ogni altro cammino chiuso si riconduce a combinazioni ed iterazioni di queste linee semplici. Indicheremo con A, B, C le sostituzioni relative a queste tre linee.

La sostituzione A è nota, poichè dopo un giro di x intorno a 0, le u, u' si mutano in $u e^{2\pi i \varrho_0}$, $u' e^{2\pi i \varrho'_0}$, come pure sono note le analoghe sostituzioni subite da v, v' per un giro intorno ad 1, e da w, w' per un giro intorno ad ∞.

Ponendo ora

$$\begin{cases} u = \alpha_{11}\, v + \alpha_{12}\, v', \\ u' = \alpha_{21}\, v + \alpha_{22}\, v', \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \beta_{11}\, w + \beta_{12}\, w', \\ u' = \beta_{21}\, w + \beta_{22}\, w', \end{cases}$$

o, simbolicamente, $(u) = \mathrm{S}\,(v)$, $(u) = \mathrm{S}'\,(w)$, è chiaro che se le sostituzioni S, S′ fossero note, se ne dedurrebbero immediatamente le A, B, C e quindi il gruppo richiesto dell'equazione (27).

Per determinare S ed S′, osserviamo che un giro in senso positivo intorno ad $x = 1$ equivale ad un giro in senso negativo intorno ad $x = \infty$ seguito da un giro negativo intorno ad $x = 0$, come risulta anche dalla relazione del § **31**, che nel nostro caso si scrive $\mathrm{ABC} = 1$.

Pertanto si avrà

$$\alpha_{11}\, e^{2\pi i \varrho_1}\, v + \alpha_{12}\, e^{2\pi i \varrho'_1}\, v' = e^{-2\pi i \varrho_0}\, (\beta_{11}\, e^{-2\pi i \varrho}\, w + \beta_{12}\, e^{-2\pi i \varrho'}\, w')\,,$$

e poichè

$$\alpha_{11}\, v + \alpha_{12}\, v' = \beta_{11}\, w + \beta_{12}\, w',$$

si ha, eliminando v',

$$\alpha_{11}\, (e^{2\pi i \varrho_1} - e^{2\pi i \varrho'_1})\, v = \beta_{11}\, (e^{-2\pi i(\varrho_0 + \varrho)} - e^{-2\pi i \varrho'_1})\, w +$$

$$+ \beta_{12}\, (e^{-2\pi i(\varrho_0 + \varrho')} - e^{-2\pi i \varrho'_1})\, w'.$$

Analogamente si trova

$$\alpha_{21}\, (e^{2\pi i \varrho_1} - e^{2\pi i \varrho'_1})\, v = \beta_{21}\, (e^{-2\pi i(\varrho'_0 + \varrho)} - e^{-2\pi i \varrho'_1})\, w +$$

$$+ \beta_{22}\, (e^{-2\pi i(\varrho'_0 + \varrho')} - e^{-2\pi i \varrho'_1})\, w'\,,$$

ma queste relazioni lineari fra v, w, w' non possono essere distinte, altrimenti se ne dedurrebbe $w = k\, w'$, il che non può essere; perciò i coefficienti delle precedenti relazioni devono essere proporzionali, e si ha:

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}} = \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}}\, \frac{e^{-2\pi i(\varrho_0 + \varrho)} - e^{-2\pi i \varrho'_1}}{e^{-2\pi i(\varrho'_0 + \varrho)} - e^{-2\pi i \varrho'_1}} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}}\, \frac{e^{-2\pi i(\varrho_0 + \varrho')} - e^{-2\pi i \varrho'_1}}{e^{-2\pi i(\varrho'_0 + \varrho')} - e^{-2\pi i \varrho'_1}}\,.$$

Analogamente si ottiene, eliminando v,

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} = \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}} \frac{e^{-2\pi i(\varrho_0+\varrho)} - e^{-2\pi i\varrho_1}}{e^{-2\pi i(\varrho_0'+\varrho)} - e^{-2\pi i\varrho_1}} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}} \frac{e^{-2\pi i(\varrho_0+\varrho')} - e^{-2\pi i\varrho_1}}{e^{-2\pi i(\varrho_0'+\varrho')} - e^{-2\pi i\varrho_1}},$$

e da queste equazioni si possono determinare i rapporti

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}, \quad \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}, \quad \frac{\beta_{11}}{\beta_{21}}, \quad \frac{\beta_{12}}{\beta_{22}}$$

in funzione di uno di essi, e poichè le u, u', v, v', w, w' sono determinate all'infuori di un moltiplicatore costante arbitrario, le sostituzioni S, S′ vengono così ad essere determinate.

Si noti che la determinazione dei rapporti precedenti rimane la stessa se gli esponenti $\varrho, \varrho', \ldots$ variano di numeri interi; ne risulta:

Le funzioni ipergeometriche i cui parametri differiscono per numeri interi ammettono il medesimo gruppo di sostituzioni.

40. — Vogliamo ora dimostrare che

Se tre equazioni della forma (25) *sono tali che gli esponenti, nei punti* $0, 1, \infty$, *differiscono per numeri interi, fra gli integrali di queste equazioni passa una relazione lineare a coefficienti razionali.*

Indichiamo, all'uopo, con u, u' gli integrali canonici della prima equazione relativi al punto $x = 0$, con v, v' quelli relativi al punto $x = 1$, con w, w' quelli relativi ad $x = \infty$; poi con $u_1, u_1', v_1, v_1', w_1, w_1'$ gli integrali analoghi per la seconda, con $u_2, u_2', v_2, v_2', w_2, w_2'$ gli integrali analoghi per la terza.

Formiamo poi la somma degli esponenti relativi al punto $x = 0$ per la prima, la seconda e la terza equazione, ed indichiamo con σ_0 la più piccola fra queste tre somme; così sia σ_1 la più piccola somma relativa ad $x = 1$, e σ la più piccola somma relativa ad $x = \infty$.

Basterà evidentemente dimostrare il teorema per un ramo di ciascun integrale generale, per esempio per u, u_1, u_2.

Considerando all'uopo il determinante $D = u_1' u_2 - u_2' u_1$, questo dà una funzione analitica che nell'intorno di $x = 0$ ha la forma $x^{\sigma_0} \mathfrak{P}(x)$. Esprimendo u, u' in funzione di v, v':

$$\begin{cases} u = \alpha_{11} v + \alpha_{12} v', \\ u' = \alpha_{21} v + \alpha_{22} v', \end{cases}$$

la stessa trasformazione varrà per u_1, u_1' ed u_2, u_2' in funzione di v_1, v_1' e v_2, v_2', poichè le tre equazioni hanno lo stesso gruppo; perciò nell'intorno di $x = 1$ la funzione D avrà la forma

$$(\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{21}\,\alpha_{12})\,(-x)^{\sigma_1}\,\mathfrak{P}_1\,(x-1)\,,$$

talchè la funzione

$$G = D\,x^{-\sigma_0}\,(x-1)^{-\sigma_1}$$

è regolare in tutto il piano, fuorchè per $x = \infty$: perciò per i principi della teoria delle funzioni, essa è una funzione intera, razionale o trascendente. Ma D per $x = \infty$ ha la forma $x^{-\sigma}\,\mathfrak{P}_2\,(1/x)$, onde

$$G = x^{-(\sigma_0+\sigma_1+\sigma)}\,\mathfrak{P}_3\,(1/x)\,;$$

ed essendo $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma$ finito, la G risulta razionale intera (e rimane così per altra via provato che $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma$ è un numero intero). Perciò

$$u_1'\,u_2 - u_2'\,u_1 = x^{\sigma_0}\,(x-1)^{\sigma_1}\,G\,.$$

Analogamente

$$u_2'\,u - u'\,u_2 = x^{\sigma_0}\,(x-1)^{\sigma_1}\,G_2, \quad u'\,u_1 - u\,u_1' = x_0^{\sigma_0}\,(x-1)^{\sigma_1}\,G_3,$$

essendo pure G_1, G_2 polinomi razionali interi. Risulta da ciò che il determinante identicamente nullo

$$\begin{vmatrix} u' & u_1' & u_2' \\ u' & u_1' & u_2' \\ u & u_1 & u_2 \end{vmatrix}$$

si può scrivere

$$G\,u' + G_1\,u_1' + G_2\,u_2' = 0\,,$$

c. d. d..

La relazione fra le funzioni contigue ipergeometriche è un caso speciale del teorema ora dimostrato (1).

---

(1) Cfr. RIEMANN, Werke, pag. 67.

CAPITOLO VI.

Una trasformazione funzionale. Sue applicazioni alla generalizzazione delle funzioni ipergeometriche secondo Pochhammer e secondo Goursat.

41. — In un'equazione differenziale lineare regolare

$$A_0 \varphi^{(n)} + A_1 \varphi^{(n-1)} + \dots + A_n \varphi = 0$$

il grado dei polinomi A_0, $A_1, \dots$, A_n va decrescendo ordinatamente di un'unità e perciò il grado di A_0 non può essere inferiore ad n. Se è superiore, ed uguale ad $n + p$, si può porre $\varphi = \psi^{(p)}$; l'equazione viene dell'ordine $n + p$ ed in essa il grado di ogni coefficiente è uguale all'indice della derivata che esso moltiplica. Pertanto, o l'equazione regolare è tale che in essa il coefficiente di $\varphi^{(h)}$ è del grado h, ed in questo caso la diremo *normale,* o si riconduce a questo caso mediante la posizione indicata.

Scriviamo l'equazione *normale* nella forma

$$B_n \varphi^{(n)} + B_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \dots + B_0 \varphi = 0 , \tag{28}$$

dove ogni polinomio B_h è del grado indicato dal proprio indice; il primo membro di questa equazione verrà detto *forma differenziale lineare normale* dell'ordine n, e su questa forma si definiscano le due seguenti operazioni. La prima, che verrà rappresentata con D, consiste nel dedurre dalla forma [che designeremo con $\Delta(\varphi)$ o semplicemente con Δ] la nuova forma

$$\mathrm{D}\Delta = B'_n \varphi^{(n-1)} + B'_{n-1} \varphi^{(n-2)} + \dots + B'_1 \varphi ,$$

dove B'_h è la derivata di B_h; questa forma è pure normale, ma dell'ordine $n - 1$; reiterando l'operazione D, si otterranno le nuove forme normali degli ordini $n - 2$, $n - 3, \dots$

$$\mathrm{D}^2\Delta = B''_n \varphi^{(n-2)} + B''_{n-1} \varphi^{(n-3)} + \dots + B''_2 \varphi ,$$

$$\mathrm{D}^3\Delta = B''_n \varphi^{(n-3)} + B''_{n-1} \varphi^{(n-4)} + \dots + B''_3 \varphi , \ \dots .$$

La seconda operazione, che verrà rappresentata con S_σ, è definita da

$$\mathrm{S}_\sigma \Delta = \Delta + \sigma \mathrm{D}\Delta + \binom{\sigma}{2} \mathrm{D}^2\Delta + \dots + \binom{\sigma}{n} \mathrm{D}^n\Delta,$$

dove $\binom{\sigma}{h}$ rappresenta, al solito, il coefficiente binomiale

$$\frac{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots h}.$$

È subito verificato che $\mathrm{S}_\sigma \Delta$ è una forma normale dell'ordine n, che si può anche scrivere

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_\sigma \Delta = B_n\,\varphi^{(n)} + \{B_{n-1} + \sigma B'_n\}\,\varphi^{(n-1)} + \\ + \left\{B_{n-2} + \sigma B'_{n-1} + \binom{\sigma}{2} B''_n\right\}\varphi^{(n-2)} + \dots + \\ + \left\{B_0 + \sigma B'_1 + \binom{\sigma}{2} B''_2 + \dots + \binom{\sigma}{n} B^{(n)}_n\right\}\varphi.\end{aligned}$$

Le operazioni così definite godono manifestamente entrambe della proprietà distributiva. Esse sono inoltre commutabili fra loro come si verifica facilmente. Infine un calcolo semplice, fondato sulla nota proprietà dei coefficienti binomiali, permette di dimostrare la relazione

$$\mathrm{S}_\sigma\, \mathrm{S}_{\sigma'} \Delta = \mathrm{S}_{\sigma+\sigma'} \Delta;$$

cosicchè nel simbolo operatorio S la quantità σ si comporta come un esponente. In particolare $\mathrm{S}_0 \Delta = \Delta$, o simbolicamente $\mathrm{S}_0 = 1$, e se una forma Δ_1 si deduce da Δ mediante l'operazione S_0, viceversa Δ si dedurrà da Δ_1 mediante l'operazione $\mathrm{S}_{-\sigma}$, o simbolicamente $\mathrm{S}_\sigma\, \mathrm{S}_{-\sigma} = 1$ (¹).

42. — Si consideri l'espressione, in cui σ è un numero qualunque non intero positivo o nullo,

$$\psi(x) = \int_{(\lambda)} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} \quad (^2), \tag{29}$$

(¹) V. la mia Nota « *Sulle forme differenziali lineari,* R. C. della R. Accademia dei Lincei, 8 maggio 1892 ».

(²) Per gli integrali di questa forma v. POCHHAMMER, Crelle, T. CIV. Cfr. un mio lavoro nelle Mem. dell'Acc. di Bologna, T. II, S. V, 1892.

dove l'integrazione è estesa ad una linea λ tale che il secondo membro abbia significato, e che sia ammissibile l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno. L'espressione

$$\int_{(\lambda)} \frac{B_1(t)\,\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}}$$

si potrà allora esprimere come segue.

Essendo identicamente

$$B_1(t) = B_1(x) + B_1'(t-x),$$

sarà

$$\int_{(\lambda)} \frac{B_1(t)\,\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} = B_1(x)\int_{(\lambda)} \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} + B_1'\int_{(\lambda)} \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma}};$$

ora per il primo di questi integrali si ha, derivando la (28) e poi integrando per parti,

$$\int_{(\lambda)} \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} = \psi'(x) + \left[\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{\sigma+1}}\right]_\lambda,$$

per il secondo, integrando per parti,

$$\int_{(\lambda)} \frac{\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma}} = \left[\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{\sigma}}\right]_\lambda + \sigma\int_{(\lambda)} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}};$$

talchè

$$\int_{(\lambda)} \frac{B_1(t)\,\varphi'(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} = B_1(x)\,\psi'(x) + \sigma B_1'\,\psi(x) + L_1 = \mathrm{S}_\sigma\, B_1(x)\,\psi'(x) + L_1,$$

essendo L_1 una espressione ai limiti dell'integrazione, contenente linearmente $\varphi(t)$.

Analogamente si trova

$$\int_{(\lambda)} \frac{B_2(t)\,\varphi''(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} = \mathrm{S}_\sigma\, B_2(x)\,\psi''(x) + L_2,$$

. . . .

$$\int_{(\lambda)} \frac{B_n(t)\,\varphi^{(n)}(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma+1}} = \mathrm{S}_\sigma\, B_n(x)\,\psi^{(n)}(x) + L_n,$$

dove L_h è una espressione ai limiti dell'integrazione, che contiene linearmente

$$\varphi(t)\,,\ \varphi'(t)\,,\dots,\ \varphi^{(h-1)}(t)\,.$$

Da queste, per essere l'operazione S distributiva, risulta

$$\int\limits_{(\lambda)} \frac{\Delta(\varphi)\,\mathrm{d}t}{(t-x)^{\sigma+1}} = \mathrm{S}_\sigma\,\Delta(\psi) + L\,, \tag{30}$$

dove L è un'espressione della stessa forma delle L_h, che contiene linearmente le $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(t)$ ai limiti della integrazione (1).

La linea λ d'integrazione sia scelta in modo che la parte L ai limiti sia nulla; ciò si può fare sia prendendo λ aperta e tale che $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(t)$ si annullino alle sue estremità, sia prendendo per λ una linea chiusa non contenente x nel suo interno e tale che, dopo percorsa e tornata la variabile al punto di partenza, $\varphi(t)$ e le sue $n-1$ prime derivate riprendano il medesimo valore. In tale ipotesi la (30) diviene

$$\int\limits_{(\lambda)} \frac{\Delta(\varphi)\,\mathrm{d}t}{(t-x)^{\sigma+1}} = \mathrm{S}_\sigma\,\Delta(\psi)\,, \tag{30'}$$

e si può enunciare la seguente proposizione:

Se φ è un integrale dell'equazione differenziale lineare $\Delta = 0$, l'espressione (29) *ci darà un integrale ψ dell'equazione trasformata $\mathrm{S}_\sigma\,\Delta = 0$, la linea λ essendo scelta in modo che per essa si annulli la parte* L *ai limiti. L'integrale ψ contiene lo stesso numero di costanti arbitrarie di φ, e sarà quindi l'integrale generale della $\mathrm{S}_\sigma\,\Delta = 0$ se φ è l'integrale generale di $\Delta = 0$.*

Possiamo aggiungere, ricordando la proprietà $\mathrm{S}_{\sigma+\sigma'} = \mathrm{S}_\sigma\,\mathrm{S}_{\sigma'}$, che

L'integrazione di una equazione $\mathrm{S}_\sigma\,\Delta = 0$ per un valore speciale di σ porta all'integrazione della equazione stessa per ogni altro valore di σ.

---

(1) Questa formula è dimostrata per il caso che σ non sia un numero intero positivo. Se σ è tale, si giunge alla medesima formula, ma il procedimento della dimostrazione è soggetto a lievi per quanto ovvie modificazioni.

43. — Qui si possono aggiungere le seguenti osservazioni:

a) La proprietà $S_\sigma\, S_{-\sigma} = 1$ permette subito d'invertire l'integrale definito (29) cioè di esprimere φ mediante un integrale contenente ψ sotto il segno.

b) Tutte le equazioni $S_\sigma\, \varDelta = 0$ sono regolari, normali, cogli stessi punti singolari. L'equazione determinante di $\varDelta = 0$ relativa ad un punto singolare essendo $f(\varrho) = 0$, si vede subito che l'equazione determinante di $S_\sigma\, \varDelta = 0$ relativa allo stesso punto è $f(\varrho + \sigma) = 0$.

c) Le equazioni $S_\sigma\, \varDelta = 0$ relative a diversi valori di σ differenti fra loro per numeri interi hanno eguale gruppo e perciò $n + 1$ integrali di simili equazioni sono legati da una relazione lineare a coefficienti razionali. (Si lascia al lettore la dimostrazione *in extenso* di questo teorema, dimostrazione perfettamente analoga a quella data al § 40.)

44. — Risulta dal teorema del § 42 che ogniqualvolta si saprà integrare una equazione $S_\sigma\, \varDelta = 0$ per un valore speciale σ_0 di σ, si potrà esprimere l'integrale dell'equazione per ogni altro valore di σ, mediante un integrale definito in cui figura, sotto il segno, l'integrale di $S_{\sigma_0}\, \varDelta = 0$. Potremo dunque dare tante applicazioni diverse di quel teorema quanti sono i casi in cui sapremo integrare l'equazione per un valore speciale di σ. In ciò che segue si daranno due importanti applicazioni di questo metodo; l'una, in questo e nei tre §§ seguenti, ci farà conoscere la teoria della generalizzazione dell'equazione ipergeometrica dovuta al POCHHAMMER (1); la seconda riguarda la generalizzazione che, in direzione diversa, il GOURSAT ha data dell'equazione ipergeometrica (2) ed è trattata nel § 40.

Nella prima di queste applicazioni, si farà l'ipotesi che una delle forme $S_\sigma\, \varDelta$ (e si può senza restrizione supporre che sia quella relativa a $\sigma = 0$, cioè $\varDelta$ stessa) si riduca ai suoi primi due termini. Porremo dunque

$$\varDelta = B_n\, \varphi^{(n)} + B_{n-1}\, \varphi^{(n-1)}$$

poi, integrando per parti la (28) $n - 1$ volte, supponendo sempre λ

(1) Crelle, T. LXXI. Cfr. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 1ère édit., T. III, pag. 241; GOURSAT, Acta Mathem., T. II.

(2) Annales de l'École Normale, S. II, T. III.

tale che sia nulla la parte ai limiti, verrà:

$$(30) \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sigma(\sigma-1)\dots(\sigma-n+1)} \int_{(\lambda)} \frac{\varphi^{(n-1)}(t)\,dt}{(t-x)^{\sigma-n+2}}.$$

Ponendo ora $\Delta = 0$, $\varphi^{(n-1)}$ sarà l'integrale di una equazione del primo ordine e la sua espressione si può dare esplicitamente; la (30) ci darà dunque l'espressione dell'integrale di $S_\sigma \Delta = 0$. Onde il seguente risultato:

Si può ottenere in forma d'integrale definito, l'integrale dell'equazione differenziale lineare di P o c h h a m m e r $S_\sigma \Delta = 0$, *o, sviluppando,*

$$(31) \quad B_n \psi^{(n)} + \{B_{n-1} + \sigma B_n'\} \psi^{(n-1)} + \left\{\sigma B_{n-1}' + \binom{\sigma}{2} B_n''\right\} \psi^{(n-2)} +$$

$$+ \dots + \left\{\binom{\sigma}{n-1} B_{n-1}^{(n-1)} + \binom{\sigma}{n} B_n^{(n)}\right\} \psi = 0.$$

Per completare questa trattazione ci rimane da dare esplicitamente la forma di ψ, da determinare le linee d'integrazioni λ soddisfacenti alle condizioni imposte, infine da indicare come si possa ottenere il *gruppo* dell'equazione (31).

45. — a) Abbiasi dunque l'equazione

$$B_n f' + B_{n-1} f = 0, \qquad f = \varphi^{(n-1)}$$

e si ponga

$$B_n = (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_n),$$

limitandoci per brevità al caso che l'equazione $B_n(t) = 0$ abbia le sue radici semplici [1]. Si ottiene, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ essendo costanti che si sanno determinare,

$$\frac{f'}{f} = -\frac{B_{n-1}}{B} = \frac{\alpha_1}{t-a_1} + \frac{\alpha_2}{t-a_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{t-a_n},$$

---

[1] Il caso che l'equazione $B = 0$ abbia radici multiple richiederebbe qualche maggiore particolare, ma non concetti diversi. Per la sua trattazione v. per es. JORDAN, *Cours d'Analyse*, T. III, pag. 241 e seguenti.

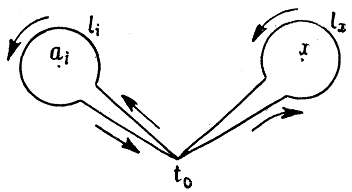
onde, essendo c una costante arbitraria,

$$f(t) = c\,(t - a_1)^{\alpha_1}\,(t - a_2)^{\alpha_2} \dots (t - a_n)^{\alpha_n},$$

talchè l'integrale della equazione (31) si pone sotto la forma

$$\psi(x) = c \int_{(\lambda)} \frac{(t - a_1)^{\alpha_1}\,(t - a_2)^{\alpha_2} \dots (t - a_n)^{\alpha_n}}{(t - x)^{\sigma - n + 2}}\, dt\,. \tag{32}$$

b) Dobbiamo ora determinare la linea λ d'integrazione, la quale deve soddisfare alle condizioni enunciate al § 42. A tale oggetto, indichiamo con l_i, $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, una linea che partendo da un punto t_0 qualunque del piano della variabile complessa t,



vada in prossimità del punto a_i, circondi questo punto mantenendosi vicina ad esso e ritorni al punto di partenza t_0, senza includere alcuno degli altri punti $a_1, a_2, \dots$ nè il punto x e senza passare per alcuno di questi punti, indichiamo poi con l_x una linea analoga che partendo da t_0, vi ritorni dopo avere circondato il solo punto x. Queste linee s'intendono percorse nel senso che diremo positivo, cioè in modo da lasciare a sinistra il punto che esse includono; indicheremo con $-l_i$, $-l_x$ le medesime linee percorse in senso contrario. Infine $l_i + l_j$ indicherà la linea formata da l_i ed l_j percorse successivamente; si osservi qui che, sebbene venga usato il segno dell'addizione, non si potrà riguardare come valevole la legge commutativa.

Ciò posto, si può assumere come linea λ soddisfacente alle condizioni del § 42, la linea

$$l_{hx} = l_h + l_x - l_h - l_x\,.$$

Infatti, dopo percorso l_h, la funzione sotto il segno nella (32) viene moltiplicata per $e^{2\pi i \alpha_h}$; dopo percorsa $l_h + l_x$, si acquista il fattore

$e^{-2\pi i\sigma}$, dopo $-l_h$, il fattore $e^{-2\pi i\alpha_h}$, infine dopo $-l_x$ il fattore $e^{2\pi i\sigma}$, cosicchè la funzione riacquista il valore primitivo. Lo stesso essendo di tutte le sue derivate, e l'integrale definito avendo inoltre un significato ed essendo ammissibili manifestamente l'integrazione per parti e la derivazione sotto il segno, sono soddisfatte le condizioni richieste per la linea λ. Si può anche togliere il dubbio che l'integrale (32), esteso alla linea l_{hx} sia identicamente nullo, all'infuori di casi particolari; infatti indicando con I_h, I_x gli integrali estesi ad l_h, l_x quando da t_0 si parte con un determinato valore della funzione sotto il segno, si trova facilmente

$$\int_{l_{hx}} \dots = (1 - e^{-2\pi i\sigma})\, I_h - (1 - e^{2\pi i\alpha_h})\, I_x \,.$$

Di tali linee l_{hx} se ne potranno costruire n, $(h = 1, 2, \dots, n)$, e fra gli integrali corrispondenti non passa alcuna relazione lineare, poichè ne risulterebbe una dipendenza lineare fra

$$I_1, I_2, \dots, I_n, I_x$$

contro l'arbitrarietà delle radici di $B_n(t)$.

È chiaro che si potrebbe soddisfare alle condizioni imposte alla linea λ anche colla linea

$$l_{hk} = l_h + l_k - l_h - l_k$$

e così l'integrale esteso l_{hk} sarebbe un nuovo integrale dell'equazione, il quale deve perciò essere in relazione lineare coi precedenti. Infatti, si è visto che

$$\int_{l_{hx}} \dots = (1 - e^{-2\pi i\sigma})\, I_h - (1 - e^{2\pi i\alpha_h})\, I_x \,;$$

analogamente

$$\int_{l_{kx}} \dots = (1 - e^{-2\pi i\sigma})\, I_k - (1 - e^{2\pi i\alpha_h})\, I_x \,,$$

$$\int_{l_{hk}} \dots = (1 - e^{2\pi i\alpha_k})\, I_h - (1 - e^{2\pi i\alpha_h})\, I_k \,,$$

dai quali risulta identicamente

$$(1-e^{2\pi i \alpha_h})\int_{l_h}\ldots = (1-e^{2\pi i \alpha_h})\int_{l_{kx}}\ldots + (1-e^{-2\pi i \sigma})\int_{l_{hk}}\ldots .$$

Sotto la condizione che gli integrali abbiano significato, si possono sostituire alle linee d'integrazione indicate, linee (anche rette) congiungenti a_h con a_k, od a_h con x, od a_h con ∞, o x con ∞; linee che possono presentare vantaggio pratico, ma teoricamente non ne hanno alcuno su quelle considerate in generale.

46. — Rimane ora da indicare come si possa ottenere il *gruppo* dell'equazione (31). Basterà perciò conoscere il modo di trasformarsi degli integrali estesi alle linee l_{hx} quando la x, considerata

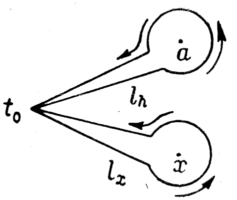


fig. 1.

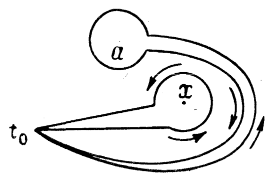


fig. 2.

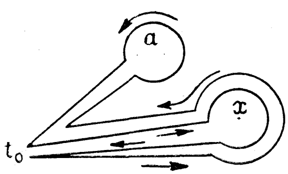


fig. 3.

ora come variabile, ruota intorno ad uno dei punti singolari. Ma la linea l_{hx} essendo formata dalle linee semplici l_h, l_x, basterà vedere come queste si debbono trasformare affinchè x possa girare intorno ad a_h senza che vengano meno le eccezioni poste per le linee d'integrazione. È chiaro che questo giro sarà possibile se ad l_h della fig. 1 sostituiamo la l'_h della fig. 2, quindi ad l_x la l'_x della fig. 4.

Ma queste linee si possono ricondurre alle primitive notando che, per la fig. 3,

$$l'_h = l_x + l_h - l_x \, ,$$

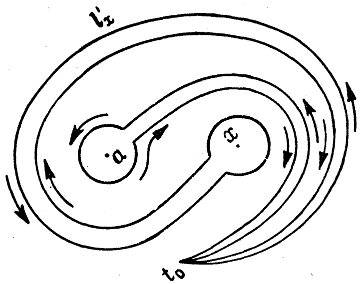


fig. 4

$$- l'_h = l_x - l_h - l_x \, ,$$

ed analogamente

$$l'_x = l'_h + l_h - l'_h \, ,$$

onde, sostituendo,

$$l'_x = l_x + l_h + l_x - l_h - l_x \, ,$$

relazione che permette di trovare immediatamente la sostituzione che subiscono gli integrali estesi a l_{hx} quando x ruota intorno ad a_h.

47. — Su gli integrali delle equazioni (31) si possono ancora aggiungere le seguenti osservazioni :

a) Supposto che la linea λ non passi per il punto a_h, si considerino i valori di x per i quali è

$$|x - a_h| < |t - a_h| \, ,$$

t essendo un punto qualunque della linea d'integrazione. Per tali valori di x, il binomio $(t - x)^{-\sigma+n-1}$ che figura sotto il segno nella (32) si può sviluppare in serie di potenze di $x - a_h$, e sostituendo nella (32) ed integrando termine a termine, si ottiene per $\psi(x)$ uno sviluppo in serie di potenze di $x - a_h$ i cui coefficienti, all'infuori di fattori numerici, sono integrali definiti della stessa forma di (32) ma con un fattore binomio di meno. Chiamata, con POCHHAMMER, la $\psi(x)$ funzione ipergeometrica d'ordine r, collo stesso autore si ha:

I coefficienti degli sviluppi in serie di una funzione ipergeometrica d'ordine r sono funzioni ipergeometriche d'ordine $r-1$.

b) Al § 43 si è detto come fra $n+1$ integrali (32) in cui i valori di σ differiscono per numeri interi, passi una relazione lineare a cofficienti razionali. Lo stesso avviene se in luogo di σ si considera un altro qualunque degli esponenti dei binomi di (32), per es. α_h. Ciò si può anche verificare con un calcolo diretto; infatti, considerando α_h come variabile, la ψ soddisfa, rispetto a questa, ad una equazione differenziale lineare d'ordine n analoga alla (31), poichè a_h entra sotto al segno nel modo stesso di x. Ora si ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_h} = -\alpha_h\,\psi(\alpha_h - 1),$$

onde

$$\frac{\partial^k\psi}{\partial a_h^k} = (-1)^k \alpha_h^k\,\psi(\alpha_h - k);$$

sostituendo nella equazione differenziale in discorso, questa si trasforma in una equazione ricorrente, a cofficienti razionali, fra

$$\psi(\alpha_h),\ \psi(\alpha_h - 1), \dots, \psi(\alpha_h - n).$$

c) Facendo l'applicazione delle cose dette nei §§ precedenti al caso di $n = 2$, e ponendo $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, il che non costituisce una restrizione, la $\varDelta$ diviene

$$(t^2 - t)\,\varphi'' + (a\,t + b)\,\varphi' = 0\,,$$

da cui

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{b}{t} - \frac{a+b}{t-1}, \quad \varphi' = c\,t^b\,(t-1)^{-(a+b)}.$$

L'equazione (31) si riduce con ciò a

$$(t^2 - t)\,\psi'' + \{a\,t + b + (2\,t - 1)\,\sigma\}\,\psi' + \{a\,\sigma + \sigma(\sigma - 1)\}\,\psi = 0\,,$$

la quale è integrata da

$$\psi = c\int_{(\lambda)} t^b\,(t-1)^{-(a+b)}(t-x)^{-\sigma}dt\,,$$

la linea λ essendo una linea chiusa che circonda due volte i punti x e 0 e i punti x ed 1, e potendosi ridurre, se gli esponenti hanno la loro parte reale maggiore di $-t$, alla linea che congiunge 0 con x o con 1, 1 con x, ed anche uno di questi punti con ∞ se la somma degli esponenti ha la parte reale minore d'uno. Basta porre

$$a = \beta - \alpha + 1\,, \quad b = \alpha - \gamma\,, \quad \sigma = \alpha$$

per ricondurre l'equazione differenziale alla forma dell'equazione ipergeometrica, la quale è integrata da

$$\psi(x) = c \int_{(\lambda)} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{\gamma+\beta-1} (t-x)^{-\alpha}\, dt$$

che, ponendo $t = 1/n$, si riduce all'integrale definito citato al § 5.

48. — L'equazione (31) che abbiamo studiata presenta una prima generalizzazione dell'equazione differenziale ipergeometrica, conosciuta sotto il nome di generalizzazione del POCHHAMMER. Un'altra generalizzazione, dovuta al GOURSAT [1], è offerta da un'equazione regolare di ordine n, avente i soli punti singolari $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$, della forma

$$(33) \qquad (x^n - x^{n-1})\, \psi^{(n)} + (a_{n-1}\, x^{n-1} + b_{n-1}\, x^{n-2})\, \psi^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ (a_1\, x + b_1)\, \psi' + a_0\, \psi = 0\,.$$

È facile calcolare le equazioni determinanti relative ai tre punti singolari, e si trova, rispettivamente,

per $x = 0$:

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+1) - b_{n-1}\,\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2) -$$
$$- b_{n-2}\,\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+3) - \ldots - b_1\,\varrho = 0\,,$$

per $x = 1$:

$$\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-n+2)\,\{\varrho - n + 1 + a_1 + b_1\} = 0\,,$$

---

[1] Annales de l'École Normale, loc. cit. .

per $x = \infty$:

$$\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+1)+a_{n-1}\varrho(\varrho-1)\dots(\varrho-n+2)+\dots+a_1\varrho+a_0=0;$$

vi è dunque necessariamente un integrale senza singolarità nell'intorno di $x = 0$, $n-1$ integrali senza singolarità nell'intorno di $x = 1$, nessuno (a meno di valori speciali dei coefficienti) nell'intorno di $x = \infty$.

Cercando i coefficienti degli sviluppi in serie degli integrali nell'intorno dei punti $0, 1, \infty$ si trova senza difficoltà:

Il rapporto fra un coefficiente ed il precedente è una funzione razionale fratta dell'indice, il grado dei termini della frazione essendo n, come è 2 per la serie di Gauss. Reciprocamente, una serie di potenze in cui il rapporto fra un coefficiente ed il precedente è una funzione razionale dell'indice, soddisfa ad un'equazione differenziale di Goursat (1).

49. — Una delle osservazioni più notevoli che si siano fatte sulla equazione di GOURSAT, è quella che i suoi integrali si possono presentare sotto forma d'integrali definiti multipli (2). Nel presente § ci proponiamo di ottenere questo risultato fondandoci sulla medesima osservazione che ci ha servito per la generalizzazione precedente; mostrando cioè come, integrata che sia un'equazione regolare $\varDelta = 0$, si integrano immediatamente mediante l'espressione (29) tutte le equazioni comprese nella notazione $S_\sigma \varDelta = 0$ (3).

Applicando infatti all'equazione (33) la trasformazione S_σ, si ottiene un'equazione in φ la cui forma è precisamente la stessa dell'equazione primitiva, ma che contiene razionalmente nei suoi coefficienti la quantità σ. Disponendo allora di σ in modo che si annulli il coefficiente dell'ultimo termine, poi ponendo

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

viene da integrare un'equazione della forma

$$(34)\quad (x^n - x^{n-1})\,\theta^{(n-1)} + (a'_{n-1}x^{n-1} + b'_{n-1}x^{n-2})\,\theta^{(n-2)} + \dots + (a'_1 x + b'_1)\theta = 0.$$

(1) GOURSAT, loc. cit..

(2) POCHHAMMER, Crelle, T. CII.

(3) Cfr. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, maggio 1892.

Da questa, facendo

$$\theta = x^{\lambda}\,\theta_1$$

e dividendo per x^{λ} l'equazione che ne risulta, si ottiene un'equazione della stessa forma (34):

$$(x^n - x^{n-1})\,\theta_1^{(n-1)} + (a''_{n-1}\,x^{n-1} + b''_{n-1}\,x^{n-2})\,\theta_1^{(n-2)} + \ldots + (a''_1 x + b''_1)\,\theta_1 = 0,$$

ma i cui coefficienti contengono razionalmente λ. Disponendo allora di λ in modo che b''_1 risulti uguale a zero, poi dividendo l'equazione per x, si ha un'equazione della forma primitiva (33), ma il cui ordine è abbassato di un'unità. Applicando nuovamente a questa il medesimo procedimento, e così via, si giunge infine ad un'equazione di secondo ordine, che è la solita equazione ipergeometrica ed il cui integrale si può porre sotto forma d'integrale definito, talchè l'integrale della (33) si può porre sotto forma d'integrale definito $(n-2)^{\text{uplo}}$.

CAPITOLO VII.

Equazioni ricorrenti a coefficienti razionali e varie loro applicazioni. Le funzioni sferiche.

50. — Nel presente Capitolo ci proponiamo di studiare le proprietà degli integrali delle equazioni ricorrenti del secondo ordine, i cui coefficienti sono funzioni razionali dell'indice. Tale studio, che si presenta come ovvia applicazione delle cose esposte nei precedenti Capitoli, offre un interesse speciale poichè se ne deducono con facilità le proprietà dei sistemi ricorrenti più noti e di uso più frequente, come le funzioni sferiche, i polinomi di JACOBI, ecc., specialmente per quanto si riferisce alle condizioni di sviluppabilità di una funzione analitica data in serie ordinata secondo le funzioni di tali sistemi. Limitiamo la trattazione al caso delle equazioni ricorrenti del secondo ordine, perchè di tale ordine sono i sistemi che si presentano nelle ordinarie applicazioni, ma l'estensione ai sistemi di ordine superiore non presenta alcuna difficoltà (1).

---

(1) V. la mia Memoria « *Sur la génération des systèmes récurrents etc.,* Acta Mathematica, T. XVI, 1892 ».

Considereremo l'equazione ricorrente (o alle differenze) del secondo ordine

$$a(n) f_{n+2} + b(n) f_{n+1} + c(n) f_n = 0 \tag{35}$$

dove $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ sono polinomi razionali interi dello stesso grado m rispetto all'indice n; sostituendo in questi polinomi alle potenze i fattoriali [1], e designando $h(h-1) \dots (h-k+1)$ con $(h)_k$, scriveremo

$$a(n) = a_m (n+2)_m + a_{m-1}(n+2)_{m-1} + \dots + a_1 (n+2)_1 + a_0 ,$$

$$b(n) = b_m (n+1)_m + b_{m-1}(n+1)_{m-1} + \dots + b_1 (n+1)_1 + b_0 ,$$

$$c(n) = c_m (n)_m \qquad + c_{m-1}(n)_{m-1} \qquad + \dots + c_1 (n)_1 \qquad + c_0 ,$$

dove $a_m, a_{m-1}, \dots, a_0, b_m, \dots, b_0, c_m, \dots, c_0$ sono costanti rispetto ad n, ed a_m, c_m si suppongono differenti da zero.

Accanto a questa equazione considereremo la seguente forma differenziale lineare:

$$\Delta \varphi = (a_m + b_m t + c_m t^2) t^m \varphi^{(m)} +$$

$$+ (a_{m-1} + b_{m-1} t + c_{m-1} t^2) t^{m-1} \varphi^{(m-1)} + \dots + (a_0 + b_0 t + c_0 t^2) \varphi ,$$

e l'equazione non omogenea

$$\Delta \varphi = t^\mu (h + k t) , \tag{36}$$

dove μ è un numero intero positivo per ora indeterminato, ed h e k due costanti.

L'equazione $\Delta \varphi = 0$ è una equazione omogenea regolare, i cui punti singolari sono $t = 0$, $t = \infty$, e le radici α, β della equazione di secondo grado

$$a_m + b_m t + c_m t^2 = 0 ; \tag{37}$$

in quanto all'equazione (36), il suo integrale generale si ottiene aggiungendo ad uno dei suoi integrali particolari l'integrale generale della $\Delta \varphi = 0$.

---

(1) V. per es. CAPELLI, *L'Analisi algebrica ecc.*, Giornale di Matematiche di BATTAGLINI, T. XXXI (§ VII, 3).

Ora, l'equazione (36) ammette un integrale particolare, ed in generale uno solo, sviluppabile nell'intorno del punto $t=0$ in serie di potenze intere e positive di t. Scrivendo questo integrale nella forma

$$\varphi(t)=p_0+p_1\,t+p_2\,t^2+\dots+p_n\,t^n+\dots\,, \tag{38}$$

si trova immediatamente che i coefficienti $p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}$ sono nulli, mentre per gli altri valgono le equazioni:

$$\begin{cases} a(\mu-2)\,p_\mu=h\,, \\ a(\mu-1)_{\mu+1}+b(\mu-1)\,p_\mu=k\,, \end{cases} \tag{39}$$

$$a(n)\,p_{n+2}+b(n)\,p_{n+1}+c(n)\,p_n=0\,, \qquad (n=\mu+1, \mu+2, \dots)\,.$$

Il sistema dei coefficienti p_n della (38) è dunque un integrale della equazione ricorrente data (35), determinato univocamente dalle condizioni (39), cioè dai coefficienti h e k.

51. — È facile, mediante il teorema di POINCARÉ dato al § 16, riconoscere quale sia il raggio del cerchio di convergenza della serie (38). Infatti, questo raggio è l'inverso del valore assoluto del limite (se esiste) del rapporto p_{n+1}/p_n per $n=\infty$; ora, poichè si ha

$$\lim_{n=\infty}\frac{b(n)}{a(n)}=\frac{b_m}{a_m}\,, \qquad \lim_{n=\infty}\frac{c(n)}{a(n)}=\frac{c_m}{a_m}\,,$$

il limite di p_{n+1}/p_n esisterà e sarà, per il citato teorema, una delle radici della equazione [reciproca della (37)]

$$a_m\,X^2+b_m\,X+c_m=0\,,$$

ed in generale quella radice il cui modulo è maggiore. Supponendo dunque $|\alpha|<|\beta|$, si avrà

$$\text{generalmente } \lim_{n=\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{1}{\alpha}\,, \qquad \text{eccezionalmente } \lim_{n=\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{1}{\beta}\,.$$

Ciò è in relazione coll'osservazione che i punti singolari dell'integrale della (36) sono $t=\alpha$, $t=\beta$, ed uno di questi punti (in generale α) deve trovarsi sulla circonferenza che limita il cerchio di convergenza della (38).

52. — Ricordiamo ora come dai principi dei Cap. II e III risulti:

a) *Se due integrali* p_n *e* p'_n *dell'equazione ricorrente* (36) *sono tali che il limite del rapporto* p'_n/p_n *sia nullo per* $n = \infty$, p'_n *sarà l'integrale distinto dell'equazione medesima, e la frazione continua che essa definisce sarà convergente.*

b) *Se si giunge a trovare due integrali dell'equazione* (35) *tali che per l'uno,* p_n*, sia* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\alpha}$ *e per l'altro,* p'_n*, sia* $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p'_{n+1}}{p'_n} = \frac{1}{\beta}$, *il limite di* p'_n/p_n *sarà nullo e* p'_n *sarà l'integrale distinto.*

Ciò posto, e supposto trovato l'integrale distinto p'_n, di cui a b), la determinazione del valore σ della frazione continua definita dalla (35) si potrà fare facilmente col metodo del § 15. Posto infatti per brevità

$$-\frac{b\,(n)}{a\,(n)} = r_n\,, \qquad -\frac{c\,(n)}{a\,(n)} = s_n\,,$$

l'equazione (36) si scrive

$$f_{n+2} = r_n f_{n+1} + s_n f_n\,;$$

essa è soddisfatta dai numeratori A_n e dai denominatori B_n delle ridotte della frazione continua

$$(40) \quad \cfrac{s_\mu}{r_\mu + \cfrac{s_{\mu+1}}{r_{\mu+1} + \cfrac{s_{\mu+2}}{r_{\mu+2} + \ddots}}} \qquad \text{ovvero} \qquad \cfrac{c\,(\mu)}{b\,(\mu) - \cfrac{a(\mu)\,c(\mu+1)}{b(\mu+1) - \cfrac{a(\mu+1)c(\mu+2)}{b\,(\mu+2) - \ddots}}}$$

per i quali è posto

$$A_\mu = 1\,, \quad A_{\mu+1} = 0\,, \quad B_\mu = 0\,, \quad B_{\mu+1} = 1\,.$$

Si ha allora

$$p'_n = p'_\mu\, A_n + p'_{\mu+1}\, B_n\,,$$

dove, supposto p'_μ diverso da zero (che se fosse tale, basterebbe cambiare μ in $\mu + 1$, ecc.), diviso per B_n, e preso il limite per $n = \infty$, viene

$$\sigma = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = -\frac{p'_{\mu+1}}{p'_\mu}\,.$$

53. — Ora non ci rimane altro che trovare l'integrale distinto p'_n della (35) o, ciò che è lo stesso, il sistema di coefficienti di uno sviluppo in serie $\sum_{n=\mu}^{\infty} p'_n t_n$ che soddisfi alla (36) e converga in un cerchio di centro $t=0$ e raggio $|\beta|$; il rapporto del secondo di questi coefficienti al primo, preso con segno cambiato, darà il valore della frazione continua definita da (35). Questo sviluppo si ottiene col metodo che segue.

Descriviamo nel piano t una linea indefinita λ la quale, partendo dall'infinito, vi ritorni nella medesima direzione dopo avere girato intorno al punto β, senza che questa linea passi per il punto 0 nè per il punto α e senza che essa contenga nel suo interno (regione in cui si trova β) l'uno o l'altro di questi punti. Vi è un solo integrale dell'equazione $\Delta\varphi = 0$ il quale, per un giro della variabile intorno al punto β, si riproduce moltiplicato per una costante: indichiamo questo integrale con $U(t)$ e osserviamo che, facendone la continuazione analitica lungo la linea λ, per $t=\infty$ esso diviene infinito di ordine necessariamente finito: sia τ la parte reale di questo ordine d'infinito. Infine, determiniamo l'intero μ, fin qui indeterminato, per modo che sia

$$\tau - \mu + 2 < 0 .$$

Con queste posizioni, l'integrale definito

$$\varphi_1(z) = z^\mu \int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,\mathrm{d}t}{t^\mu(t-z)}$$

avrà un significato per ogni valore di z esterno alla linea λ; ma un calcolo analogo a quello fatto al § **42** (1) permette senza difficoltà di dimostrare che $\varphi_1(z)$ soddisfa ad una equazione

$$\Delta\varphi_1 = z^\mu(h + kz)$$

della stessa forma (36), dove

$$h = -c(\mu-2)\int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,\mathrm{d}t}{t^{\mu-1}} - b(\mu-2)\int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,\mathrm{d}t}{t^\mu},$$

$$k = -c(\mu-1)\int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,\mathrm{d}t}{t^\mu},$$

(1) Per lo sviluppo del calcolo vedasi la mia citata Memoria in Acta Mathematica (T. XVI, §§ 5-9).

dove gli integrali definiti hanno ambedue significato per l'ipotesi fatta su μ.

Ora l'integrale $\varphi_1(z)$ può svilupparsi in serie di potenze di z:

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} C_n z^n, \qquad C_n = \int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,dt}{t^{\mu+n+1}}, \tag{41}$$

convergente per tutti i valori di $|z| < |t|$; ma siccome la linea λ può essere presa prossima a β quanto si vuole, così il cerchio di convergenza della (41) ha per centro 0 e per raggio $|\beta|$. Il sistema C_n è dunque l'integrale distinto della (35), come dovevasi trovare.

Si noti che gli integrali definiti che figurano nelle espressioni di h e k si possono rappresentare con $C_{\mu-2}$ e $C_{\mu-1}$; sostituendo i valori di h e k nelle (39), esse prendono la forma stessa dell'equazione (35) per i valori $n = \mu - 2$, $n = \mu - 1$.

Riassumendo:

Data l'equazione ricorrente (35), *i cui coefficienti sono polinomi razionali interi dello stesso grado in* n, *il sistema* C_n *dato dalla formula* (41) *ne è l'integrale distinto. Formando poi la frazione continua* (40) *i cui numeratori e denominatori soddisfano alla* (35), *essa è convergente ed il suo valore è dato dal rapporto* $-\,C_{\mu+1}/C_\mu$ (1).

Si osservi che negli integrali definiti precedenti alla linea d'integrazione λ si può sostituire una linea che vada da β all'infinito, quando la funzione sotto il segno è, per $t = \beta$, infinita di un ordine la cui parte reale sia minore di 1. Si possono sostituire allora agli integrali $\int_{(\lambda)} \ldots$ gli integrali $\int_{\beta}^{\infty} \ldots$, i quali non ne differiscono che per un fattore costante.

54. — Il risultato precedente, cioè il metodo per esprimere il valore di ogni frazione continua della forma (40) come rapporto di due integrali definiti (2), racchiude come caso particolare la nota formula di Gauss (3) che dà lo sviluppo in frazione continua del

---

(1) Resterebbe da considerare la convergenza della frazione continua e la ricerca del suo valore nel caso in cui $a_m = 0$ ed in quello in cui $|\alpha| = |\beta|$: lasciamo la ricerca non difficile al lettore.

(2) V. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 21 giugno 1891.

(3) Werke, Bd. III, pag. 134. Cfr. Heine, *Handbuch der Kugelfunct.*, Bd. I, pag. 269 e 280.

rapporto di due funzioni ipergeometriche. Per ottenere questa formula, basta ridurre la forma $\Delta\varphi$ al primo ordine, supponendo nulle tutte le a_h, b_h, c_h dall'indice $h = m$ fino ad $h = 2$ inclusi. In tal caso la frazione continua (40) prende la forma

$$\cfrac{c_1\mu + c_0}{b_1(\mu+1) + b_0 - \cfrac{\{a_1(\mu+2)+a_0\}\{c_1(\mu+1)+c_0\}}{b_1(\mu+2) + b_0 - \cfrac{\{a_1(\mu+2)+a_0\}\{c_1(\mu+2)+c_0\}}{b_1(\mu+3)+b_0 - \ldots}}},$$

l'equazione differenziale $\Delta\varphi = 0$ diviene

$$(a_1 + b_1 t + c_1 t^2)\, t\, \varphi' + (a_0 + b_0 t + c_0 t^2)\, \varphi = 0\,,$$

il cui integrale è della forma $t^\xi (t-\alpha)^\eta (t-\beta)^\zeta$, ed il valore della frazione continua è

$$-\int\limits_{(\lambda)} t^{\xi-\mu-1}(t-\alpha)^\eta (t-\beta)^\zeta\, dt \Big/ \int\limits_{(\lambda)} t^{\xi-\mu-2}(t-\alpha)^\eta (t-\beta)^\zeta\, dt\,,$$

facilmente esprimibile [§ 47, c)] mediante quoziente di due serie ipergeometriche.

55. — Nei §§ precedenti i coefficienti $a(n), b(n), c(n)$ dell'equazione (35) si supponevano dipendenti dal solo indice n. Supponiamo ora che $b(n)$ contenga linearmente un parametro x, e sia

$$b(n) = b'(n)\, x + b''(n)$$

con

$$b'(n) = b'_m (n+1)_m + b'_m \quad (n+1)_{m-1} + \ldots + b'_0\,,$$

$$b''(n) = b''_m (n+1)_m + b''_{m-1} (n+1)_{m-1} + \ldots + b''_0\,;$$

cosicchè l'equazione che considereremo sarà

$$(42) \qquad a(n) f_{n+2} + \{b'(n)\, x + b''(n)\} f_{n+1} + c(n) f_n = 0\,.$$

Gli integrali dell'equazione (42) saranno funzioni di x, potremo considerare in particolare l'integrale $B_n(x)$ definito dalle condizioni iniziali $B_\mu(x) = 0$, $B_{\mu+1}(x) = 1$, e che sarà costituito da un sistema di polinomi razionali interi in x di grado ordinatamente crescente di un'unità; precisamente $B_n(x)$ è del grado $n - \mu - 1$.

Come nel § 50, all'equazione (35) si può fare corrispondere la forma differenziale lineare $\Delta\varphi$, ed i punti singolari della $\Delta\varphi = 0$ sono le radici della equazione

$$a_m + (b'_m x + b''_m) X + c_m X^2 = 0 ;$$

siano $\alpha(x)$, $\beta(x)$ le radici di questa equazione, e si supponga $|\alpha(x)| < |\beta(x)|$. Ogni integrale f_n dell'equazione ricorrente (42), ad eccezione dell'integrale distinto, è tale che

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1}{\alpha(x)} ;$$

in particolare ciò avverrà ordinariamente per l'integrale $B_n(x)$ [qualora eccezionalmente $B_n(x)$ coincidesse coll'integrale distinto, si sostituirebbe a $B_n(x)$ un altro integrale, per es. quello A_n definito da $A_\mu = 1, A_{\mu+1} = 0$].

L'equazione (42) appartiene al tipo dell'equazione (5) studiata nel § 21 ; accanto ad essa considereremo, come in quel §, la sua equazione *inversa*

$$(43) \qquad a(n-1)f_n + \{b'(n)z + b''(n)\}f_{n+1} + c(n+1)f_{n+2} = 0 .$$

Anche questa è della forma stessa della (35): ad essa pure corrisponderà pertanto una forma differenziale lineare $\Delta_1\varphi$, e l'equazione $\Delta_1\varphi = 0$ avrà per punti singolari, oltre a 0 e ∞, le radici dell'equazione

$$c_m + (b'_m z + b''_m) X + a_m X^2 = 0 ,$$

le quali sono $1/\alpha(z)$, $1/\beta(z)$. La teoria stabilita nei §§ 52 e seguenti c'insegna a determinare l'integrale distinto dell'equazione (43); indicando con $S_n(z)$, sarà

$$\lim_{n=\infty} \frac{S_{n+1}(z)}{S_n(z)} = \alpha(z) ,$$

e per il valore $n = \mu - 1$ l'equazione (43) relativa ad S_n dà

$$c(\mu) S_{\mu+1} + \{b'(\mu-1)z + b''(\mu-1)\} S_\mu = k ,$$

dove la determinazione di k risulta da quanto si è imparato al § 53.

Riprendiamo ora lo sviluppo (7) dato al § **21** (in cui mutiamo n in $n+\mu$):

$$\frac{1}{k}\sum_{n=\mu+1}^{\infty} b'(n-1)\, B_n(x)\, S_n(z)\;;$$

preso x in modo che sia $|\alpha(x)| > \varrho + \varepsilon$, e z in modo che sia $|\alpha(z)| < \varrho - \varepsilon$, essendo ϱ una quantità positiva arbitraria ed $\varepsilon < \varrho$ una quantità positiva piccola a piacere; lo sviluppo risulterà convergente assolutamente ed in egual grado, e quindi ripetendo su di esso il calcolo formale fatto al § **21**, ne verrà che la somma di esso sviluppo sarà $1/(z-x)$, e così si avrà

$$(7')\qquad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{k}\sum_{n=\mu+1}^{\infty} b'(n-1)\, B_n(x)\, S_n(z)$$

sotto la condizione $|\alpha(x)| > |\alpha(z)|$.

56. — Indichiamo con Γ_ϱ il luogo dei punti del piano x per i quali si ha $|\alpha(x)| = \varrho$. Questo luogo sarà in generale una curva che separerà la regione E'_ϱ del piano in cui è $|\alpha(x)| < \varrho$ da quella E_ϱ in cui è $|\alpha(x)| > \varrho$; è chiaro che non si può passare dall'una all'altra senza attraversare Γ_ϱ. Le curve Γ_ϱ limitano le aree di convergenza delle serie di funzioni $B_n(x)$ od $S_n(x)$. Due curve Γ_ϱ, Γ_{ϱ_1} non possono tagliarsi, e Γ_{ϱ_1}, se è $\varrho_1 < \varrho$, sarà tutta in E'_ϱ.

57. — Sia ora $f(x)$ una funzione analitica di x, data ad un valore nell'interno del campo E_ϱ; sarà, per il noto teorema di CAUCHY,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma_{\varrho_1})} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

essendo z preso fuori del campo E_ϱ, cioè nel campo E'_ϱ, ed essendo Γ_{ϱ_1} presa in modo che sia tutta in E'_ϱ, cioè essendo $\varrho_1 < \varrho$. La serie della (7′) risultando convergente uniformemente per i valori di z di Γ_{ϱ_1} e per x interno ad E_ϱ, si può ad $1/(z-x)$ sostituire il suo sviluppo, e si ottiene così lo sviluppo della funzione data $f(x)$ in serie procedente per le funzioni $B_n(x)$, e convergente in tutto E_ϱ,

$$f(x) = \Sigma\, C_n\, B_n(x)\,, \qquad \text{con } C_n = \frac{b'(n-1)}{2\pi i}\int_{(\Gamma_1)} \frac{S_n(z)\, f(z)\, dz}{k}.$$

Analogamente si può avere lo sviluppo di una funzione analitica, data nel campo E'_ϱ, in serie procedente per le funzioni $S_n(z)$.

58. — Le considerazioni precedenti si potrebbero facilmente applicare allo studio di sistemi ricorrenti speciali, dando luogo ad interessanti risultati. Noi ci limiteremo a dare un esempio di queste applicazioni, mostrando come il nostro metodo permetta di trattare con facilità lo studio delle funzioni sferiche o polinomi di LEGENDRE e degli sviluppi di funzioni analitiche in serie procedenti per tali polinomi. Il caso speciale delle funzioni sferiche si presenta quando nella (42) si faccia

$$a(n) = n + 2\,,\quad b'(n) = -(2n+3)\,,\quad b''(n) = 0\,,\quad c(n) = n + 1\,.$$

Scrivendo l'equazione speciale che si ottiene con queste posizioni, si ha

$$(n+2)f_{n+2} - (2n+3)\,x f_{n+1} + (n+1)f_n = 0. \tag{44}$$

Questa equazione non differisce dalla sua inversa, salvo il cambiamento di x in z; perciò nella (7′) il sistema S_n sarà l'integrale distinto della (44) stessa.

Consideriamo l'integrale $B_n(x)$ della (44), definito da $B_0 = 0$, $B_1 = 1$; cambiando nella (44) n in $n-1$, e ponendo $P_n(x) = B_{n+1}(x)$, l'equazione ricorrente diviene

$$(n+1)f_{n+1} - (2n+1)\,x f_n + n f_{n-1} = 0\,, \tag{44'}$$

ed il suo integrale $P_n(x)$ è costituito dal sistema

$$P_{-1}(x) = 0\,,\quad P_0(x) = 1\,,\quad P_1(x) = x\,,\quad P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), \ldots$$

di polinomi di gradi eguali, rispettivamente, ai loro indici. Questi polinomi sono noti sotto il nome di *polinomi di Legendre* o *funzioni sferiche di prima specie*. Essi sono i denominatori delle ridotte della frazione continua

$$\cfrac{1}{x - \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}x - \cfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}x - \ddots}}}\,,\qquad \text{ossia}\qquad \cfrac{1}{x - \cfrac{1.1}{3x - \cfrac{2.2}{5x - \cfrac{3.3}{7x - \ddots}}}}\,,$$

definita dall'equazione ricorrente (44′).

Risulta dalla teoria generale (§ 50) che se f_n è un integrale della (44′), lo sviluppo $\Sigma f_n t^n$ è integrale dell'equazione differenziale lineare

$$(1 - 2tx + t^2)\, t\varphi' - (xt - t^2)\varphi = h + kt; \tag{45}$$

prendendo per f_n il sistema $P_n(x)$, si vede facilmente che è $h=k=0$; perciò la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n$ soddisfa all'equazione

$$(1 - 2xt + t^2)\varphi' - (x - t)\varphi = 0$$

la quale, integrata, dà

$$\varphi = C(1 - 2xt + t^2)^{-1/2};$$

ma per essere $P_0 = 1$ è $C = 1$, e perciò

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}.$$

Si ritrova così la proprietà che serve ordinariamente di definizione ai polinomi P_n; essi sono cioè i coefficienti dello sviluppo di $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ in serie di potenze di t.

Partendo da questa definizione è facile avere lo sviluppo di $P_n(x)$, dal quale si scorge che, all'infuori di un fattore numerico, $P_n(x)$ è una serie ipergeometrica (ridotta ad un polinomio); e precisamente P_{2n} coincide con $F(-n, n+1/2, 1/2, x^2)$ e P_{2n+1} con $xF(-n, n+3/2, 3/2, x^2)$, all'infuori di un moltiplicatore numerico [1].

59. — I punti singolari della equazione (45), oltre a $t=0$ e $t=\infty$, sono le radici dell'equazione di secondo grado in t'.

$$1 - 2tx + t^2 = 0. \tag{46}$$

---

[1] Per le altre proprietà elementari delle funzioni P_n, vedasi il primo Capitolo del più volte citato *Handbuch* di HEINE.

All'infuori dei valori di x reali e compresi fra -1 e $+1$, per i quali le due radici della (46) hanno entrambi il modulo eguale all'unità, una delle radici di quella equazione ha modulo maggiore dell'unità, mentre l'altra è reciproca della prima, ed ha quindi il suo modulo minore dell'unità. Indicheremo la prima con $\beta = r(x)$, l'altra sarà $\alpha = 1/r(x)$. Il luogo dei punti del piano x per i quali $|r(x)|$ ha un valore costante è un'ellisse avente per fuochi i punti $+1$ e -1; al crescere di $|r(x)|$ da 1 ad ∞, l'ellisse va dilatandosi dal segmento $-1 \ldots +1$ fino ad una ellisse di assi infiniti. Queste medesime ellissi sono anche i luoghi in cui rimane costante il modulo della radice α minore in modulo dell'unità; precisamente, la curva Γ_ϱ (§ 56) su cui rimane

$$|\alpha| = \varrho, \qquad \text{onde} \qquad |r(x)| = \frac{1}{\varrho}, \quad (\varrho < 1),$$

è l'ellisse che ha per equazione, posto $x = u + iv$,

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho} + \varrho\right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varrho} - \varrho\right)^2} = 1,$$

ed il campo E_ϱ è l'interno, il campo E'_ϱ l'esterno dell'ellisse Γ_ϱ.

60. — Passiamo ora a determinare l'integrale distinto dell'equazione (44). Esso si ottiene applicando il metodo generale dato nel presente Capitolo. Si riprenda, all'uopo, l'integrale definito

$$\int_{(\lambda)} \frac{U(t)\,dt}{t^\mu (t - \zeta)}$$

considerato nel § 53; qui sarà $\mu = 0$, $U(t) = (t^2 - 2tx + 1)^{-1/2}$, e la linea λ circonda la radice maggiore in modulo dell'equazione (46), cioè la $r(x)$. Siccome poi la $U(t)$ è infinita d'ordine < 1 per $t = r(x)$, si può all'integrale precedente sostituire

$$J = \int_{r(x)}^{\infty} \frac{dt}{(t - \zeta)\sqrt{t^2 - 2tx + 1}},$$

e, sviluppando questo integrale in serie di potenze di ζ, i coefficienti delle successive potenze di ζ daranno l'integrale distinto della (46).

Porremo

$$(47) \qquad J = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \zeta^n, \quad \text{con} \quad Q_n(x) = \int_{r(x)}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{t^2 - 2tx + 1}}.$$

È bene osservare che, fissato ζ, lo sviluppo di J converge per tutti i valori di x tali che sia $|r(x)| > |\zeta|$, cioè *fuori* di una delle ellissi Γ_ϱ se è $|\zeta| = \varrho > 1$, ed in tutto il piano, eccettuato il segmento $-1 \ldots +1$, se è $|\zeta| < 1$. Alle $Q_n(x)$ è stato dato il nome di *funzioni sferiche di seconda specie.*

Sappiamo che per l'integrale distinto l'equazione ricorrente [nel nostro caso la (44)] non vale per i valori iniziali $n = 0$, $n = 1$, cioè l'equazione (44') non vale per $n = -1$, $n = 0$. Calcoliamo dunque direttamente $Q_0(x)$ e $Q_1(x)$. Si ha

$$Q_0(x) = \int_{r(x)}^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 2tx + 1}}.$$

Ponendo

$$\sqrt{t^2 - 2tx + 1} = u - t,$$

viene, notando che $r(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$,

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1};$$

colla medesima posizione

$$Q_1(x) = \int_{r(x)}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t^2 - 2tx + 1}}$$

diviene

$$Q_1(x) = 4 \int_{r(x)}^{\infty} \frac{(u - x)\, du}{(u^2 - 1)^2},$$

e scindendo

$$\int \frac{du}{(u^2 - 1)^2} \quad \text{in} \quad \int \frac{u^2\, du}{(u^2 - 1)^2} - \int \frac{du}{u^2 - 1}$$

ed integrando per parti il primo e limitando, si ottiene

$$(48) \qquad Q_1(x) = x\, Q_0(x) - 1.$$

Questa relazione sarà quella da sostituire alla (44') per $x = 0$.

Possiamo ora applicare alle funzioni sferiche lo sviluppo (7′) del § 55, e si trova, poichè $k = -1$, $b'(n) = -(2n + 3)$,

$$\frac{1}{z - x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) P_n(x) Q_n(z) \quad (49)$$ [1],

convergente in egual grado per i valori di x rappresentati dai punti interni ed i valori di z dai punti esterni ad una ellisse di fuochi ± 1. Questa formula permette di sviluppare in serie di $P_n(x)$ una funzione analitica data regolare ad un valore *entro* un'ellisse di quel sistema omofocale, o in serie di $Q_n(z)$ una funzione analitica data regolare ad un valore *fuori* di una delle dette ellissi.

61. — Il valore σ della frazione continua, definita dalla (44′),

$$\sigma = \cfrac{1}{x - \cfrac{1^2}{3x - \cfrac{2^2}{5x - \cfrac{3^2}{7x - \dots}}}}$$

si può trovare con facilità. I numeratori delle sue ridotte, che indicheremo con N_n, formano un sistema di polinomi razionali interi che soddisfano alla (44′) ed insieme ai denominatori P_n dànno un sistema fondamentale della (44′) stessa. L'integrale N_n della (44′) è definito dalle condizioni iniziali $N_{-1} = 1$, $N_0 = 0$. Designando ora con c, c' due costanti rispetto all'indice n, si potrà porre

$$Q_n = c\, N_n + c'\, P_n,$$

e facendovi $n = 0$, viene $Q_0 = c'$; facendo poi $n = 1$, ($N_1 = 1$, $P_1 = x$), viene

$$Q_1 = c + Q_0\, x$$

e confrontando colla (48) si ha $c = -1$. Onde risulta, poichè

$$Q_0 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x},$$

---

[1] Formula detta spesso di NEUMANN, ma dovuta ad HEINE (Crelle, T. 42, pag. 72). Cfr. C. NEUMANN, *Ueber Entwickelung einer Function mit imag. Argument u. s. w.* (Halle, Schmidt, 1862) e THOMÉ, Crelle, T. 66.

la relazione fra le funzioni sferiche di prima e di seconda specie:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{1+x}{1-x} - N_n, \tag{50}$$

e poichè

$$\lim_{n=\infty} \frac{N_n}{P_n} = \sigma, \quad \lim_{n=\infty} \frac{Q_n}{P_n} = 0,$$

viene

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \cfrac{1}{x - \cfrac{1^2}{3x - \cfrac{2^2}{5x - \dots}}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-x}, \tag{51}$$

formula dovuta a GAUSS, e valida per ogni valore di x eccettuati i valori reali compresi fra -1 e $+1$.

La formula (50) determina pienamente la natura delle funzioni sferiche di seconda specie. Poichè $\log \frac{1+x}{1-x}$ è una funzione analitica multiforme singolare (logaritmicamente) nei soli punti $x = \pm 1$, e che P_n, N_n sono funzioni razionali intere, segue che Q_n ha le medesime singolarità, ed è perciò una funzione analitica multiforme, ma i cui rami si possono separare tagliando il piano della variabile lungo l'asse reale fra i punti $+1$ e -1. Di più (§ 17) la funzione Q_n è nulla all'infinito dell'ordine $n+1$.

È assai notevole il fatto che mentre lo sviluppo in serie di potenze di $1/x$ della funzione $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ è valido solo fuori del cerchio di centro $x=0$ e di raggio 1, lo sviluppo (51) in frazione continua e l'espressione in forma d'integrale definito valgono per tutto il piano, eccettuato il segmento $-1 \dots +1$ dell'asse reale.

62. — La relazione (50) si può anche scrivere

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-x} - N_n(x),$$

ossia

$$Q_n(x) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t-x} dt + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)\, dt}{t-x} - N_n(x).$$

Ora si noti che il primo integrale è funzione razionale intera di x

per essere $P_n(t) - P_n(x)$ divisibile per $t - x$, mentre il secondo è sviluppabile in serie di potenze di $1/x$ nulla per $x = \infty$. Se ne conclude che deve essere, separatamente,

$$(52) \qquad Q_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)\,dt}{t - x},$$

$$N_n(x) = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\,dt.$$

Ma $Q_n(x)$ è nullo dell'ordine $n + 1$ per $x = \infty$, lo stesso dovrà essere quindi del secondo membro, e si avrà pertanto

$$(53) \qquad \int_{-1}^{1} P_n(t)\, t^k\, dt = 0\,, \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Ne risulta che

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\, R(t)\, dt$$

è nullo per ogni polinomio razionale intero $R(t)$ d'ordine inferiore ad n, e in particolare

$$(54) \qquad \int_{-1}^{1} P_m(t)\, P_n(t)\, dt = 0$$

purchè sia $m \neq n$. Da questa ultima proprietà si deduce senza difficoltà che lo sviluppo di una funzione analitica in serie $P_n(x)$ non può farsi che in un sol modo [1].

63. — Le $P_n(x)$ essendo, come si è detto, funzioni ipergeometriche in cui due parametri, al variare di n, variano per numeri interi, soddisfano ad equazioni differenziali lineari *aventi eguale gruppo.*

---

[1] Le proprietà date in questo § sono conseguenze immediate della teoria elementare delle frazioni continue algebriche, sulle quali vedasi le indicazioni date in principio del § **21**.

Tali equazioni si potrebbero ottenere dalla ipergeometrica, ma vi si può giungere anche col seguente metodo. Posto

$$R = \sqrt{t^2 - 2\,t\,x + 1}\,,$$

si ha facilmente

$$(1 - x^2)\,\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + t^2\,\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0\,;$$

derivando rispetto ad x, e notando che $\dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{t}{R}$, viene

$$(1 - x^2)\,\frac{\partial^2 (1/R)}{\partial x^2} - 2\,x\,\frac{\partial (1/R)}{\partial x} + t\,\frac{\partial^2 (t/R)}{\partial t^2} = 0\,;$$

sostituendo per $1/R$ lo sviluppo $\Sigma\, P_n(x)\, t^n$, ed uguagliando a zero il coefficiente di t^n, viene l'equazione differenziale lineare delle $P_n(x)$:

$$(55) \qquad (1 - x^2)\,\frac{\mathrm{d}^2 P_n}{\mathrm{d}\,x^2} - 2\,x\,\frac{\mathrm{d}\,P_n}{\mathrm{d}\,x} + n\,(n+1)\,P_n = 0\,.$$

La formula (52) mostra subito (§ 42) che $Q_n(x)$ è un secondo integrale di questa equazione, che insieme a P_n ne dà il sistema fondamentale.

64. — I metodi del presente Capitolo, che abbiamo applicati al caso semplice delle funzioni sferiche, potrebbero giovare con eguale facilità allo studio di altri sistemi più generali di polinomi. Citiamo, ad esempio, quelli ai quali dà luogo la serie ipergeometrica in cui per uno dei parametri α e β si sostituisca il sistema dei valori -1, -2, -3, ..., al quale caso appartiene il sistema di polinomi considerato prima dal JACOBI (1), poi studiato da DARBOUX (2). Le proprietà di tali polinomi, segnatamente la possibilità di sviluppare una data funzione analitica in serie procedente per essi e le relative condizioni di convergenza, si ritroverebbero in modo assai semplice mediante i metodi qui sopra indicati, metodi che si prestano ancora allo studio di sistemi ricorrenti di ordine superiore al secondo, quali si offrono per esempio nelle formule di riduzione degli integrali iperellittici.

Agosto, 1894.

---

(1) Crelle, T. 56, pag. 149.

(2) Journal de Mathématiques, S. III, T. IV, 1878.