SALVATORE PINCHERLE

Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Nota I

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 4, Vol. **4** (1888), p. 694–700

in: Salvatore Pincherle, Opere Scelte, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 223–230

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_223>

7 [38].

Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate. Nota I.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe
di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali (Roma);
(4) $\mathbf{4}_1$, 694-700 (1888).

È noto che ad ogni equazione differenziale lineare a coefficienti razionali si può fare corrispondere una equazione lineare alle differenze finite, pure a coefficienti razionali. Data cioè la prima equazione, si può immediatamente scrivere la seconda, e reciprocamente; e dall'integrale dell'una si deduce senza difficoltà quello dell'altra. Di questa correlazione fra le due classi di equazioni, correlazione che sembra quasi trarre la sua origine da un *principio di dualità*, mi propongo di esporre nella presente Nota una applicazione alle funzioni ipergeometriche generalizzate.

Si sa che la generalizzazione delle funzioni ipergeometriche, dopo che queste furono definite dal lavoro di RIEMANN come integrali della nota equazione differenziale lineare del second'ordine, è stata cercata principalmente in due direzioni: prima dal POCHHAMMER [1], sostituendo all'equazione differenziale di second'ordine un'equazione d'ordine n, con n punti singolari a distanza finita, uno all'infinito, ed alcune condizioni sul modo di comportarsi degli integrali nell'intorno dei punti singolari; poi dal GOURSAT [2], il quale considera pure un'equazione differenziale d'ordine qualunque, ma coi soli punti singolari 0, 1 ed x. Le due famiglie di trascendenti scoperte da questi autori sono dunque assai diverse fra loro, ogni volta che n è maggiore di 2; ora io mi propongo di mostrare in questo lavoro come l'accennata correlazione fra equazioni lineari

(1) Crelle, t. LXXI, 1870.
(2) Annales de l'École Normale, ser. II, t. XII, 1883.

differenziali ed alle differenze finite permetta di collegare fra loro le due specie di funzioni ipergeometriche generalizzate. Troveremo infatti che mentre le funzioni ipergeometriche generalizzate del GOURSAT provengono da un'equazione differenziale lineare di ordine qualunque, coi coefficienti razionali in e^x e del primo grado, le trascendenti del POCHHAMMER hanno origine da una equazione alle differenze finite, di ordine qualunque, e coi coefficienti razionali, interi e del primo grado in x; troveremo pure che ad ogni proprietà formale od effettiva delle funzioni della prima famiglia corrisponde una proprietà correlativa per le funzioni della seconda, e inversamente.

1. — Per mettere meglio in evidenza la corrispondenza fra le equazioni lineari differenziali e a differenze finite, mi è sembrato utile di considerare i coefficienti dell'equazione differenziale come funzioni razionali di una esponenziale anzichè della stessa variabile indipendente. Supponendo tutti questi coefficienti del medesimo grado, l'equazione differenziale si prenderà nella forma

$$\sum_{h=0}^{m} (a_{h,0} + a_{h,1}\, e^{-t} + a_{h,2}\, e^{-2t} + \dots + a_{h,p}\, e^{-pt})\, \psi^{(h)}(t) = 0\,. \tag{1}$$

Formo la trasformata di LAPLACE di questa equazione. A questo effetto osservo che in virtù di un notevole teorema del POINCARÉ [1], se t cresce indefinitamente per valori reali e positivi, sarà

$$\lim_{t \to \infty} e^{-xt}\, \psi(t) = 0 \tag{2}$$

per ogni valore di x la cui parte reale è maggiore della massima parte reale dei logaritmi delle radici della equazione

$$a_{0,0} + a_{1,0}\, z + a_{2,0}\, z^2 + \dots + a_{m,0}\, z^m = 0\,. \tag{3}$$

Risulta da ciò che, posto

$$f(x) = \int e^{-xt}\, \psi(t)\, dt \tag{4}$$

ed estesa l'integrazione ad una linea l che, venendo dall'infinito positivo, ruoti intorno ad alcuni punti singolari dell'equazione (1)

(1) American Journal of Mathematics, t. VII, n. 3.

e torni all'infinito positivo, si avrà, integrando per parti,

$$x^h f(x) = \int e^{-xt} \psi^{(h)}(t) \, \mathrm{d}t ,$$

onde

$$(x+k)^h f(x+k) = \int e^{-xt} e^{-kt} \psi^{(h)}(t) \, \mathrm{d}t ;$$

con ciò l'equazione (1) si trasforma nell'equazione lineare alle differenze finite, d'ordine p e coi coefficienti di grado m,

$$\sum_{k=0}^{p} \{a_{0,k} + a_{1,k}(x+k) + \tag{5}$$

$$+ a_{2,k}(x+k)^2 + \ldots + a_{m,k}(x+k)^m\} f(x+k) = 0 .$$

Questa equazione si dirà *la trasformata della* (1); ad essa si poteva anche giungere seguendo altre linee d'integrazione, purchè le parti finite nelle integrazioni per parti siano nulle ai limiti.

2. — Sia data invece una equazione alle differenze della forma (5). Indico con $f(x)$ un suo integrale e pongo

$$\psi(t) = \int_{(\lambda)} e^{xt} f(x) \, \mathrm{d}x , \tag{6}$$

dove la linea d'integrazione λ è soggetta alle condizioni

$$\int_{(\lambda)} e^{xt} f(x) \, \mathrm{d}x = \tag{7}$$

$$= \int_{(\lambda)} e^{(x+1)t} f(x+1) \, \mathrm{d}x = \ldots = \int_{(\lambda)} e^{(x+p)t} f(x+p) \, \mathrm{d}x .$$

Da queste risulta, colla derivazione,

$$\psi^{(h)}(t) \, e^{-kt} = \int e^{xt} (x+k)^h f(x+h) \cdot \mathrm{d}x$$

e con ciò l'equazione (5) si trasforma nella (1).

La trasformazione (6) è dunque l'inversa della (4); si tratta soltanto di determinare la linea d'integrazione λ in modo che soddisfi alle condizioni indicate da (7).

3. — Ciò si può ottenere nel seguente modo. È possibile, in generale, determinare l'integrale di un'equazione lineare àlle differenze finite e a coefficienti razionali, p. es. la (5), sotto forma di una funzione uniforme, con una sola singolarità essenziale all'infinito e con singolarità non essenziali (poli) nei punti radici delle equazioni

$$r(x+n) = 0 \ \text{(1)},$$

dove si è posto

$$r(x) = a_{0,0} + a_{1,0}\,x + \ldots + a_{m,0}\,x^m \tag{3'}$$

ed n è un numero intero qualunque positivo o nullo.

Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ le radici della $r(x)$, i poli di $f(x)$ costituiscono dunque, in generale, gli m sistemi

$$\alpha_h,\ \alpha_h - 1,\ \alpha_h - 2, \ldots, \alpha_h - n, \ldots, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Prendo a considerare una linea chiusa Λ che comprenda i punti $\alpha_1, \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_1 - n$ fino ad un valore di n arbitrario, e non racchiuda alcun altro punto nè di questo, nè degli altri $m - 1$ sistemi di poli. L'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Lambda)} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sarà eguale alla somma dei residui della funzione $e^{xt} f(x)$ nei punti $\alpha_1, \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_1 - n$; l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Lambda)} e^{(x+1)t} f(x+1)\,\mathrm{d}x$$

sarà invece eguale alla somma dei residui della funzione $e^{(x+1)t} f(x+1)$ nei punti $x = \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 2, \ldots, \alpha_1 - n$, onde segue immediatamente

(1) Vedi HJ. MELLIN, Acta Mathematica, t. IX, p. 159 e seguenti.

che la differenza

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} e^{(x+1)t} f(x+1)\,\mathrm{d}x$$

è uguale al residuo di $e^{xt} f(x)$ nel punto $\alpha_1 - n$.

Similmente si trova che la differenza

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} e^{(x+p)} f(x+p)\,\mathrm{d}x$$

è uguale alla somma dei residui di $e^{xt} f(x)$ nei p punti

$$\alpha_1 - n,\ \alpha_1 - n + 1, \ldots, \alpha_1 - n + p - 1.$$

Ingrandendo ora la linea A per modo che senza cessare di soddisfare alle altre condizioni, il valore di n cresca indefinitamente, se l'integrale conserva un significato e se il residuo di $e^{xt} f(x)$ nel punto $\alpha_1 - n$ tende a zero per $n \to \infty$, saranno soddisfatte le condizioni (7), e ad un integrale $f(x)$ dell'equazione alle differenze corrisponderà l'integrale

$$\psi(t) = \int_{(\lambda)} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x$$

dell'equazione differenziale (1). Si è indicata con λ la linea limite di A.

4. — Non mi tratterrò per ora a sviluppare maggiormente le proprietà di questa corrispondenza fra le equazioni (1) e (5) [fra le quali si potrebbe notare che l'equazione (3), che dà le singolarità dell'equazione alle differenze, viene ad essere l'equazione determinante dell'equazione differenziale per $t \to +\infty$, e correlativamente l'equazione

$$a_{m,0} + a_{m,1}\,x + \ldots + a_{m,p}\,x^p = 0 \tag{8}$$

che, come insegna il Poincaré, dà i limiti del rapporto $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ per $x \to \infty$, è quella d'onde risultano le singolarità dell'equazione differenziale]; e passerò invece a trattare i casi speciali che dànno origine alle due famiglie di funzioni ipergeometriche generalizzate.

Supponiamo pertanto che l'equazione (1) si riduca al primo ordine:

$$(1') \qquad (a_{0,0} + a_{0,1}\, e^{-t} + \dots + a_{0,p}\, e^{-pt})\, \psi(t) + \\ + (a_{1,0} + a_{1,1}\, e^{-t} + \dots + a_{1,p}\, e^{-pt})\, \psi'(t) = 0\,.$$

In corrispondenza a questa, si avrà un'equazione alle differenze con coefficienti razionali, interi e del primo grado in x, che sarà:

$$(5') \qquad (a_{00} + a_{10}\, x) f(x) + \{a_{01} + a_{11}(x+1)\} f(x+1) + \dots + \\ + \{a_{0p} + a_{1p}(x+p)\} f(x+p) = 0\,.$$

La soluzione di questa equazione si potrà scrivere in forma d'integrale definito (4), con una linea l d'integrazione presa come è indicato al § 1: ma l'equazione (1′) si può integrare in forma finita ed il suo integrale, all'infuori di un moltiplicatore costante, si può scrivere

$$(9) \qquad \psi(t) = e^{-\beta t} \prod_{k=1}^{p} (1 - \alpha_k\, e^t)^{\beta_k}\,,$$

dove le α_k sono le radici dell'equazione (8) ($m = 1$); perciò si avrà, per un campo conveniente (v. § 1) di valori di x,

$$(10) \qquad f(x) = f(x;\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = \int_{(l)} e^{-(x+\beta)t} \prod_{k=1}^{p} (1 - \alpha_k\, e^t)^{\beta_k}\, dt\,.$$

Al mutare della linea d'integrazione si potranno trovare sotto la forma (10) vari integrali della (5′), le cui combinazioni lineari (a coefficienti costanti o periodici) saranno pure integrali dell'equazione stessa; fra queste combinazioni se ne potranno anche trovare di quelle valide per ogni x finito, cioè funzioni trascendenti intere. Non insisto su questa analisi, perchè non nuova, essendo analoga a quella svolta in una questione affine dal POINCARÉ [1].

5. — La funzione $f(x)$ data dalla (10) dipende non soltanto dalla x, ma anche dai parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, dei quali pure, sotto certe condizioni, essa è funzione analitica. Ora questa funzione soddisfa ad equazioni lineari a derivate parziali rispetto a due o più

---

[1] Mem. citata, § 3.

di queste variabili, e ad un'equazione differenziale lineare dell'ordine p rispetto a ciascuna di esse considerata separatamente. Ciò si può provare nel seguente modo.

Derivando parzialmente la (10) rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, ed integrando per parti, si ottiene dapprima:

$$(x+\beta) f(x) + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \dots + \alpha_p \frac{\partial f}{\partial \alpha_p} = 0 . \tag{11}$$

Ma si ha pure l'identità

$$(1-\alpha_h e^t)^{\beta_h - 1} (1-\alpha_k e^t)^{\beta_k} - (1-\alpha_h e^t)^{\beta_h} (1-\alpha_k e^t)^{\beta_k - 1} =$$

$$= (\alpha_h - \alpha_k) e^t (1-\alpha_h e^t)^{\beta_h - 1} (1-\alpha_k e^t)^{\beta_k - 1} ;$$

moltiplicando per

$$e^{-(x+\beta)t} e^t \, \mathrm{d}t ,$$

e per i binomi rimanenti $(1-\alpha_1 e^t)^{\beta_1}, (1-\alpha_2 e^t)^{\beta_2}, \dots$ ed integrando lungo la linea l, si ottiene

$$\beta_k \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} - \beta_h \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = (\alpha_k - \alpha_h) \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_h \, \partial \alpha_k} , \tag{12}$$

equazione a derivate parziali del second'ordine cui soddisfa la $f(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$.

Dalla combinazione delle $p(p-1)/2$ equazioni della forma (12), insieme all'equazione del prim'ordine (11) e a quelle che se ne deducono colla derivazione rispetto alle α, si ottengono molteplici equazioni lineari a derivate parziali ed a coefficienti razionali, di ordini diversi e con diverso numero di variabili. Mi propongo di mostrare come, in particolare, si possa ottenere un'equazione differenziale lineare dell'ordine p rispetto ad ogni singola variabile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Prendendo infatti quelle $p-1$ equazioni (12) che contengono una determinata α_h, per esempio la α_1, e derivando ciascuna di queste $p-2$ volte rispetto ad α_1, avremo $(p-1)^2$ equazioni lineari fra le quantità

$$\frac{\partial^k f}{\partial \alpha_1^{k-1} \, \partial \alpha_h} \tag{13}$$

per $k = 1, 2, 3, \ldots, p$ ed $h = 1, 2, 3, \ldots, p$, eccettuata la combinazione $(k = p, h = p)$. Derivando invece $p - 1$ volte la (11) rispetto ad α_1, si ottiene un sistema di p equazioni lineari [compresa la stessa (11)] fra le medesime quantità (13), ed in più la $f(x)$ e la $\dfrac{\partial^p f}{\partial \alpha_1^p}$. Fra queste

$$p^2 - p + 1$$

equazioni si possono eliminare le $p(p-1)$ quantità

$$\frac{\partial^k f}{\partial \alpha_1^{k-1} \, \partial \alpha_h}$$

per $k = 1, 2, 3, \ldots, p$ ed $h = 2, 3, \ldots, p$, e si ottiene così (volendo, sotto forma di determinante) un'equazione lineare a coefficienti razionali fra

$$f, \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2}, \ldots, \frac{\partial^p f}{\partial \alpha_1^p}.$$

Questa equazione non è altro che l'equazione ipergeometrica del POCHHAMMER, dell'ordine p. L'espressione (11) è dunque una funzione ipergeometrica d'ordine superiore del POCHHAMMER rispetto a ciascuna delle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; essa si può anche considerare come funzione ipergeometrica a due, tre, ..., p variabili e come tale soddisfa ad equazioni lineari simultanee a derivate parziali, le quali si deducono dalle (11), (12) e dalle loro combinazioni per derivazione ed eliminazione lineare. Nel caso particolare di $p = 3$, $\alpha_1 = 1$ si ritrova la funzione ipergeometrica a due variabili F_1 dell'APPELL (1) considerata pure dal PICARD (2).

È da notarsi che se

$$\Pi (1 - \alpha_\nu \, e^t)^{\beta_\nu}$$

si sviluppa in serie ordinata per le potenze di una o più variabili α, e la linea d'integrazione è tale da permettere l'integrazione termine a termine, si ottengono serie ipergeometriche generalizzate, a più variabili, i cui coefficienti sono funzioni ipergeometriche della stessa famiglia ma con una o più variabili di meno (3).

---

(1) Journal de Mathématique, ser. 3, t. VIII, p. 173.

(2) C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, t. XC, p. 1267.

(3) Cfr. POCHHAMMER, loc. cit., p. 323.