SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Serie 4, Vol. 8 (1887), p. 125–143

in: Salvatore Pincherle, *Opere Scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, vol. 1, Edizione Cremonese, Roma, 1954, p. 173–192

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_CW_1_173>

Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna;

(4) 8, 125-143 (1887).

Se una funzione analitica qualunque $\varphi(y)$ della variabile y si muta in una funzione di x mediante la posizione

$$f(x) = \int e^{xy} \varphi(y) dy,$$

dove l'integrazione s'intende estesa ad una linea del piano y , si dice che sulla $\varphi(y)$ si è operato la trasformazione di LAPLACE⁽¹⁾. In questo lavoro si vuole considerare questa trasformazione sotto un punto di vista nuovo: si vuole cioè riguardarla come una operazione funzionale [caso speciale di quelle di cui ho iniziato lo studio in altro lavoro⁽²⁾] definita da alcune sue proprietà caratteristiche —

(1) Di questa trasformazione è noto l'uso già antico nell'integrazione di certe classi di equazioni differenziali. Gl'importanti risultati che ha ottenuto di recente il Signor POINCARÉ mediante l'applicazione di questa trasformazione, hanno richiamato ora l'attenzione su di essa (V. *Americ. Journal of Mathematics*, t. VII, 1883, ed *Acta Mathem.*, t. VIII, 1886). La trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equaz. alle differenze finite (V. una mia Nota nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo del 17 Giugno 1886, ed una Memoria del Sig. MELLIN, *Acta Mathem.*, t. IX, 1886) si può fare dipendere dalla medesima trasformazione con un semplice cambiamento di variabile. Infine il calcolo simbolico delle derivate, che consiste nel sostituire gl'indici di derivazione con esponenti, e che permette di risolvere, almeno formalmente, ogni equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti anche con un numero infinito di termini, trova una base concreta mediante la trasformazione di LAPLACE. Ignoro se quest'ultima osservazione sia già stata fatta.

(2) *Studi sopra alcune operazioni funzionali* (Mem. della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, s. IV, t. VII).

mostrare come essa operazione dia un processo di formazione di numerose classi di funzioni trascendenti, in ispecie intere, — e fra altre applicazioni, accennare come se ne possa dedurre con facilità l'intera teoria di NEUMANN ed HEINE sulle funzioni cilindriche.

I.

1. — Indico con $E(\varphi)$ una operazione che applicata alla funzione analitica $\varphi(y)$ goda delle seguenti proprietà:

a) Di rappresentare, almeno in campi convenientemente determinati nel piano della variabile, una funzione analitica di x .

b) Di essere distributiva.

c) Di soddisfare, almeno nei campi del piano x cui si è accennato in a), alle equazioni:

$$(1) \quad \frac{d}{dx} E(\varphi) = E(y\varphi),$$

$$(2) \quad x E(\varphi) = -E\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

dalla cui combinazione risulta, per ogni coppia di numeri interi e positivi m ed n , l'equazione

$$(3) \quad \frac{d^n x^m E(\varphi)}{dx^n} = (-1)^m E\left(y^n \frac{d^m \varphi}{dy^m}\right).$$

2. — Si verifica facilmente la possibilità di realizzare una operazione funzionale dotata effettivamente delle proprietà enunciate. Infatti, sia $\varphi(y)$ una funzione ad un valore in un campo K , essa e tutte le sue derivate, e sia λ una linea chiusa formante il contorno di un campo semplicemente connesso tutto contenuto in K ; si trova immediatamente che, per ogni valore finito di x , l'integrale

$$(4) \quad \int_{(\lambda)} e^{xy} \varphi(y) dy$$

rappresenta una funzione analitica regolare di x . L'espressione (4) è, di sua natura, distributiva rispetto alla funzione φ ; derivando, si ottiene l'equazione (1); integrando per parti, si ha l'equazione (2); ripetendo queste operazioni, le parti finite che vengono dalle inte-

grazioni per parti sono nulle ai limiti per le condizioni poste: onde risulta l'equazione (3). Talchè l'espressione (4) ha tutte le proprietà poste a definizione dell'operazione E .

3. — Indicherò genericamente con $\omega(y)$ quelle funzioni tali che applicandovi l'operazione E si ottenga per risultato zero. Nel caso che l'operazione E sia rappresentata dall'espressione (4) sono funzioni ω tutte le funzioni ad un valore e regolari nell'interno del campo chiuso dalla linea d'integrazione.

Si ricava dalle formole (1) e (2) che

$$y\omega, \quad \frac{d\omega}{dy}, \quad \text{e quindi} \quad \sum_{m,n} c_{m,n} y^m \frac{d^n \omega}{dy^n},$$

dove la sommatoria ha un numero finito di termini, sono pure funzioni ω .

4. — Data una funzione $f(x)$, si proponga di determinare una funzione $\varphi(y)$ tale che sia

$$E(\varphi) = f(x),$$

o, in altre parole, d'invertire l'operazione E . Indicando pertanto con E' l'operazione inversa di E , si vede immediatamente che, posto

$$\varphi(y) = E'(f),$$

questa operazione dovrà soddisfare alle leggi espresse dalle formole

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dy} = -E'(xf) + \omega,$$

$$(6) \quad y\varphi = E'\left(\frac{df}{dx}\right) + \omega_1,$$

dalla cui sovrapposizione risulta

$$(7) \quad y^n \frac{d^m \varphi}{dy^m} = (-1)^m E'\left(\frac{d^n x^m f(x)}{dx^n}\right) + \omega_2$$

oltre alla legge distributiva.

Ora, a queste leggi si soddisfa colla espressione

$$(8) \quad \int_{(\mu)} e^{-xy} f(x) dx,$$

purchè la linea d'integrazione μ sia scelta in modo che

$$(9) \quad \left(e^{-xy} \frac{d^k f}{dx^k} \right)_{(\mu)} = \omega_k(y), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Il problema dell'inversione dell'operazione E si riduce dunque alla determinazione di una tale linea d'integrazione μ .

5. — Applicazione I. a) La funzione $\varphi(y)$ sia sviluppabile in serie di LAURENT,

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_n}{y^{n+1}} + c'_n y^n \right),$$

in una corona circolare avente il centro nell'origine; se (ρ) è una circonferenza concentrica e compresa nella corona, si avrà:

$$(10) \quad \int_{(\rho)} e^{xy} \varphi(y) dy = \sum_0^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}.$$

Indicando con $f(x)$ il secondo membro, si vede senz'altro:

1°. Che l'integrale definito gode delle proprietà dell'operazione E , talchè

$$E(\varphi) = f(x).$$

2°. Che

$$E(\sum c'_n y^n) = 0,$$

qualunque sia la serie di potenze purchè convergente in un cerchio maggiore di (ρ) .

3°. Che la funzione $f(x)$ è trascendente intera.

b) Per questa funzione $f(x)$ esiste un numero α così definito, che per ogni numero y tale che sia

$$(\text{Parte reale di } y) > (\text{Parte reale di } \alpha),$$

e per valori reali e positivi di x , si ha

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-xy} = 0.$$

Infatti, essendo M il limite superiore dei valori di $\varphi(y)$ lungo la circonferenza ϱ , è noto che si ha

$$|c_n| < M \varrho^n,$$

onde, per x reale e positivo,

$$|f(x)| < M \sum_0^{\infty} \frac{\varrho^n x^n}{n!} = M e^{\varrho x}.$$

Se ora y è un numero reale e maggiore di ϱ , si avrà

$$|f(x) e^{-yx}| < M e^{(e-y)x}$$

e quindi

$$\lim |f(x)| e^{-yx} = 0,$$

c. d. d..

Per il numero α definito nell'enunciato, serve dunque il raggio interno della corona circolare: il che non esclude che possa esistere un numero minore.

c) Se si forma

$$(12) \quad \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$$

questa espressione ha un significato per ogni valore y tale che sia

$$(\text{Parte reale di } y) > (\text{Parte reale di } \alpha),$$

e rappresenta per questi valori di y una funzione analitica, come sarebbe facile dimostrare⁽¹⁾. Inoltre si ha

$$[e^{-xy} f^{(k)}(x)]_0^{\infty} = \text{cost.}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

e quindi è soddisfatta la condizione (9). Ne risulta che l'operazione data da (12) ha le proprietà della inversa dell'operazione (10). Che lo sia effettivamente, si può dimostrare come segue.

Si prenda un numero positivo ε piccolo ad arbitrio: si potrà sempre trovare un numero intero m tanto grande che sia

$$(13) \quad (\text{Parte reale di } y) > \varrho$$

(1) V. p. es., SCHEEFFER, Inaugural-Dissertation, Berlin 1884.

insieme a

$$\left| M \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{y^{n+1}} \right| < \varepsilon .$$

Ciò posto, si scriva

$$f(x) = \sum_0^m \frac{c_n x^n}{n!} + R_m(x) ;$$

sarà, per una formola di calcolo integrale,

$$\int_0^{\infty} \sum_0^m \frac{c_n x^n}{n!} e^{-xy} dx = \sum_0^m \frac{c_n}{y^{n+1}} ,$$

inoltre, y soddisfacendo sempre alla condizione (13), si ha

$$\left| \int_0^{\infty} R_m(x) e^{-xy} dx \right| \leq \left| M \int_0^{\infty} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\varrho^n x^n}{n!} e^{-xy} dx \right| ,$$

dove il secondo membro equivale a

$$M \int_0^{\infty} \left(e^{ex} - \sum_0^m \frac{\varrho^n x^n}{n!} \right) e^{-xy} dx ,$$

od anche, applicando la già ricordata formola di calcolo integrale,

$$M \left\{ \frac{1}{y - \varrho} - \sum_0^m \frac{\varrho^n}{y^{n+1}} \right\} .$$

Ma questo essendo minore di ε per la scelta del numero m , ne segue

$$\left| \int_0^{\infty} R_m(x) e^{-xy} dx \right| < \varepsilon ,$$

e quindi si può integrare termine a termine, e si ha :

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx = \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{y^{n+1}} ;$$

c. d. d. .

Il primo membro di questa espressione ha un significato almeno in tutto il semipiano definito dalla (13), mentre il secondo ha un significato almeno in tutto lo spazio esterno al cerchio ρ .

d) Osserviamo che se la funzione $\sum_0^{\infty} \frac{c_n}{y^{n+1}}$ è regolare in tutto il piano, eccettuato solo il punto $y=0$, la funzione $f(x)$ avrà la proprietà

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) e^{-yx} = 0$$

per x positivo e per ogni valore di y la cui parte reale sia positiva; proprietà che il Signor POINCARÉ ha riscontrata — quantunque non caratteristica — nelle funzioni trascendenti intere di *genere* 1⁽¹⁾.

6. — Applicazione II. Se nell'espressione

$$(4) \quad f(x) = \int_{(\lambda)} e^{-xy} \varphi(y) dy$$

poniamo

$$(14) \quad y = \eta(z), \quad \varphi(y) = \theta(z),$$

viene

$$f(x) = \int_{(\lambda')} e^{x\eta(z)} \theta(z) \eta'(z) dz.$$

Ora, sotto le condizioni indicate, abbiamo visto che la risoluzione della formola (4) rispetto a $\varphi(y)$ va cercata sotto la forma

$$(15) \quad \varphi(y) = \int_{(\mu)} e^{-xy} f(x) dx;$$

facendo anche in questa le posizioni (14), si ottiene:

$$\theta(z) = \int_{(\mu')} e^{x\eta(z)} f(x) dx.$$

Dunque, la risoluzione dell'equazione

$$f(x) = \int_{(\lambda')} e^{-x\eta(z)} \Phi(z) dz,$$

(1) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. IX.

rispetto alla funzione incognita $\Phi(z)$, deve essere cercata sotto la forma

$$(16) \quad \Phi(z) = \eta'(z) \int_{(\mu')} e^{-xy(z)} f(x) dx,$$

dove la linea d'integrazione (μ') va determinata in modo opportuno.

Come caso particolare delle formole (15) e (16) si ottiene senza difficoltà il problema d'inversione d'integrale definito risoluto da RIEMANN (Werke, p. 140).

7. — Oltre al modo indicato al § 2, si può realizzare in altra guisa un'espressione rappresentante l'operazione E . Sia infatti una funzione $\varphi(y)$ tale che, quando x è compreso in un campo conveniente ed y va all'infinito secondo alcune direzioni determinate, sia

$$(17) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(y) e^{-xy} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

In tal caso, si prenda una linea d'integrazione che venga dall'infinito secondo una di queste direzioni di argomento t , e torni all'infinito o secondo la medesima direzione, o secondo un'altra delle predette, di argomento t_1 , potendosi anche ammettere che questa linea attraversi qualche taglio riemanniano della funzione $\varphi(y)$. L'integrale

$$\int_{\infty e^{it}}^{\infty e^{it_1}} e^{xy} \varphi(y) dy$$

godrà di tutte le proprietà dell'operazione E .

Per fissare le idee, supponiamo che la direzione secondo cui y deve andare all'infinito sia quella dell'asse reale e negativo. La linea d'integrazione λ potrà essere una qualunque curva che unisca il punto $-\infty + ai$ al punto $-\infty + bi$.

Se la funzione $\varphi(y)$ è sviluppabile fuori di un cerchio, la cui circonferenza non incontra la linea λ , in una serie di potenze di $\frac{1}{y}$; o se la linea λ non involge alcun punto singolare nè attraversa alcun taglio riemanniano della funzione $\varphi(y)$, l'integrale

$$(18) \quad \int_{-\infty+ai}^{-\infty+bi} e^{xy} \varphi(y) dy$$

sarà nullo. Tali funzioni $\varphi(y)$ saranno dunque funzioni ω per questo integrale, e tali saranno pure le funzioni $y \varphi(y)$ e $\frac{d\varphi}{dy}$.

8. — Si proponga ora di invertire l'integrale (18). Sia pertanto $f(x)$ una funzione, data in tutta la porzione del piano in cui la parte reale di x è maggiore di un numero a , e tale che sia

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-xy} f^{(k)}(x) = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

per valori positivi di x e per i valori di y la cui parte reale è maggiore di un numero b ; si domanda di determinare una funzione $\varphi(y)$ tale che sia

$$E(\varphi) = f(x),$$

l'operazione E essendo ora rappresentata dall'integrale (18).

Dico che la funzione $\varphi(y)$ richiesta, se esiste, non differisce dalla

$$(19) \quad \varphi(y) = \int_a^{\infty} f(x) e^{-xy} dx$$

che per una funzione ω . (Qui l'integrazione si fa lungo l'asse reale, ed α è un numero reale maggiore di a .) Infatti l'espressione precedente soddisfa a tutte le condizioni imposte al § 4 per l'operazione E' inversa di E , giacchè, posto

$$\psi = E'(f),$$

si verifica immediatamente che

$$\frac{d\psi}{dy} = -E'(xf)$$

e, coll'integrazione per parti, che

$$y^n \psi = E\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right) + e^{-ay} \{f^{(n-1)}(\alpha) + y f^{(n-2)}(\alpha) + \dots + y^{n-1} f(\alpha)\},$$

dove la parte fuori del segno nel secondo membro è evidentemente una funzione ω . Dunque la operazione (19), con cui si ottiene la $\psi(y)$, ha tutte le proprietà dell'operazione inversa di E , e la funzione $\varphi(y)$, se esiste, non differirà dalla $\varphi(y)$ che per una funzione ω .

Esempio. Vogliasi trovare una funzione $\varphi(y)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{-\infty} e^{xy} \varphi(y) dy = \frac{C}{x}.$$

Questa funzione è data, all'infuori di una funzione addittiva ω , da

$$\psi(y) = \int_a^{\infty} e^{-xy} \frac{dx}{x}.$$

Infatti, come riprova, si deduce da questa espressione:

$$\frac{d\psi}{dy} = -\frac{e^{-\alpha y}}{y},$$

onde risulta che ψ non è altro che $-\text{Li}(-\alpha y)$, essendo $\text{Li } y$ la nota trascendente detta *integrale logaritmico*. Ma questa, come si sa, equivale a

$$-\log y + \Lambda(\alpha y),$$

dove $\Lambda(\alpha y)$ è una funzione intera che per ogni c positivo, soddisfa alla condizione

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \Lambda(\alpha y) e^{-c\alpha y} = 0.$$

Essa è dunque una funzione ω , e rimane

$$\varphi(y) = -\log y.$$

Come verifica, si ponga

$$f(x) = -\int_{-\infty}^{-\infty} e^{xy} \log y dy:$$

integrando per parti, si ha

$$xf(x) = \int_{-\infty}^{-\infty} e^{xy} \frac{dy}{y},$$

e derivando,

$$x \frac{df}{dx} + f(x) = 0, \quad \text{onde} \quad f(x) = \frac{c}{x};$$

come si doveva trovare.

II.

9. — Si applichi l'operazione E ad una funzione algebrica φ , che soddisfi ad un'equazione irriducibile di grado n , a coefficienti razionali in y ,

$$(1) \quad F(y, \varphi) = 0.$$

Quest'equazione, com'è noto, definisce un intero *corpo* di funzione algebriche, ognuna delle quali soddisfa ad un'equazione di grado non maggiore di n ed a coefficienti razionali in y ; una qualunque di queste funzioni è esprimibile nella forma

$$\psi = r_0 + r_1 \varphi + r_2 \varphi^2 + \dots + r_{n-1} \varphi^{n-1},$$

essendo $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ funzioni razionali di y di cui rappresentremo con

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_m y^m$$

il denominatore comune, e sia $\sum_{k=0}^m a_{i,k} y^k$ il numeratore della funzione r_i . Ne risulta

$$(2) \quad \psi \sum_{k=0}^m a_k y^k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_{i,k} y^k \varphi^i;$$

si ponga ora

$$E(\varphi^i) = f_i, \quad E(\psi) = F,$$

e viene

$$(3) \quad \sum_{k=0}^m a_k F^{(k)} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m a_{i,k} f_i^{(k)}.$$

Questa trasformata dell'equazione (1) si traduce nel seguente

Teorema. « Mediante la trasformazione di LAPLACE, alle funzioni algebriche di un dato *corpo* corrisponde una classe di funzioni aventi la proprietà di soddisfare ad equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, il cui secondo membro è funzione

lineare a coefficienti costanti di n funzioni determinate. — Ogni combinazione lineare differenziale a coefficienti costanti delle funzioni di questa classe riproduce una funzione della classe stessa. — Ogni funzione della classe soddisfa ad un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti razionali. »

Notiamo per incidenza che le soluzioni delle equazioni a coefficienti costanti della forma (3) si possono esprimere, almeno formalmente, in serie della forma

$$F = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k} f_i^{(k)},$$

essendo ogni sistema di coefficienti $c_{i,k}$ ricorrente, e precisamente eguale al sistema dei coefficienti dello sviluppo in serie di potenze di y del quoziente

$$\frac{r_i(y)}{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_m y^m}.$$

10. — L'operazione di LAPLACE applicata alle funzioni algebriche, serve dunque alla generazione di infinite funzioni trascendenti, le quali si suddividono in classi corrispondenti ai varî corpi di funzioni algebriche; le funzioni di una stessa classe sono legate fra loro dalle relazioni indicate nel Teorema precedente. Per uno studio più intimo di queste funzioni, sarebbe necessario sviluppare maggiormente le proprietà del corpo di funzioni algebriche specialmente in relazione colla superficie di RIEMANN che gli corrisponde. Mentre mi propongo di riprendere questo studio in altro lavoro, mi limito per ora al caso speciale abbastanza interessante in cui il corpo di funzioni algebriche che si considera è di genere zero.

Sia dunque $\varphi(y)$ una funzione algebrica di genere zero, talchè si possa porre

$$(4) \quad y = \eta(z), \quad \varphi = \theta(z),$$

essendo η e θ funzioni razionali della variabile z ; la prima delle equazioni (4), sviluppata, sia:

$$(5) \quad y = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0},$$

ossia

$$(b_n y - a_n) z^n + (b_{n-1} y + a_{n-1}) z^{n-1} + \dots + (b_0 y - a_0) = 0.$$

Qualunque funzione del corpo algebrico si potrà esprimere in funzione razionale di z . Colla trasformazione di LAPLACE dovremo dunque a considerare le funzioni

$$\int e^{xy} R(z) dy,$$

essendo $R(z)$ una funzione razionale arbitraria di z ; o, ponendo per y la sua espressione in z ,

$$\int e^{x\eta(z)} R(z) \eta'(z) dz.$$

Ma $R(z) \eta'(z)$ essendo alla sua volta razionale rispetto a z , e quindi potendosi scomporre in somma di funzioni della forma

$$z^n \quad \text{oppure} \quad \frac{A}{z-a},$$

siamo condotti a studiare specialmente le funzioni

$$(6) \quad f_\nu(x) = \int_{(\lambda)} e^{x\eta(z)} z^\nu dz, \quad g_\nu(x, a) = \int_{(\lambda)} e^{x\eta(z)} \frac{dz}{(z-a)^{\nu+1}},$$

dove l'integrazione è estesa ad una linea conveniente del piano z . Per vedere quale sia questa linea, ricordiamo che nel piano y essa deve essere:

a) o tutta a distanza finita, nel qual caso essa non deve attraversare alcun taglio riemanniano della funzione $\varphi(y)$;

b) o estendersi all'infinito secondo due direzioni, parallele o no, lungo le quali si deve avere

$$\lim_{y=\infty} e^{xy} \varphi^{(k)}(y) = 0.$$

Le linee d'integrazione del piano z saranno dunque le trasformate delle linee suddette, mediante la trasformazione $y = \eta(z)$.

11. — Le f_ν hanno le seguenti proprietà:

a) Esse soddisfano ad equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.

b) Dalla (5) si deduce colla derivazione :

$$(7) \quad (b_1 + 2 b_2 z + \dots + n b_n z^{n-1}) \eta + (b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n) \eta' = \\ = a_1 + 2 a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}.$$

Ora si ha

$$(8) \quad \frac{d f_\nu}{dx} = \int e^{x\eta(z)} \eta(z) z^\nu dz$$

e coll'integrazione per parti, supponendo nulla la parte ai limiti,

$$(9) \quad f_\nu = - \frac{x}{\nu + 1} \int e^{x\eta(z)} \eta'(z) z^{\nu+1} dz.$$

Onde, moltiplicando la (7) per $e^{x\eta(z)} z^{\nu+1} dz$ ed integrando, viene

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \frac{\nu + 1}{x} b_0 f_\nu - \frac{\nu + 2}{x} b_1 f_{\nu+1} - \dots - \frac{\nu + n + 1}{x} b_n f_{\nu+n} + \\ & + b_1 \frac{d f_{\nu+1}}{dx} + 2 b_2 \frac{d f_{\nu+2}}{dx} + \dots + n b_n \frac{d f_{\nu+n}}{dx} = \\ & = a_1 f_{\nu+1} + 2 a_2 f_{\nu+2} + \dots + n a_n f_{\nu+n}. \end{aligned} \right.$$

Questa è una relazione differenziale ricorrente⁽¹⁾ alla quale soddisfano $n + 1$ funzioni f_ν consecutive.

c) Infine la (5) stessa, moltiplicata per $e^{x\eta(z)} z^\nu dz$ ed integrata, dà, in virtù della (8),

$$(11) \quad b_0 \frac{d f_\nu}{dx} - a_0 f_\nu + b_1 \frac{d f_{\nu+1}}{dx} - \\ - a_1 f_{\nu+1} + \dots + b_n \frac{d f_{\nu+n}}{dx} - a_n f_{\nu+n} = 0;$$

che è una seconda relazione differenziale ricorrente, ma a coefficienti costanti; cui soddisfano $n + 1$ funzioni f_ν consecutive.

12. — Sia proposto il problema di sviluppare una data funzione $F(x)$ in serie di funzioni f_ν . A questo scopo osservo che se

(1) Tale relazione può anche dirsi *equazione lineare mista differenziale ed alle differenze*.

si pone

$$F(x) = \int_{(\lambda)} e^{xy} \Phi(y) dy,$$

basterà di svolgere $\Phi(y)$ in serie di potenze di z per avere lo sviluppo cercato di $F(x)$. Ora si è visto (§ 4) che $\Phi(y)$, se esiste, è dato dalla formola

$$\Phi(y) = \int_{(\mu)} F(x) e^{-xy} dx + \omega(y),$$

dove la linea d'integrazione μ è da determinarsi convenientemente secondo le condizioni poste al citato paragrafo. Perciò si determinerà $\Phi(y) = \Phi(\eta(z))$, e lo sviluppo di questa per le potenze di z ci darà lo sviluppo di $F(x)$ in serie di funzioni f_ν .

13. — Per le funzioni

$$g_\nu(x, 0) = \int e^{x\eta(z)} \frac{dz}{z^{\nu+1}}$$

si troverebbero proprietà affatto analoghe alle a), b), c), del § 11.

Per le funzioni $g_\nu(x, a)$ basta ordinare i due termini di $\eta(z)$ secondo le potenze di $z - a$ per ottenere pure un sistema di proprietà analoghe.

III.

14. — Facciamo ora l'applicazione delle cose esposte alla dimostrazione delle principali proprietà delle funzioni cilindriche.

Prendiamo a quest'uopo il *corpo* di funzioni algebriche definito dall'equazione

$$(1) \quad \varphi^2 - y^2 = 1,$$

le cui funzioni si esprimono razionalmente mediante la variabile z , legata ad y da

$$(2) \quad z^2 - 2zy - 1 = 0.$$

Le funzioni da studiarsi si riconducono dunque alla forma

$$(3) \quad \int_{(\lambda)} e^{x \frac{z^2-1}{2z}} z^\nu dz,$$

dove il caso dell'esponente negativo non differisce da quello dell'esponente positivo, per essere le due radici in z della (2) reciproche e di segno contrario.

Affinchè le espressioni (3) abbiano le proprietà dell'operazione E , conviene prendere le linee d'integrazione come è indicato ai §§ 2 e 7; cioè che queste linee siano nel piano y :

a) un contorno chiuso che non attraversa il taglio riemanniano della $\varphi(y)$, che unisce i punti $y = \pm i$;

b) o una linea che partendo dall' ∞ positivo parallelamente all'asse delle quantità reali, torni all'infinito nella medesima direzione dopo di avere attraversato il detto taglio: in tale ipotesi la parte reale di x deve essere essenzialmente negativa.

La linea a) può essere p. es. una ellisse coi fuochi $\pm i$: a questa corrispondono nel piano z due cerchi aventi il centro nell'origine e i raggi fra loro reciproci; si può fissare p. es. come linea d'integrazione quello (ρ) il cui raggio ρ è maggiore dell'unità. In quanto al cammino b) si vede facilmente che gli corrisponde nel piano z una linea che va da zero all'infinito, nella direzione dell'asse reale positivo.

15. — Pongasi

$$(4) \quad J_\nu = \int_{(e)} e^{x \frac{z^2-1}{2z}} \frac{dz}{z^{\nu+1}}, \quad K_\nu = \int_0^\infty e^{x \frac{z^2-1}{2z}} \frac{dz}{z^{\nu+1}}.$$

Per queste funzioni troviamo le seguenti proprietà:

a) La J_ν è una funzione trascendente intera. La K_ν è rappresentata dall'integrale solo per i valori di x la cui parte reale è negativa; e si dimostrebbe senza difficoltà (cfr. § 8) che essa contiene un termine logaritmico.

b) Le espressioni precedenti, riferite alla variabile y , si scrivono:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_\nu = \int_{(e)} e^{xy} (y + \sqrt{1+y^2})^\nu \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}, \\ K_\nu = \int_{+\infty}^{+\infty} e^{xy} (y + \sqrt{1+y^2})^\nu \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}, \end{array} \right.$$

dove con (e) si indica l'ellisse avente per equazione

$$\frac{w^2}{4 \left(\varrho - \frac{1}{\varrho} \right)^2} + \frac{v^2}{4 \left(\varrho + \frac{1}{\varrho} \right)^2} = 1.$$

e) Le funzioni

$$\psi = \frac{(y + \sqrt{1 + y^2})^\nu}{\sqrt{1 + y^2}}$$

soddisfacendo, com'è facile vedere, all'equazione differenziale lineare

$$(1 + y^2) \psi'' + 3 y \psi' + (1 - \nu^2) \psi = 0,$$

le funzioni J_ν e K_ν soddisferanno alla trasformata di LAPLACE di questa equazione, cioè a

$$(6) \quad x^2 f'' + x f' + (x^2 - \nu^2) f = 0;$$

e poichè la K_ν contiene un termine logaritmico, mentre la J_ν è funzione intera, ne viene che l'integrale generale della (6) è della forma

$$c J_\nu + c' K_\nu.$$

d) Applicando alle funzioni (4) la formola (11) del § 11, si trova

$$(7) \quad 2 \frac{dJ_\nu}{dx} = J_{\nu-1} - J_{\nu+1},$$

$$2 \frac{dK_\nu}{dx} = K_{\nu-1} - K_{\nu+1}.$$

e) Applicandovi invece la formola (10) del § 11, e combinando colla (7), si trova

$$(8) \quad 2 \nu J_\nu = x (J_{\nu-1} + J_{\nu+1}),$$

$$2 \nu K_\nu = x (K_{\nu-1} + K_{\nu+1})^{(1)}.$$

(1) Le proprietà principali delle funzioni cilindriche, che ritroviamo qui mediante l'applicazione della trasformazione di LAPLACE, si possono vedere nell'*Handbuch der Kugelfunctionen* di HEINE, 2ª edizione, t. I, pag. 233 e seg. .

16. — Un'altra applicazione dell'inversione della operazione E , si può avere come segue:

Per definizione, abbiamo [§ 15, b)]

$$J_\nu = \int_{(e)} e^{xy} (y + \sqrt{1 + y^2})^\nu \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}},$$

perciò, essendo soddisfatta la condizione del § 4, si potrà invertire l'integrazione e porre

$$(9) \quad \frac{(y + \sqrt{1 + y^2})^\nu}{\sqrt{1 + y^2}} = \int_0^\infty e^{-xy} J_\nu(x) dx.$$

Si ponga αu al posto di x , $\frac{y}{\alpha}$ al posto di y , e viene

$$(9') \quad \alpha \int_0^\infty e^{-uy} J_\nu(\alpha u) du = \frac{(y + \sqrt{\alpha^2 + y^2})^\nu}{\alpha^{\nu-1} \sqrt{\alpha^2 + y^2}}.$$

Questa formola, sotto forma poco differente, si trova in HEINE, loc. cit., pp. 242-243; ci sembra che essa si presenti qui come un'applicazione notevole dell'inversione dell'operazione di LAPLACE.

Posto z al posto di y mediante la relazione (2), si ha dalla (9):

$$(10) \quad \int_0^\infty e^{-x \frac{z^2-1}{2z}} J_\nu(x) dx = \frac{2}{(1 + z^2) z^{\nu-1}}.$$

Come caso speciale, si ha dalla (9) la nota formola di LIPSCHITZ:

$$\int_0^\infty e^{-xy} J(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

17. — Come ultima applicazione, si consideri l'integrale

$$(11) \quad M(x) = \int_{(e)} e^{xy} \frac{dy}{\sqrt{(1 + y^2)(1 + k^2 y^2)}}.$$

Questa espressione appartiene allo studio dell'operazione E applicata ad una funzione di genere 1, studio che riserviamo ad un'altro lavoro; per ora ci limiteremo a considerare l'integrale precedente per il caso di una linea chiusa che comprenda i punti $\pm i$, $\pm i/h$ onde stabilire una formola notevole. La linea chiusa potendo essere un cerchio di centro 0, fuori di questo cerchio si può sviluppare

$$\Delta y = \frac{1}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}}$$

in serie di potenze di $1/y$, sia $\sum \frac{c_n}{y_{n+1}}$; da cui

$$M(x) = \sum \frac{c_n x^n}{n!}.$$

Onde la funzione $M(x)$ è trascendente intera. Ma sostituendo y con z mediante la (2), si ha

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{(e)} e^{x \frac{z^2-1}{2z}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2\left(\frac{z^2-1}{2z}\right)^2}} \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{2}{k} \int_{(e)} e^{x \frac{z^2-1}{2z}} \frac{dz}{\sqrt{1-2\left(1-\frac{2}{k^2}\right)z^2+z^4}}, \end{aligned}$$

essendo (e) una linea chiusa (p. es. una circonferenza col centro nell'origine del piano z). Ora si sa che

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \alpha^n P_n(x),$$

essendo $P_n(x)$ le note funzioni sferiche: onde

$$\left[1 - 2\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)z^2 + z^4\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum z^{2n} P_n\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

e perciò

$$(12) \quad M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) J_{2n+1}(x).$$

Si ponga

$$(13) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = du$$

e viene

$$M(x) = \int_{(\lambda)} e^{-ix \operatorname{sn} u} du ,$$

essendo (λ) la linea che corrisponde ad un cerchio di centro 0 e di raggio abbastanza grande nel piano y . Onde la formola

$$(14) \quad \int_{(\lambda)} e^{-ix \operatorname{sn} u} du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n \left(1 - \frac{2}{k^2}\right) J_{2n+1}(x).$$

Si osservi infine che poichè la funzione Δy soddisfa all'equazione di primo ordine

$$(1+y^2)(1+k^2y^2) \frac{d\Delta}{dy} + y(1+k^2+2k^2y^2)\Delta = 0 ,$$

facendo la trasformata di LAPLACE di questa equazione, si ottiene una equazione differenziale lineare di quart'ordine

$$(15) \quad k^2 x f^{(4)} + 2k^2 f''' + (1+k^2)(x f''' + f') + x f = 0$$

alla quale soddisfa la trascendente $M(x)$. Sarebbe facile costruire, mutando convenientemente la linea d'integrazione nella espressione (11), altri tre integrali particolari indipendenti i quali sarebbero egualmente il risultato dell'operazione E eseguita sulla funzione Δy .