SALVATORE PINCHERLE

Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie 4, Vol. **3** (1887), p. 370–375

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1887_3>

Matematica — *Costruzione di nuove espressioni analitiche atte a rappresentare funzioni con un numero infinito di punti singolari.* Nota di S. Pincherle, presentata dal Socio Dini.

I.

« **1.** — Sia una funzione razionale di due variabili:

$$A(x, y) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \tag{1}$$

il cui denominatore sia di grado p in x ed y, ed il numeratore sia di grado inferiore. Si può sviluppare questa funzione in serie di potenze di $\frac{1}{y}$, e se si indica con $\mathbf{C}_\lambda$ un campo del piano x, per i punti del quale tutte le radici dell' equazione:

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

siano minori di λ in valore assoluto, sarà:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{y^{n+1}} \tag{3}$$

per ogni valore di x compreso in $\mathbf{C}_\lambda$ e per ogni valore di y tale che sia

$$|y| > \lambda .$$

« **2.** — I coefficienti $A_n(x)$ della serie (3) sono funzioni razionali di x, infinite nei punti $o_1, o_2, \ldots o_p$, radici dell' equazione:

$$f(x, \infty) = 0 .$$

([1]) Annali di matematica. Serie 2ª, t. XIII, p. 177.

Essi soddisfano ad una relazione ricorrente (equazione alle differenze finite a coefficienti costanti). Infine, se λ_1 è un numero positivo qualunque maggiore di λ ed M è il limite superiore dei valori di $A(x, y)$ per x in $\mathbf{C}_\lambda$ e per $(y) \geq \lambda_1$, si ha:

$$|A_n(x)| < M \lambda_1^n. \tag{4}$$

« **3.** — Consideriamo ora l' espressione:

$$\mathbf{A}(\varphi) = \int_{(\rho)} A(x, y)\, \varphi(y)\, dy\,, \tag{5}$$

dove l' integrazione è estesa ad una circonferenza di centro o e di raggio ϱ, e dove $\varphi(y)$ è una funzione uniforme singolare nel solo punto $y = \alpha$ esterno al cerchio ϱ, e nulla all' infinito.

« La funzione $\varphi(y)$ ammette le due espressioni:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(y-\alpha)^{n+1}} \tag{6}$$

valida in tutto il piano, e

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n y^n, \tag{7}$$

valida in un cerchio di centro o e di raggio $|\alpha|$.

« Se x è preso entro il campo $\mathbf{C}_\rho$, si può sostituire nella (5) ad $A(x, y)$ la sua espressione (3), e per tali valori di x, si avrà per $\mathbf{A}(\varphi)$ lo sviluppo convergente uniformemente:

$$\mathbf{A}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n(x)\,; \tag{8}$$

ma ϱ essendo soggetto alla sola condizione di essere minore di $|\alpha|$, ne risulta che la serie del secondo membro della (8) converge uniformemente in tutto il campo $\mathbf{C}_{|\alpha|}$.

« D' altra parte, si ha per il teorema di Cauchy:

$$\mathbf{A}(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n}\,; \tag{9}$$

e qui, siccome il sistema (c_n) è ologene e la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n A(x, \alpha)}{\partial \alpha^n} (y-\alpha)^n$$

converge per valori di $|y-\alpha|$ sufficientemente piccoli, e per ogni valore di x che non sia radice dell' equazione

$$f(x, \alpha) = 0\,, \tag{10}$$

ne segue che la serie del secondo membro della (9) converge uniformemente in tutto il piano, tolti i p punti radici dell' equazione (10).

« La serie (9) rappresenta dunque una funzione analitica *monogena* uniforme, regolare in tutto il piano eccettuati i punti radici dell' equazione (10), e che ammette nel campo $\mathbf{C}_\rho$ l' espressione analitica (5) e nel campo $\mathbf{C}_{|\alpha|}$ l' espressione (8).

« Questa funzione verrà designata in ciò che segue con $\mathbf{A}(\varphi)$, nell' intero campo della sua validità.

« **4.** — Se $\varphi(y)$ è una funzione trascendente intera

$$\varphi(y) = \sum c_n y^n,$$

la serie

$$\mathbf{A}(\varphi) = \sum c_n \mathrm{A}_n(x)$$

converge in tutto il piano, eccettuati i punti $o_1, o_2, \dots o_p$.

II.

« **5.** — Abbiasi ora un sistema di punti:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots \tag{11}$$

tali che sia:

$$0 < \varrho < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3|, \dots\dots$$

e

$$\lim_{\nu=\infty} \alpha_\nu = \infty.$$

« Fondandosi sulle considerazioni che precedono, si riesce senza difficoltà a costruire espressioni analitiche che rappresentano funzioni monogene ed uniformi che sono singolari nei punti radici delle equazioni

$$f(x, \alpha_\nu) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots\dots \infty).$$

« **6.** — A quest' effetto, sia $\varphi(y)$ una funzione analitica uniforme, singolare nei punti del sistema (11) rispettivamente come le funzioni

$$\mathrm{G}_\nu\left(\frac{1}{(y-\alpha_\nu)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_{\nu,n}}{y-\alpha_\nu}\right)^{n+1};$$

e sia entro il cerchio $|\alpha_\nu|$:

$$\mathrm{G}_\nu\left(\frac{1}{y-\alpha_\nu}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\nu,n}\, y^n. \tag{12}$$

« Il teorema del Mittag-Leffer c' insegna a dare a questa funzione la forma

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_\nu(y) + \mathrm{H}(y), \tag{13}$$

dove H (y) è una funzione trascendente intera, e

$$F_\nu(y) = G_\nu\left(\frac{1}{y-\alpha_\nu}\right) - \sum_{n=0}^{m_\nu} k_{\nu,n}\, y^n\,;$$

gl' interi m_ν sono scelti, come è noto, in modo che per

$$\left|\frac{y}{\alpha_\nu}\right| < \sigma < 1\,,$$

sia

$$(14)\qquad \left|\sum_{n=m_\nu+1}^{\infty} k_{\nu,n}\, y^n\right| < \varepsilon_\nu\,,$$

dove le ε_ν sono quantità positive tali che $\Sigma\varepsilon_\nu$ sia convergente.

« Preso x nel campo $\mathbf{C}_\rho$, si formi l' espressione

$$(15)\qquad \mathbf{A}(\varphi) = \int_{(\rho)} A(x,y)\,\varphi(y)\,dy\,,$$

che si può anche scrivere

$$(16)\qquad \mathbf{A}(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{(\rho)} A(x,y)\,F_\nu(y)\,dy + \int_{(\rho)} A(x,y)\,H(y)\,dy\,,$$

ed anche sviluppare in serie convergente uniformemente

$$(17)\qquad \mathbf{A}(\varphi) = \sum C_n\,A_n(x)$$

in tutto il campo $\mathbf{C}_{|\alpha_1|}$.

« **7.** — Le espressioni precedenti (15)..(17) non ci rappresentano la funzione monogena $\mathbf{A}(\varphi)$ che nel campo $\mathbf{C}_\rho$ o nel campo $\mathbf{C}_{(\alpha_1)}$; per vedere come si continui questa funzione nel rimanente piano, si deve esaminare la serie

$$(18)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{A}(F_\nu) + \mathbf{A}(H)\,.$$

« Perciò, essendo λ un numero positivo arbitrariamente grande, sia preso x nel campo $\mathbf{C}_\lambda$. Si troverà sempre un valore μ dell' indice ν tale che, σ avendo un valore arbitrario < 1, ma fisso (§ precedente), sia:

$$\frac{\lambda}{\sigma} < |\alpha_\mu| \leq |\alpha_{\mu+1}| \leq \cdots\,.$$

« Si spezzi allora la serie (18) in:

$$\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\mathbf{A}(F_\nu) + \sum_{\nu=\mu}^{\infty}\mathbf{A}(F_\nu) + \mathbf{A}(H).$$

« La prima parte non è altro che la somma di un numero finito di funzioni analitiche quali si sono trovate al § 3, ed è quindi una funzione uniforme singolare solo nei punti radici delle equazioni:

$$f(x,\alpha_\nu) = 0\,,\qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots \mu - 1).$$

« La terza parte è una funzione di quelle indicate a § 4, ed è singolare solo nei punti $o_1, o_2, \dots o_p$.

« Rimane da studiare la somma

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} \mathbf{A}(F_\nu) . \tag{19}$$

« Ognuna delle funzioni $\mathbf{A}(F_\nu)$ comprese in questa somma, si può rappresentare in tutto il campo $\mathbf{C}_{|\alpha_\nu|}$, ed a fortiori nel campo $\mathbf{C}_\lambda$, mediante la serie convergente uniformemente:

$$\sum_{n=m_\nu+1}^{\infty} k_{\nu,n} \, A_n(x) .$$

Preso dunque un numero positivo λ_1 tale che sia

$$\lambda < \lambda_1 < \sigma \, | \, \alpha_\mu \, | ,$$

sarà per la (4):

$$\left| \sum_{n=m_\nu+1}^{\infty} k_{\nu,n} \, A_n(x) \right| < M \sum_{m_\nu+1}^{\infty} k_{\nu,n} \, \lambda_1^{\,n} ,$$

e quindi, per la (14):

$$\left| \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \mathbf{A}(F_\nu) \right| < M \sum_{\mu}^{\infty} \varepsilon_\nu .$$

« Con ciò è dimostrata la convergenza assoluta ed uniforme della serie (19) in tutto il campo $\mathbf{C}_\lambda$.

« Da cui risulta che la $\mathbf{A}(\varphi)$ è una funzione analitica, monogena, uniforme, regolare in tutto il piano, meno i punti radici delle equazioni:

$$f(x, \alpha_\nu) = 0 , \qquad (\nu = 1, 2, \dots \infty) ,$$

e questa funzione è rappresentata nel campo $\mathbf{C}_\rho$ dall'integrale (15), e nel campo $\mathbf{C}_{|\alpha_1|}$ dalla serie (17).

« 8. — A ciò che precede possiamo aggiungere le seguenti osservazioni:

1°) Le singolarità della funzione $\mathbf{A}(\varphi)$ nei punti radici di $f(x, \alpha_\nu) = 0$ sono caratterizzate da quelle delle funzioni

$$\sum c_{\nu,n} \frac{\partial^n A(x, \alpha_\nu)}{\partial \alpha_\nu^{\,n}} .$$

2°) Le funzioni analitiche rappresentate dagl' integrali definiti (15) in campi diversi da $\mathbf{C}_\rho$, si deducono senza difficoltà da $\mathbf{A}(\varphi)$ mediante l' applicazione del teorema dell' Hermite.

3°) È da notare che le singolarità di $\mathbf{A}(\varphi)$ dipendono come numero e specie da quelle di φ, mentre la loro distribuzione nel piano dipende dalle singolarità di $A(x, y)$.

4°) Sarebbe facile generalizzare i risultati ottenuti, per il caso che la funzione $\varphi(y)$ sia singolare nei punti di un sistema numerabile qualunque, seguendo una via analoga a quella tenuta dal Mittag-Leffler nella sua celebre Memoria.

« Sarebbe pur facile generalizzare anche la natura della funzione $A(x, y)$.

5°) Se il centro del cerchio d' integrazione fosse in un punto qualunque y_0 del piano y, e si fosse partiti dallo sviluppo

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^{(0)}(x)}{(y - y_0)^{n+1}}$$

analogo a (3), per una stessa funzione $\mathbf{A}(\varphi)$ si sarebbero trovati diversi sviluppi in serie

$$\sum k_n A_n(x), \qquad \sum k_n^{(0)} A_n^{(0)}(x),$$

e si vedrebbe facilmente che questi sviluppi hanno la proprietà *di continuarsi l' uno coll' altro, come avviene dei vari sviluppi in serie di Mac-Laurin appartenenti ad una stessa funzione; talchè la continuazione analitica di una funzione è attuabile non solo sugli sviluppi in serie di potenze, ma su svariatissime altre forme di sviluppi* ».