SALVATORE PINCHERLE

Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche

Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti, Serie 2, Vol. **15** (1882), p. 224–225

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1882_2>

ANALISI MATEMATICA. — *Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche.* Nota di S. PINCHERLE, presentata dal M. E. prof. Felice Casorati.

1. Se si ha un sistema di funzioni analitiche

$$p_0(x), p_1(x), \ldots p_n(x), \ldots \tag{1}$$

regolari entro un cerchio di centro $x=0$ e di raggio R, e si sa in qualunque modo che entro quel cerchio le potenze intere di x sono sviluppabili in serie della forma

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m,n}\, p_n(x)\,; \tag{2}$$

se infine si suppone che sia possibile assegnare due numeri positivi K e σ tali che sia entro lo stesso cerchio

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{mod.}\,(\alpha_{m,n}\, p_n(x)) < \sigma^m K\,,$$

allora, „qualunque funzione $F(x)$ regolare entro un cerchio di centro $x=0$ „e di raggio maggiore di σ è sviluppabile in serie di funzioni $p_n(x)$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, p_n(x)\,. \text{ „}$$

Questa proposizione si può dimostrare in modo ovvio fondandosi sui teoremi generali relativi alle serie doppie.

2. Sotto le stesse ipotesi, esiste un secondo sistema di funzioni

$$q_0(x)\,, q_1(x)\,, \ldots q_n(x)\,, \ldots \tag{3}$$

che diremo coniugato del sistema (1) e tale che in un campo assegnabile valga la formola

$$\frac{1}{1-xx'} = \sum q_n(x')\, p_n(x)\,.$$

3. Sotto le stesse ipotesi, se indichiamo con $a_{m,n}$ il coefficiente di x^m nello sviluppo di $p_n(x)$, si hanno fra le $a_{m,n}$ e le $\alpha_{m,n}$ delle formole (2), le relazioni:

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m}\, \alpha_{s,m} = \begin{cases} 1 & \text{se } r=s \\ 0 & r \gtrless s \end{cases}$$

talchè le a e le α si comportano fra loro come gli elementi di un determinante ed i rispettivi elementi reciproci.

4. Se alle ipotesi già fatte aggiungiamo che le funzioni del sistema (1) siano polinomi razionali interi in x e di grado n, avremo che le funzioni $q_n(x)$ del sistema conjugato saranno serie di potenze intere di x principianti colla potenza x^n, ed inversamente, se le funzioui $p_n(x)$ sono tali serie di potenze, le $q_n(x)$ sono polinomi di grado n in x.

Come applicazione, si possono considerare le serie di funzioni sferiche di 1ª e di 2ª specie, le funzioni di Bessel colle loro conjugate $O_n(x)$ considerate da Neuman (Crelle, t. 67), e le funzioni di Lamé di prima e di seconda specie; in tutti questi casi si verifica il teorema 4.