SALVATORE PINCHERLE

SALVATORE PINCHERLE

Ricerche sopra una classe importante di funzioni monodrome

Giornale di Matematiche di Battaglini, Vol. **18** (1880), p. 92–136

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Pincherle_1880_1>

RICERCHE

SOPRA UNA CLASSE IMPORTANTE DI FUNZIONI MONODROME

PEL

Dott. SALVATORE PINCHERLE

Presento nella prima parte di questa Memoria un saggio di una nuova trattazione della teoria delle Funzioni Ellittiche, non al certo tale da prender posto fra le esposizioni che solitamente si danno di quella importantissima teoria, ma che forse non sembrerà del tutto oziosa a chi consideri che essa riduce lo studio delle funzioni ellittiche a quello di nuove funzioni che godono di proprietà analoghe ma più semplici per molti riguardi. La nuova classe di funzioni che ci occuperà più specialmente acquisterà maggiore importanza dalla proposizione che forma l'oggetto della seconda parte del presente lavoro, proposizione che dimostra essere queste funzioni insieme colle ellittiche le sole che permettono di soddisfare ad una importante relazione di natura algebrica.

I.

Le funzioni monodrome aventi la proprietà $\varphi(x) = \varphi(\omega x)$.

1. Una funzione y di una variabile x affatto libera, o complessa, verrà detta *analitica* se nell'intorno di un punto x_0 del piano rappresentativo della x vale per la funzione uno sviluppo della forma

$$(1) \quad f(x) = c_m(x-x_0)^m + c_{m+1}(x-x_0)^{m+1} + c_{m+2}(x-x_0)^{m+2} + \dots$$

dove m è un numero intero, positivo o negativo. Basta che la funzione ammetta un simile sviluppo nell'intorno di un punto perchè essa possa dirsi funzione di variabile complessa nel senso Riemanniano e perchè si possono dedurre sviluppi analoghi per

l'intorno di altri punti: e la proprietà espressa dalla (1) si enuncia dicendo che la funzione ha per l'intorno di x_0 il carattere di funzione razionale (*).

Se $m = 0$, c_0 è uno dei valori della funzione per $x = x_0$; se m è un numero positivo, la funzione è nulla dell'ordine m per $x = x_0$, e se m è negativo, essa è infinita dell'ordine $-m$; ma nè nell'uno nè nell'altro caso x_0 andrà considerato come *posto singolare* per la funzione. Invece x_0 sarà posto singolare se non sarà possibile di ottenere uno sviluppo della forma (1) per la funzione nell'intorno di quel posto.

Infine una funzione si dirà *monodroma* se nell'intorno di tutti i posti, meno i singolari, esiste uno sviluppo ed uno solo che risponda alla definizione, comunque data, di quella funzione: invece essa si dirà *polidroma* se sarà possibile assegnare per la medesima più sviluppi della forma (1) nell'intorno di un medesimo posto.

2. Richiamate queste proposizioni sulle funzioni in generale, passiamo ad enunciare nei seguenti termini la prima delle ricerche che ci proponiamo:

« Esistono funzioni analitiche monodrome aventi il carattere razionale nell'intorno di tutti i posti-valori della variabile, eccettuati posti singolari in numero finito, e dotate della proprietà espressa dell'equazione

$$(2) \quad \varphi(x) = \varphi(\omega x),$$

« dove ω è un numero costante? »

Adopreremo in ciò che segue la lettera φ maiuscola, minuscola ed anche affetta da indici a denotare tali funzioni; e prima di dimostrarne l'esistenza e di studiarne le proprietà sarà d'uopo cercare a quali condizioni deve essere soggetto il numero ω , che diremo *moltiplicatore*.

3. a) Se si ha

$$\varphi(x) = \varphi(\omega x),$$

ne conseguirà naturalmente

$$\varphi(x) = \varphi(\omega^n x),$$

dove n è un intero qualunque positivo o negativo: se dunque esiste per una funzione un moltiplicatore ω , ne esisterà un'intera serie

$$(3) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_h, \dots$$

la quale consta per lo meno di tutte le potenze intere di uno di essi.

(*) V. Casorati. *Teorica delle Funzioni di variabile complessa*. Pavia, 1866.
Cfr. Weierstrass, *ueber eindentige functionen*, Berlin, 1877.

b) Si supponga che nella serie (3) si trovino moltiplicatori vicini tanto quanto si vuole all'unità: posto

$$\omega_h = 1 + \varepsilon_h,$$

si troveranno per le ε_h valori piccoli quanto si vuole. Sia ora x_0 un valore non singolare di x e tale che $\varphi(x_0)$ abbia un valore finito e differente da zero: sarà

$$\varphi(x_0 + \varepsilon_h x_0) = \varphi(x_0),$$

ma, potendosi prendere h tale che $x_0 + \varepsilon_h x_0$ sia compreso in quell'intorno di x_0 entro cui vale lo sviluppo (1), sarà

$$\varphi(x_0 + \varepsilon_h x_0) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)\varepsilon_h x_0 + \varphi''(x_0)\frac{\varepsilon_h^2 x_0^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

e quindi dovrà essere

$$\varepsilon_h x_0 \left[\varphi'(x_0) + \varphi''(x_0)\frac{\varepsilon_h x_0}{1 \cdot 2} + \dots \right] = 0.$$

Ma è noto dai principii della Teoria delle Funzioni che si può sempre determinare un tale intorno del posto x_0 che entro il medesimo la serie di potenze di $x - x_0$ non sia mai nulla, o lo sia tutt'al più nel solo posto x_0 , a meno che non siano zero tutti i coefficienti della serie: e quindi se ε_h può essere piccolo quanto si vuole senza essere nullo, $x_0 + \varepsilon_h x_0$ può cadere in qualunque intorno di x_0 e la serie tra parentesi della formola precedente dovrà essere identicamente nulla, il chè non essendo, si deve concludere che le quantità ε_h non possono diventare piccole quante si vuole, ossia che i moltiplicatori di una funzione $\varphi(x)$ non possono avvicinarsi indefinitamente all'unità.

c) Esaminiamo il caso di un moltiplicatore avente per modulo l'unità; sia pertanto

$$\omega = e^{2r\pi i},$$

dove r è un numero reale.

Sia prima r commensurabile: potremo scrivere

$$r = \frac{m}{n}$$

dove m ed n sono numeri interi primi fra loro, e sarà

$$\omega^n = 1.$$

In tal caso la proprietà

$$\varphi(x) = \varphi(\omega x)$$

non può essere oggetto di alcuno studio speciale: basta che $F(z)$ indichi una funzione monodroma qualunque con un numero finito di posti singolari perchè, posto

$$\varphi(x) = F(x^n),$$

la funzione $\varphi(x)$ ammetta quella proprietà.

Sia invece r incommensurabile. Sviluppando questo numero in frazione continua esso sarà compreso fra due ridotte consecutive $\frac{m}{n}$ ed $\frac{m'}{n'}$,

$$\frac{m}{n} < r < \frac{m'}{n'},$$

dove si può sempre supporre

$$mn' - m'n = \pm 1,$$

e si avrà in valore assoluto

$$r - \frac{m}{n} < \frac{1}{nn'},$$

ossia

$$r = \frac{m}{n} + \frac{\sigma}{nn'},$$

dove σ è un numero reale minor d'uno in valore assoluto. Sarà pertanto

$$\varphi(x) = \varphi \left(e^{\left(\frac{m}{n} + \frac{\sigma}{nn'} \right) p \pi i} x \right)$$

per qualunque potenza intera p : e fatto $p = n$

$$\varphi(x) = \varphi \left(e^{\frac{2\sigma\pi i}{n'}} x \right).$$

Qui σ ha un valore minore dell'unità mentre n' si può supporre grande quanto si vuole, perciò il moltiplicatore sarà vicino ad 1 quanto si vuole, il che non può

essere per ciò che si è dimostrato al b); non si potrà quindi ammettere che la $\varphi(x)$ abbia un moltiplicatore della forma $e^{2r\pi i}$, se r è incommensurabile.

4. Dalle cose dette al § precedente risulta che converrà tener conto dei soli moltiplicatori aventi un modulo diverso dall'unità: ma se ω è un moltiplicatore, lo è anche $\frac{1}{\omega}$, e potremo dire che basterà tener conto dei moltiplicatori aventi un modulo maggiore dell'unità. La funzione assumerà uno stesso valore nei posti della serie

$$(4) \quad \omega^{-2}x, \quad \omega^{-1}, \quad x, \quad \omega x, \quad \omega^2 x, \quad \omega^3 x, \dots$$

infinita nei due sensi. Diremo per brevità che i varii posti di questa serie sono *congrui ad x (e fra loro) rispetto al moltiplicatore ω* .

Risulta di più che una funzione $\varphi(x)$ avrà per posti singolari i posti $x=0$ ed $x=\infty$, e quelli soli. Che debbano essere singolari risulta dal fatto che i posti della serie (4) si condensano indefinitamente nell'intorno di $x=0$ ed $x=\infty$, il quale fatto basta a caratterizzare un posto singolare (*).

Che quelli siano i soli posti singolari risulta da ciò, che se ve ne fosse un'altro x_0 , sarebbero pur singolari tutti i posti congrui ad x_0 rispetto ad ω , cioè la funzione $\varphi(x)$ perderebbe il carattere razionale in infiniti punti, contro l'ipotesi stabilita a § 2.

3. Importa ora rispondere alla seguente domanda:

» Sotto quali condizioni due diversi numeri

$$\omega = \rho e^{i\theta}, \quad \omega' = \rho' e^{i\theta'}$$

« potranno essere moltiplicatori di una stessa funzione $\varphi(x)$?

A quest'uopo serviranno le due seguenti proposizioni:

TEOREMA I. « Se $e^{i\theta}$, $e^{i\theta'}$ sono due moltiplicatori di una funzione, aventi per « modulo l'unità, esisterà sempre un terzo moltiplicatore $e^{i\theta''}$ avente per modulo « l'unità e tale che

$$\theta = \mu\tau, \quad \theta' = \mu'\tau$$

« dove μ e μ' sono numeri interi ».

Infatti si ha per il § 3, c) che deve essere

$$\theta = 2\pi r, \quad \theta' = 2\pi r'$$

(*) Weierstrass, memoria citata, § 1. Cfr. Casorati. Con determinato intorno di $x=\infty$ intendo l'insieme dei posti del piano rappresentativo, esterni ad un cerchio di determinato raggio.

essendo r ed r' numeri razionali, per cui il rapporto $\theta : \theta'$ sarà pure razionale ed esprimibile colla frazione irriducibile $\frac{\mu}{\mu'}$. Posto quindi

$$\frac{\theta}{\mu} = \tau,$$

sarà

$$\theta = \mu\tau \quad , \quad \theta' = \mu'\tau.$$

D'altra parte se $e^{i\theta}$, $e^{i\theta'}$ sono moltiplicatori di una funzione, sarà moltiplicatore pure

$$e^{i(s\theta - s'\theta')} = e^{i(s\mu - s'\mu')\tau}$$

per valori interi qualunque di s ed s' , ma essendo μ e μ' numeri interi primi fra loro si può sempre determinare gl'interi s , s' in guisa che

$$s\mu - s'\mu' = 1 ,$$

e così risulta che $e^{i\tau}$ è un moltiplicatore della funzione, e. d. d.

TEOREMA II. « Se

$$\omega = \rho e^{i\theta} \quad , \quad \omega' = \rho' e^{i\theta'}$$

« sono due moltiplicatori qualunque di una funzione, essi si potranno sempre porre « sotto la forma

$$\omega = \varpi^\mu e^{i\nu\tau} \quad , \quad \omega' = \varpi^{\mu'} e^{i\nu'\tau} .$$

« dove ϖ ed $e^{i\tau}$ sono moltiplicatori della funzione, τ è un numero reale e μ , μ' , « ν , ν' sono numeri interi ».

DIMOSTRAZIONE. I. Esisteranno sempre due numeri interi μ e μ' tali che sia

$$\rho^{\mu'} = \rho^{\mu}.$$

Infatti, se ω ed ω' sono moltiplicatori della funzione $\varphi(x)$ per la quale si suppongono verificate le proprietà enunciate al § 2, sarà pure un moltiplicatore la quantità

$$\frac{\rho^{\mu'} e^{\mu' i\theta}}{\rho^{\mu} e^{\mu i\theta'}} = \frac{\rho^{\mu'}}{\rho^{\mu}} e^{i(\mu'\theta - \mu\theta')} ,$$

dove μ e μ' sono numeri interi per ora indeterminati. Indicata con u la quantità

itiva $\frac{\rho^{\mu'}}{\rho'^{\mu}}$, se ne prenda il logaritmo naturale

$$\begin{aligned}\log u &= \mu' \log \rho - \mu \log \rho' \\ &= \log \rho' \left(\mu' \frac{\log \rho}{\log \rho'} - \mu \right),\end{aligned}$$

e si svolga il quoziente dei due logaritmi in frazione continua: se $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ sono due ridotte consecutive, sarà

$$\frac{p}{q} < \frac{\log \rho}{\log \rho'} < \frac{p'}{q'},$$

dove

$$pq' - qp' = \pm 1,$$

ossia

$$\frac{\log \rho}{\log \rho'} = \frac{p}{q} + \frac{\sigma}{qq'},$$

essendo σ un numero positivo, nullo, o negativo minor d'uno in valore assoluto, talchè

$$(a) \quad \log u = \log \rho' \left(\mu' \frac{p}{q} + \mu \frac{\sigma}{qq'} - \mu \right),$$

e qui distingueremo due casi.

1° Caso. Il rapporto $\frac{\log \rho}{\log \rho'}$ sia incommensurabile; allora σ non sarà mai nullo ed i termini delle ridotte si potranno fare grandi quanto si vuole: si faccia ora

$$\mu' = q \quad , \quad \mu = p,$$

e verrà

$$(b) \quad \log u = \frac{\sigma \log \rho'}{q'},$$

e qui, essendo q' grande quanto si vuole, sarà $\log u$ piccolo quanto si vuole ossia u vicino ad 1 quanto si vuole. Ciò significa che prendendo per $\frac{p}{q}$ le successive infinite ridotte della frazione continua, si avrà per u una serie di valori

$$u_1, u_2, u_3, \dots, \dots,$$

o anche, essendo le η_i quantità positive,

$$1 + \eta_1 \quad , \quad 1 + \eta_2 \quad , \quad 1 + \eta_3 \quad , \quad \dots \quad ,$$

e fra le u_i se ne troveranno infinite che differiranno da 1 meno di qualunque quantità data, o ciò che è lo stesso, si troveranno infinite η_i che saranno minori di qualsiasi numero dato ϵ . Ma per la definizione delle u , la funzione $\varphi(x)$ ripiglia lo stesso valore nei posti della serie

$$(c) \quad x_0 \quad , \quad (1 + \eta_1) e^{i\tau_1} x_0 \quad , \quad (1 + \eta_2) e^{i\tau_2} x_0 \quad , \quad \dots \quad ,$$

dove $\tau_1, \tau_2, \dots$ sono quantità reali: se ora ξ_0 è il modulo di x_0 e si considera la corona circolare compresa fra i cerchi di raggi ξ_0 e $\xi_0 + \epsilon\xi_0$, si troveranno nella serie (c) infiniti posti i cui moduli

$$(1 + \eta_i) \xi_0$$

saranno compresi fra ξ_0 e $\xi_0 + \epsilon\xi_0$ e che pertanto cadranno nella corona circolare considerata. Cadendo adunque in essa corona infiniti punti in cui la funzione prende lo stesso valore $\varphi(x_0)$, vi si troverà necessariamente un punto X colla proprietà che in qualunque suo intorno cadono infiniti punti in cui la funzione piglia lo stesso valore $\varphi(x_0)$, e quindi (*) quel posto sarà posto singolare per la funzione. Ma dal § 4 si sa che la funzione ha per posti singolari $x=0$ ed $x=\infty$, e non altri: non potendosi pertanto ammettere l'esistenza di un tal punto X, si deve escludere l'ipotesi che il rapporto $\frac{\log \rho}{\log \rho'}$ sia incommensurabile.

2° Caso. Sia dunque il rapporto $\frac{\log \rho}{\log \rho'}$ commensurabile: in allora il numero c si può annullare nella (a), e posto ancora

$$\mu' = q \quad , \quad \mu = p \quad ,$$

viene

$$\log u = 0 \quad , \quad u = 1 \quad ,$$

ossia

$$\rho^{\mu'} = \rho'^{\mu} \quad ,$$

dove μ e μ' sono numeri interi primi fra loro.

(*) Weierstrass, loc. cit.

II. Ciò posto, si faccia

$$r = \rho^{\frac{1}{\mu}} = \rho'^{\frac{1}{\mu'}},$$

per valori qualunque dei numeri interi s ed s' la quantità

$$\frac{\rho^s}{\rho'^{s'}} e^{i(s\theta - s'\theta')} = r^{\mu s - \mu' s'} e^{i(s\theta - s'\theta')}$$

sarà pure moltiplicatore di $\varphi(x)$: ma potendosi disporre di s ed s' in guisa che

$$s\mu - s'\mu' = \pm 1,$$

il più semplice fra questi moltiplicatori sarà della forma

$$\varpi = r e^{i\theta},$$

e tutte le potenze intere di ϖ saranno pure moltiplicatori della funzione.

Ora essendo

$$\omega = r^\mu e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \varpi^\mu = r^{\mu} e^{i\mu(s\theta - s'\theta')}$$

moltiplicatori di φ , e così

$$\omega' = r^{\mu'} e^{i\theta'} \quad \text{e} \quad \varpi^{\mu'} = r^{\mu'} e^{i\mu'(s\theta - s'\theta')},$$

saranno anche moltiplicatori i quozienti di questi, cioè:

$$\frac{\omega}{\varpi^\mu} = e^{i((1-\mu s)\theta + \mu s'\theta')} \quad \text{e} \quad \frac{\omega}{\varpi^{\mu'}} = e^{i((1+\mu' s')\theta' - \mu' s\theta)},$$

e quindi per il teor. I del presente paragrafo dovrà essere

$$(1 - \mu s)\theta + \mu s'\theta' = \nu\tau$$

$$(1 + \mu' s')\theta' - \mu' s\theta = \nu'\tau',$$

dove τ è una quantità reale e ν e ν' sono numeri interi; da cui, per essersi posto t al luogo di $s\theta - s'\theta'$, viene

$$\theta = t\mu + \nu\tau$$

$$\theta' = t\mu' + \nu'\tau',$$

ossia

$$\omega = r^\mu e^{i\mu} e^{i\nu\tau} = \varpi^\mu e^{i\nu\tau}$$

$$\omega' = r^{\mu'} e^{i\mu'} e^{i\nu'\tau} = \varpi^{\mu'} e^{i\nu'\tau}$$

c. d. d.

Risulta dal teorema così dimostrato che la funzione $\varphi(x)$ viene ad avere in sostanza un solo moltiplicatore semplice ϖ con modulo diverso dall'unità, ed un moltiplicatore col modulo uguale ad 1: ma potendosi fare astrazione da quell'ultimo (§ 3, c), potremo d'ora innanzi considerare funzioni aventi un moltiplicatore semplice col modulo maggiore dell'unità, e tutti gli altri moltiplicatori saranno potenze intere e positive di quello.

6. Riassumendo i risultati ottenuti fin qui, vediamo che ammessa l'esistenza di funzioni $\varphi(x)$ aventi la proprietà

$$\varphi(x) = \varphi(\omega x)$$

e conservanti il carattere razionale dappertutto, eccettuati punti singolari in numero finito, queste funzioni hanno le proprietà:

a. di avere per valori singolari i soli posti $x=0$ ed $x=\infty$,

b. di non ammettere moltiplicatori della forma $e^{2\pi ir}$ se r è una quantità reale incommensurabile,

c. di avere infiniti moltiplicatori, che sono tutte le potenze intere, positive o negative di un moltiplicatore unico il cui modulo è maggiore dell'unità; esse possono avere altresì un moltiplicatore della forma $e^{2\pi ir}$ dove r è una quantità reale razionale, ma di cui si può fare astrazione nelle ricerche che seguono.

7. Se indichiamo, come faremo in ciò che segue, con

$$\omega = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 1)$$

il moltiplicatore più semplice di una funzione $\varphi(x)$, e descriviamo nel piano della variabile complessa x le circonferenze di centro $x=0$ aventi per raggi ρ^h , dove h è un numero intero qualunque fra $-\infty$ e $+\infty$, la funzione prenderà tutti i valori di cui essa è suscettibile nello spazio compreso fra due consecutive di questa circonferenze e per conoscere pienamente le proprietà della $\varphi(x)$ ci basterà sapere come essa si comporti entro una di queste corone circolari, che diremo *corone elementari*.

TEOREMA. « Ogni funzione $\varphi(x)$ deve diventare infinita in una corona elementare ».

DIMOSTRAZIONE. Abbiassi una funzione $\varphi(x)$ la quale, se è possibile, non divenga mai infinita in una corona elementare: essa sarà dunque finita in tutto il piano

meno che nei punti 0 ed ∞ , e quindi sviluppabile in una serie della forma

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty} a_h x^h = \dots \dots a_{-2} x^{-2} + a_{-1} x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \dots$$

valida entro la corona circolare compresa fra due cerchi di raggi r ed R e di centro $x = 0$, dove r si può supporre piccolo, ed R grande quanto si vuole. I coefficienti a_h sono dati per la nota formola di Laurent, da

$$a_h = \frac{1}{2\pi R_1^k} \int_0^{2\pi} \varphi(R_1 e^{it}) e^{-hit} dt,$$

dove R_1 è un raggio qualunque compreso fra r ed R , e l'integrazione si suppone eseguita lungo la circonferenza di raggio R_1 .

Si faccia ora R_1 uguale ad una potenza m del modulo ρ del moltiplicatore, e sarà

$$a_h = \frac{1}{2\pi \rho^{mh}} \int_0^{2\pi} \varphi(\rho^m e^{it}) e^{-hit} dt,$$

ma

$$\omega = \rho e^{i\theta},$$

onde

$$\rho^m = \omega^m e^{-im\theta},$$

ed essendo

$$\varphi(\omega^m x) = \varphi(x),$$

viene, qualunque sia l'intero m ,

$$a_h = \frac{1}{2\pi \rho^{mh}} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i(t-m\theta)}) e^{-hit} dt.$$

Indicando con M il massimo valore del modulo di $\varphi(x)$ in una corona elementare, risulterà $\text{mod} \cdot a_h < \frac{M}{\rho^{mh}}$, ($h = -\infty, \dots, +\infty$).

Si dia ad h un valore determinato positivo, e ad ε un valore piccolo a piacere: si potrà sempre prendere m tanto grande che sia

$$\frac{M}{\rho^{mh}} < \varepsilon$$

se M è finito, onde sarebbe

$$\text{mod. } a_h < \varepsilon ;$$

si dia invece ad h un valore negativo, si potrà soddisfare alla stessa disuguaglianza dando ad m un valore negativo abbastanza grande in valore assoluto, cioè tutti i coefficienti dello sviluppo

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_h x^h$$

sarebbero nulli, il ché non è ammissibile. Non può dunque esistere un numero M , valore massimo dei moduli di $\varphi(x)$ in una corona elementare, ossia la $\varphi(x)$ diventa infinita in ogni corona elementare, c. d. d.

COROLLARIO. Segue da ciò che una funzione $\varphi(x)$ assume nell'interno di una corona elementare qualunque valore. Infatti si dica c un valore qualunque, la funzione

$$\frac{1}{\varphi(x) - c},$$

essendo della stessa natura della $\varphi(x)$, deve diventare infinita in ogni corona elementare, cioè $\varphi(x) - c = 0$, ossia $\varphi(x) = c$.

8. TEOREMA. « Qualunque funzione $\varphi(x)$ ha sempre tanti zeri quanti infiniti in « ogni corona elementare ».

DIMOSTRAZIONE. Per un noto teorema di Cauchy l'integrale

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$$

esteso al contorno di un campo connesso entro cui la funzione conserva il carattere razionale, esprime la differenza fra il numero degli infiniti e degli zeri di $\varphi(x)$ (ogni zero o infinito essendo contato tante volte quante sono le unità del suo ordine di molteplicità). Estendiamo l'integrale precedente al contorno di una corona circolare elementare limitata p. es. dai cerchi aventi per raggi 1 e ρ : sarà

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(\rho e^{it})}{\varphi(\rho e^{it})} \rho i e^{it} dt - \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(e^{it})}{\varphi(e^{it})} i e^{it} dt.$$

Ora

$$\rho = \omega e^{-i\theta},$$

onde

$$\varphi(\rho e^{it}) = \varphi(\omega e^{-i\theta} e^{it}) = \varphi(e^{i(t-\theta)});$$

di più da

$$\varphi(\omega x) = \varphi(x)$$

si deduce colla derivazione

$$\varphi'(\omega x) = \frac{1}{\omega} \varphi'(x),$$

onde

$$\frac{\varphi'(\rho e^{it})}{\varphi(\rho e^{it})} = \frac{1}{\rho} \frac{\varphi'(e^{i(t-\theta)})}{\varphi(e^{i(t-\theta)})} e^{-i\theta},$$

e gl'integrali precedenti divengono

$$ie^{-i\theta} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(e^{i(t-\theta)})}{\varphi(e^{i(t-\theta)})} e^{it} dt - i \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(e^{it})}{\varphi(e^{it})} e^{it} dt;$$

ma il primo integrale è uguale al secondo come si vede cambiando la variabile $t - \theta$ in t , e l'espressione precedente è nulla, il che dimostra il teorema.

COROLLARIO. Una funzione $\varphi(x)$ assume tutti i possibili valori lo stesso numero di volte in una corona elementare. Infatti se $\varphi(x)$ è infinita p volte in una corona, sarà infinita p volte anche $\frac{1}{\varphi(x) - c}$, qualunque sia il valore c , e quindi essa sarà nulla p volte, ossia $\varphi(x)$ assumerà p volte il valore c .

Questa osservazione porta a distinguere le funzioni $\varphi(x)$ a seconda del loro *ordine*, dicendosi funzione $\varphi(x)$ dell'ordine p quella che diventa infinita in p punti distinti o coincidenti di una corona elementare; ed una funzione dell'ordine p assume p volte in una corona elementare ogni possibile valore.

9. TEOREMA. « Non possono esistere funzioni $\varphi(x)$ d'ordine inferiore al secondo. »

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varphi(x)$ una funzione avente il moltiplicatore ω : si avrà

$$\frac{d\varphi(\omega x)}{dx} = \frac{1}{\omega} \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

ossia

$$\omega x \frac{d\varphi(\omega x)}{dx} = x \frac{d\varphi(x)}{dx};$$

da cui si vede che

$$x \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

è una funzione che non cambia di valore quando x si cambia in ωx ; questa funzione ha dunque tutte le proprietà delle $\varphi(x)$ e come tale si deve annullare in ogni corona elementare. Ora sia $x = a$ un valore per il quale $x \frac{d\varphi(x)}{dx}$ si annulla, sarà

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx} \right]_a = 0,$$

e sviluppando $\varphi(x)$ in serie nell'intorno di $x = a$, si avrà:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \left[\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right]_a \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \dots,$$

ossia $\varphi(x)$ assume due volte il valore speciale $\varphi(a)$ nel posto $x = a$. La funzione $\varphi(x) - \varphi(a)$ è dunque nulla almeno due volte in una corona circolare elementare, dunque essa sarà almeno due volte infinita, e perciò d'ordine non inferiore al secondo, c. d. d.

Ammissa l'esistenza di funzioni $\varphi(x)$ quali le abbiamo definite a § 2. vediamo che alle proprietà già riassunte a § 6. conviene aggiungere le seguenti:

d. Se si divide il piano in corone circolari per mezzo di circonferenze i cui raggi costituiscono una progressione geometrica di ragione ρ , la funzione riprende gli stessi valori in ogni corona circolare, e diventa in ogni corona, nulla, infinita, ed assume qualsiasi valore.

e. Essa assume il valore zero, infinito e qualsiasi altro valore un egual numero (finito) di volte in ogni corona; da cui la classificazione in ordini.

f. Non esistono funzioni $\varphi(x)$ d'ordine inferiore al secondo.

g. La funzione $x \frac{d\varphi(x)}{dx}$ è una funzione della stessa natura di $\varphi(x)$.

Si tratta ora di passare alla dimostrazione dell'esistenza di tali funzioni, cioè alla costruzione di una di esse, che ci basterà poi a formare le altre: e per giungere a tale scopo dobbiamo introdurre una nuova classe di funzioni ausiliari, dotate esse pure di notevoli proprietà.

10. Indicheremo col simbolo $\tau(x)$ funzioni definite dalle seguenti condizioni:

a. di essere monodrome,

b. di avere carattere razionale intero (cioè non contenere esponenti negativi nello sviluppo 1) per tutti i valori di x diversi da 0 e ∞ ,

c. di soddisfare l'equazione funzionale

$$(5) \quad \tau(\omega x) = -\omega x \cdot \tau(x) \quad (\text{mod } \omega > 1).$$

11. Per giungere alla determinazione di una funzione siffatta, supposto il piano

diviso ancora in corone circolari dalle circonferenze i cui raggi costituiscono una progressione geometrica avente per ragione $\text{mod } \omega$, s'incomincia ad osservare che basterà conoscere il modo di comportarsi della funzione entro una tal corona, in virtù della (5) e della

$$\tau(\omega^n x) = (-1)^n \omega^n x^n \tau(x),$$

che se ne deduce immediatamente. Si osservi inoltre che non possono esistere due funzioni $\tau(x)$ distinte aventi gli stessi zeri: se infatti $\tau(x)$, $\tau_1(x)$ sono due funzioni quali le abbiamo definite, il quoziente

$$\frac{\tau(x)}{\tau_1(x)}$$

sarà una funzione di quelle che abbiamo dette $\varphi(x)$, e questa, come si è veduto deve essere nulla in ogni corona circolare, il che non è se $\tau(x)$ e $\tau_1(x)$ hanno gli stessi zeri; sarà dunque

$$\frac{\tau(x)}{\tau_1(x)} = \text{cost.}$$

Ciò posto, sarà facile determinare una funzione $\tau(x)$ che sia nulla nel posto $x=1$ e nei suoi congruenti $x=\omega^h$: e dico che questa funzione sarà rappresentata dal prodotto infinito

$$(6) \quad \tau_0(x) = \prod_{h=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\omega^h}\right) \left(1 - \frac{1}{\omega^{h+1}x}\right).$$

Infatti questo prodotto sarà convergente incondizionatamente per tutti i valori di x diversi da zero e dall'infinito, essendo convergente la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(\text{mod } \omega)^h}$$

sotto l'ipotesi fatta $\text{mod } \omega > 1$; la funzione rappresentata da quel prodotto infinito ha dunque per soli posti singolari i valori $x=0$, $x=\infty$; e di più, mutando x in ωx , essa viene moltiplicata per $(1 - \omega x)$ ma vi manca il fattore $\left(1 - \frac{1}{\omega x}\right)$, cioè moltiplicata in tutto per $-\omega x$, come deve essere.

Infine è facile determinare uno sviluppo in serie per la funzione $\tau_0(x)$. Se in-

fatti poniamo

$$\tau_0(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n x^n ,$$

chè sappiamo già valido uno sviluppo di tale forma, avremo per la (5)

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \omega^n x^n = \sum_{-\infty}^{\infty} -\omega c_n x^{n+1} ,$$

onde

$$c_{n+1} \omega^{n+1} = -\omega c_n \quad (n = -\infty \dots \dots +\infty) ,$$

e dando ad n i valori $0, 1, 2, 3, \dots$ e moltiplicando

$$c_{n+1} \omega^{1+2+3+\dots+n} = (-1)^{n+1} c_0 ,$$

da cui

$$c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} c_0}{\omega^{\frac{n(n+1)}{2}}} ,$$

ossia, fatta astrazione dal moltiplicatore costante c_0 ,

$$\tau_0(x) = 1 - x + \frac{x^2}{\omega} - \frac{x^3}{\omega^3} + \frac{x^4}{\omega^6} - \dots \dots \dots$$

$$- \frac{1}{x\omega} + \frac{1}{x^2\omega^3} - \frac{1}{x^3\omega^6} + \dots \dots \dots ,$$

o finalmente, aggruppando i termini a due a due :

$$(7) \quad \tau_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\omega^{\frac{n(n+1)}{2}}} \left(\frac{1}{x^n} - x^{n+1} \right) .$$

12. Le funzioni $\tau_0(x)$ così costruite si possono applicare senza difficoltà alla determinazione delle funzioni $\varphi(x)$. A tal'uopo converrà dimostrare le seguenti proposizioni :

TEOREMA I. « Se $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_p$ sono $2p$ posti presi arbitrariamente entro una corona elementare, in modo però che sia

$$(8) \quad a_1 a_2 \dots a_p = \omega^m b_1 b_2 \dots b_p,$$

« la funzione

$$(9) \quad \Phi(x) = x^m \frac{\tau_0\left(\frac{x}{a_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{a_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{a_p}\right)}{\tau_0\left(\frac{x}{b_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{b_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{b_p}\right)}$$

« sarà una funzione $\varphi(x)$ dell'ordine p e col moltiplicatore ω . »

DIMOSTRAZIONE. Per le proprietà delle funzioni $\tau(x)$, la funzione $\Phi(x)$ è monodroma ed ha carattere razionale per tutti i valori di x , ad eccezione di $x=0$ ed $x=\infty$. Essa è nulla nei p punti $a_1, a_2, \dots, a_p$ e nei loro congruenti, e in ciascuno di essi del prim'ordine, e infinita del prim'ordine nei p posti b_1, b_2, b_p e i loro congruenti. Resta da verificarsi che

$$\Phi(\omega x) = \Phi(x),$$

e questa si rende subito manifesta dalle proprietà della funzione $\tau_0(x)$: si ha infatti

$$\Phi(\omega x) = \omega^m x^m \frac{b_1 b_2 \dots b_p \tau_0\left(\frac{x}{a_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{a_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{a_p}\right)}{a_1 a_2 \dots a_p \tau_0\left(\frac{x}{b_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{b_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{b_p}\right)},$$

e questa frazione, per la (8), non è altro che l'espressione scritta per la $\Phi(x)$, c. d. d.

TEOREMA II. « Reciprocamente, se $\varphi(x)$ è una funzione dell'ordine p avente « $a_1, a_2, \dots, a_p$ per posti degli zeri e $b_1, b_2, \dots, b_p$ per posti degli'infiniti in una « corona elementare, sarà

$$a_1 a_2 \dots a_p = \omega^m b_1 b_2 \dots b_p. \quad »$$

DIMOSTRAZIONE. Si prenda

$$c = \frac{a_1 a_2 \dots a_p}{b_1 b_2 \dots b_{p-1}},$$

e si formi la serie dei posti $\omega^h c$ congrui a c . Se fra questi si trova il posto b_p ,

il teorema è dimostrato: nel caso contrario si troverà sempre un posto ed uno solo (*) appartenente alla corona elementare in cui si sono presi i posti $a_1, a_2, \dots$, e sia $c' = c\omega^m$ questo posto: si avrà

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_p}{b_1 b_2 \dots c'} = \omega^m.$$

Si formi ora la funzione

$$\Phi(x) = x^m \frac{\tau_0\left(\frac{x}{a_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{a_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{a_p}\right)}{\tau_0\left(\frac{x}{b_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{b_2}\right) \dots \tau_0\left(\frac{x}{b_{p-1}}\right) \tau_0\left(\frac{x}{c'}\right)},$$

questa sarà per il teorema precedente una funzione della stessa natura della $\varphi(x)$: ed anche il quoziente

$$\bar{\varphi}(x) = \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$$

avrà la proprietà

$$\bar{\varphi}(\omega x) = \bar{\varphi}(x),$$

ed inoltre sarà nullo solo dove è nulla $\Phi(x)$ o infinita $\varphi(x)$, cioè in

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \quad b_1, b_2, \dots, b_{p-1}, c';$$

e in ciascun posto del prim'ordine: ed è infinito solo dove è infinita $\Phi(x)$ o nulla $\varphi(x)$, e pure del prim'ordine, cioè in

$$b_1, b_2, \dots, b_p, \quad a_1, a_2, \dots, a_p;$$

e in ultima analisi $\bar{\varphi}(x)$ verrà ad essere zero nel solo posto c' e infinita nel solo posto b_p della corona che consideriamo. Ma questo risultato contraddice a quanto abbiamo dimostrato a § 9, non esistere cioè funzioni $\varphi(x)$ del prim'ordine che non siano costanti: è dunque necessario che $\bar{\varphi}(x)$ si riduce ad una costante, ossia $b_p = c'$; e fra gli zeri e gl'infiniti della $\varphi(x)$ passa la relazione che si voleva dimostrare.

(*) Potendosi fare la convenzione che se un posto si trova sopra una delle circonferenze che limitano le corone elementari, si riguarderà quel punto come appartenente alla corona per la quale quella circonferenza è il limite inferiore.

Questo teorema dà la forma di una funzione $\varphi(x)$ di cui si conoscono gli zeri e gl'infiniti in una corona elementare, e come si vede essa si esprime per le funzioni $\tau_0(x)$: è chiaro poi che la relazione che passa fra gli zeri e gl'infiniti di $\varphi(x)$ passa anche fra i p valori che fanno assumere a $\varphi(x)$ un valore qualunque c e quelli che fanno assumere un valore c' , e si può dire che il prodotto dei valori pei quali una funzione $\varphi(x)$ assume un valore qualunque in una corona elementare è costante, all'infuori di un fattore potenza del moltiplicatore.

13. Non essendovi funzioni $\varphi(x)$ del prim'ordine, le funzioni più semplici di quella famiglia saranno del second'ordine, cioè avranno due zeri e due infiniti (distinti o coincidenti) in ogni corona elementare. Se indichiamo con a_1, a_2 gli zeri e con b_1, b_2 gl'infiniti, la forma generale delle funzioni di second'ordine sarà

$$(10) \quad \varphi(x) = Cx^m \frac{\tau_0\left(\frac{x}{a_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{a_2}\right)}{\tau_0\left(\frac{x}{b_1}\right) \tau_0\left(\frac{x}{b_2}\right)}$$

colla condizione

$$(11) \quad a_1 a_2 = \omega^m b_1 b_2.$$

Ogni funzione $\varphi(x)$ del second'ordine soddisfa all'equazione funzionale

$$(12) \quad \varphi(x) = \varphi\left(\frac{c}{x}\right)$$

essendo c una costante. Sappiamo infatti che indicando con y_0 un numero qualunque, $\varphi(x)$ assume il valore y_0 per due valori x_0 ed x_0' di ogni corona elementare: ma questi due valori soddisfano alla relazione

$$x_0 x_0' = \omega^m b_1 b_2 = c,$$

da cui

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{\omega^m b_1 b_2}{x}\right) = \varphi\left(\frac{c}{x}\right).$$

Risolvendo l'equazione

$$x^2 = b_1 b_2 \omega^m$$

si trovano quattro valori, o quattro posti del piano x non congruenti fra loro ri-

spetto ad ω , e sono

$$\begin{aligned}
e_1 &= \sqrt{b_1 b_2} & , & & e_2 &= -\sqrt{b_1 b_2} \\
e_3 &= \sqrt{\omega b_1 b_2} & , & & e_4 &= -\sqrt{\omega b_1 b_2} ;
\end{aligned}$$

questi posti ed i loro congruenti sono quelli in cui la funzione assume un valore doppiamente e in cui si annulla la derivata della funzione e si trovano quattro tali posti in ogni corona elementare.

14. Si è visto che se $\varphi(x)$ è una funzione qualunque di quelle definite a § 2, la funzione

$$x \frac{d\varphi(x)}{dx} ,$$

che chiameremo $\varphi_1(x)$, appartiene alla stessa famiglia delle $\varphi(x)$: ora cerchiamo quale sarà l'ordine di $\varphi_1(x)$ posto che $\varphi(x)$ sia del second'ordine.

Supponiamo prima distinti gl'infiniti b_1 e b_2 . Dalla considerazione degli sviluppi in serie della forma (1) si ricava che se in un posto $x = b$ la $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ si trova essere infinita, $\varphi(x)$ pure dovrà essere infinita per $x = b$, e $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ dovrà essere infinita per lo meno del second'ordine: essa è dunque certamente del second'ordine dove $\varphi(x)$ è infinita del primo: e perciò avrà due infiniti doppi per $x = b_1$, $x = b_2$, e quattro zeri semplici nei punti e_i definiti al § precedente. La funzione $\varphi_1(x)$ avendo gli stessi zeri ed infiniti della funzione $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, sarà una funzione del quart'ordine, con due infiniti doppi e quattro zeri semplici in ogni corona elementare.

Supponiamo invece gl'infiniti b_1 e b_2 coincidenti in b . In quel punto $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ sarà infinita del terz'ordine, e nulla nei posti

$$e_2 = -b \quad , \quad e_3 = +b \sqrt{\omega} \quad , \quad e_4 = -b \sqrt{\omega} \quad ,$$

e quindi $\varphi_1(x)$ sarà una funzione del terz'ordine con un infinito triplo e tre zeri semplici.

Mentre una funzione $\varphi(x)$ del second'ordine soddisfa all'equazione funzionale

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{c}{x}\right) ,$$

la funzione $\varphi_1(x)$ corrispondente soddisfa invece all'altra equazione

$$\varphi_1(x) = -\varphi_1\left(\frac{c}{x}\right),$$

come si ha dalla derivazione dell'equazione (12).

15. Sia ancora $\varphi(x)$ una funzione del second'ordine, che supporremo prima avere due infiniti distinti b_1 e b_2 , e formiamo il seguente prodotto:

$$\left(\varphi(x) - \varphi(e_1)\right) \left(\varphi(x) - \varphi(e_2)\right) \left(\varphi(x) - \varphi(e_3)\right) \left(\varphi(x) - \varphi(e_4)\right).$$

Questo prodotto non si altera cambiando x in ωx , e rappresenta una funzione appartenente alla classe delle $\varphi(x)$, e che diremo $\Phi(x)$: essa si annulla solo dove si annulla uno dei binomi

$$\varphi(x) - \varphi(e_i),$$

e questo avviene nei soli punti e_1, e_2, e_3, e_4 , essendo in ciascuno di questi punti il corrispondente binomio nullo del second'ordine, e diventa infinita con $\varphi(x)$ nei punti b_1 e b_2 , ma in ciascuno del quart'ordine. Dunque la $\Phi(x)$ è una funzione dell'ottavo ordine, con quattro zeri doppi e_1, e_2, e_3, e_4 e con due infiniti quadrupli b_1 e b_2 .

D'altra parte la funzione $\varphi_1^2(x)$ è pure dell'ottavo ordine, cogli stessi zeri e gli stessi infiniti e dello stesso grado di molteplicità; quindi il quoziente di $\varphi_1^2(x)$ e $\Phi(x)$ dovrà essere un numero costante, e si trova così che la $\varphi(x)$ del secondo ordine con due infiniti semplici soddisfa all'equazione differenziale

$$(13) \quad x \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = c \sqrt{\left[\varphi(x) - \varphi(e_1)\right] \left[\varphi(x) - \varphi(e_2)\right] \left[\varphi(x) - \varphi(e_3)\right] \left[\varphi(x) - \varphi(e_4)\right]}.$$

Supponiamo ora che la $\varphi(x)$ abbia un infinito doppio b , e formiamo il prodotto

$$\Phi(x) = \left(\varphi(x) - \varphi(e_2)\right) \left(\varphi(x) - \varphi(e_3)\right) \left(\varphi(x) - \varphi(e_4)\right)$$

essendo in questo caso $e_1=b$. Questo prodotto rappresenta una funzione della classe delle $\varphi(x)$ e del sest'ordine, con tre zeri doppi e_2, e_3, e_4 e un infinito sestuplo b : questa funzione non differirà che per un fattor costante da $\varphi_1^2(x)$ e si può concludere che una funzione $\varphi(x)$ del second'ordine con un infinito doppio soddisfa

all'equazione differenziale :

$$(14) \quad x \frac{d\varphi(x)}{dx} = c \sqrt{(\varphi(x) - \varphi(e_2)) (\varphi(x) - \varphi(e_3)) (\varphi(x) - \varphi(e_4))},$$

e in generale :

« Ogni funzione $\varphi(x)$ del second'ordine soddisfa ad un'equazione differenziale « della forma

$$x \frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{R(\varphi)},$$

« dove $R(\varphi)$ indica un polinomio razionale intero in φ del terzo o quarto grado ».

16. TEOREMA I. « Ogni funzione $\varphi(x)$ d'ordine qualunque p si può esprimere « razionalmente per mezzo di una funzione $\varphi(x)$ del second'ordine e della funzione « $\varphi_1(x)$ corrispondente ».

DIMOSTRAZIONE (*). Indichiamo con $\Phi(x)$ una funzione d'ordine qualunque p , e con $\varphi(x)$ una funzione del second'ordine avente lo stesso moltiplicatore, e distinguiamo tre casi :

1.º Supponiamo che la funzione $\Phi(x)$ soddisfi alla relazione (12) cui sappiamo soddisfare la $\varphi(x)$, cioè si abbia

$$\Phi(x) = \Phi\left(\frac{c}{x}\right),$$

dove c è un numero congruo rispetto ad ω al prodotto dei due valori che rendono $\varphi(x)$ infinita entro una stessa corona elementare. Dalla relazione che abbiamo ammessa, risulta che $\Phi(x)$ assume nel posto x_0 lo stesso valore che nel posto $\frac{c}{x}$, e per conseguenza dovrà essere d'ordine pari $2q$: siano

$$a_1, a_2, \dots, a_q, \frac{c}{a_1}, \frac{c}{a_2}, \dots, \frac{c}{a_q}$$

i posti degli zeri, e

$$b_1, b_2, \dots, b_q, \frac{c}{b_1}, \frac{c}{b_2}, \dots, \frac{c}{b_q}$$

(*) Non è necessario di fare avvertita la somiglianza fra la presente dimostrazione, e quella data da Liouville (e riportata nella *Théorie des fonctions elliptiques*, 2ª ediz. dai signori Briot e Bouquet) per la proposizione analoga sulle funzioni doppiamente periodiche. Lo stesso per una o due altre dimostrazioni dei §§ precedenti.

i posti degli'infiniti di $\Phi(x)$, essa funzione sarà rappresentata da

$$C \frac{(\varphi(x) - \varphi(a_1)) (\varphi(x) - \varphi(a_2)) \dots (\varphi(x) - \varphi(a_q))}{(\varphi(x) - \varphi(b_1)) (\varphi(x) - \varphi(b_2)) \dots (\varphi(x) - \varphi(b_p))},$$

perchè questa è nulla e infinita nei posti indicati e dell'ordine $2q$. E quindi dimostrato che $\Phi(x)$ si esprime razionalmente per $\varphi(x)$.

2.º Supponiamo invece di avere una funzione soddisfacente alla relazione

$$\Phi(x) = -\Phi\left(\frac{c}{x}\right).$$

Si è già osservato che essendo $\varphi(x)$ una funzione del second'ordine, la corrispondente $\varphi_1(x)$ ammette l'equazione funzionale (v. § 14)

$$\varphi_1(x) = -\varphi_1\left(\frac{c}{x}\right),$$

pertanto il quoziente

$$\frac{\Phi(x)}{\varphi_1(x)} = \varphi(x)$$

sarà una funzione della classe delle $\varphi(x)$, avente la proprietà

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}\left(\frac{c}{x}\right),$$

e si esprimerà razionalmente per $\varphi(x)$

$$\bar{\varphi}(x) = R(\varphi);$$

perciò

$$\Phi(x) = \varphi_1(x) \cdot R(\varphi)$$

ed il teorema è dimostrato anche in questo caso.

3.º La funzione $\Phi(x)$ sia ora affatto qualunque. Essendo ancora c un numero congruo rispetto ad ω al prodotto degli'infiniti della funzione del second'ordine $\varphi(x)$, si formino le funzioni

$$\chi(x) = \Phi(x) + \Phi\left(\frac{c}{x}\right)$$

$$\chi_1(x) = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{c}{x}\right).$$

Ambedue appartengono alla classe delle $\varphi(x)$ e danno le relazioni

$$\chi\left(\frac{c}{x}\right) = \chi(x)$$

$$\chi_1\left(\frac{c}{x}\right) = -\chi_1(x),$$

perci, essendo al solito R ed R_1 simboli di funzioni razionali, si avrà per i casi già considerati:

$$\Phi(x) + \Phi\left(\frac{c}{x}\right) = R(x)$$

$$\Phi(x) - \Phi\left(\frac{c}{x}\right) = \varphi_1 R_1(\varphi),$$

donde

$$(15) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \left(R(\varphi) + \varphi_1 R_1(\varphi) \right);$$

c. d. d.

TEOREMA II. « Ogni funzione $\Phi(x)$ è legata da una relazione algebrica colla « corrispondente funzione $\Phi_1(x) = x \frac{d\Phi(x)}{dx}$. »

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\varphi(x)$ una funzione del second'ordine avente lo stesso moltiplicatore di $\Phi(x)$, sarà per il teorema precedente

$$(15) \quad \Phi(x) = R(\varphi) + \varphi_1 R_1(\varphi),$$

e derivando e moltiplicando per x

$$\Phi_1(x) = \frac{dR}{d\varphi} \varphi_1 + x \frac{d\varphi_1}{dx} R_1 + \varphi_1^2 \frac{dR_1}{d\varphi};$$

ma essendo R_2 un nuovo simbolo di funzione razionale, si ha dal § 15.

$$(16) \quad \varphi_1^2 = R_2(x),$$

e derivando e moltiplicando per x ,

$$2x \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{dR_2}{d\varphi},$$

e sostituendo nella precedente

$$\Phi_1(x) = \frac{dR}{d\varphi} \varphi_1 + \frac{1}{2} R_1 \frac{dR_2}{d\varphi} + \varphi_1^2 \frac{dR_1}{d\varphi}$$

Se fra questa equazione e le altre due (15), (16) eliminiamo φ e φ_1 , otteniamo una relazione algebrica

$$F(\Phi, \Phi_1) = 0$$

ossia

$$F\left(\Phi(x), x \frac{d\Phi}{dx}\right) = 0$$

che è un'equazione differenziale algebrica di forma speciale, cui soddisfa ogni funzione $\Phi(x)$.

17. TEOREMA. « Una funzione $\Phi(x)$ d'ordine qualunque p assume tre valori legati « da un'equazione algebrica se si danno alla variabile tre valori x_1, x_2, x_3 , legati « dalla relazione

$$(17) \quad x_3 = \alpha x_1 x_2 \cdot »$$

DIMOSTRAZIONE. Pongasi

$$y_i = \Phi(x_i) \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

e si dia ad x_1 un valore determinato α ; corrispondentemente y_1 assumerà un valore pure determinato β . Si dia ad x_2 un valore determinato, a questo corrisponderanno p valori non congruenti per x_2

$$x'_2, x''_2, x'''_2, \dots, x^{(p)}_2,$$

ed inoltre tutti i valori congruenti a questi. Si avrà dunque dalla (17) una serie infinita di valori per x_3 corrispondentemente al valore α di x_1 ed ai valori considerati di x_2 , e fra questi valori di x_3 i seguenti

$$x'_3 = \alpha \alpha x'_2 \quad , \quad x''_3 = \alpha \alpha x''_2, \dots, x^{(p)}_3 = \alpha \alpha x^{(p)}_2$$

saranno non congruenti fra loro, ed uno qualunque degli altri sarà congruente ad uno di questi. Ad un valore di x_3 ed ai suoi congruenti corrispondendo un valore di y_3 ed uno solo, risulta che « ad un valore di y_2 corrispondono p valori di y_3 , « tenuto fisso x_1 . »

Di più, essendo y_2 funzione analitica di x_2 , (§ 1.) ed y_3 di x_3 , vice versa sarà x_2 funzione analitica di y_2 , quindi essendo

$$x_3 = a x_2,$$

sarà anche y_3 funzione analitica di x_2 e quindi di y_2 . Similmente si vedrebbe che y_2 è funzione analitica di y_3 , e che « ad un valore qualunque di y_3 corrispondono p « valori determinati di y_2 , tenuto fisso x_1 . »

Dunque abbiamo due variabili complesse y_2, y_3 , funzioni analitiche l'una dell'altra e tali che ad ogni valore senza eccezione della prima corrispondono p valori determinati per la seconda, e ad ogni valore della seconda corrispondono p valori determinati per la prima: per i principii della teoria delle funzioni potremo concludere da ciò che le due variabili y_2, y_3 sono legate da un'equazione algebrica di grado p in y_2, y_3 : e quest'equazione conterrà nei suoi coefficienti il valore β attribuito ad y_1 e tenuto fisso fin qui; sia

$$F(y_2, y_3, \beta) = 0$$

quest'equazione. Se ora teniamo fisso il valore y_2 e facciamo variare y_1 , potremo asserire collo stesso ragionamento già fatto che y_1, y_3 saranno legate da un'equazione algebrica di grado p in y_1, y_3 , ed è quindi dimostrato che nell'equazione scritta dianzi la variabile y_1 entra razionalmente e al grado p . Adunque y_1, y_2, y_3 sono legate da un'equazione algebrica

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0$$

di grado p al più rispetto a ciascuna variabile, c. d. d.

Segue da ciò che se quattro valori x_1, x_2, x_3, x_4 della variabile x sono legati da

$$x_4 = x_1 x_2 x_3,$$

i valori corrispondenti y_1, y_2, y_3, y_4 saranno legati da un'equazione algebrica; posto in fatti

$$x_4 = x_1 x'_2$$

$$x'_2 = x_2 x_3,$$

si hanno per il teorema precedente le relazioni algebriche

$$F(y_1, y'_2, y_4) = 0$$

$$F_1(y_2, y_3, y'_2) = 0$$

da cui eliminando y'_2 ,

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0.$$

E in generale, se m valori della variabile

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$$

sono legati da una relazione della forma

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} x_3^{\lambda_3} \dots x_m^{\lambda_m} = c,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sono esponenti interi, positivi o negativi, i valori corrispondenti

$$y_1, y_2, \dots, y_m$$

di $y = \Phi(x)$ saranno legati da un'equazione algebrica.

18. Trovate così le principali proprietà delle funzioni definite al § 2, passiamo a studiare le funzioni che nascono da quelle, sostituendo alla variabile x un'esponentiale

$$(18) \quad z = e^{ax}.$$

Tali funzioni si diranno funzioni ellittiche (*), e si indicheranno con $E(x)$; esse saranno dunque definite da

$$(19) \quad E(x) = \varphi(e^{ax}).$$

Ad ogni valore di x corrisponde un solo valore di z , e quindi un solo valore di $\varphi(z) = E(x)$, talchè:

I. « Le funzioni ellittiche sono monodrome. »

Se poniamo $e^{aK} = \omega$, sarà

$$\omega^m z = e^{a(x+mK)},$$

(*) La denominazione di *funzioni ellittiche*, applicata generalmente alle funzioni particolari $\operatorname{sn} x, \operatorname{cn} x, \operatorname{dn} x$, viene qui presa in senso più lato, e diremo col prof. Weierstrass *ellittiche* tutte le funzioni doppiamente periodiche che hanno il solo posto $x = \infty$, per posto singolare.

ossia per tutti i valori di z compresi nella serie

$$z = e^{a(x_0 + mK)} \quad (m \text{ intero}),$$

o ciò che è lo stesso, per tutti i valori di x della serie

$$x = x_0 + mK + m'K' \quad (m \text{ ed } m' \text{ interi}),$$

posto

$$K' = \frac{2\pi i}{a},$$

la funzione $E(x)$ prende lo stesso valore $E(x_0)$, e quindi:

II. « Le funzioni ellittiche sono doppiamente periodiche. »

La funzione $\varphi(z)$ ha per posti singolari $z = 0$ e $z = \infty$, cui corrisponde il solo posto $x = \infty$, talchè:

III. « Le funzioni ellittiche hanno un solo posto singolare, che è $x = \infty$. »

Dalle proprietà dimostrate a' §§ 3, 4 e 5 sui moltiplicatori delle funzioni $\varphi(x)$ risulta che

IV. « Una funzione ellittica non può avere periodi infinitesimi; ogni periodo H « si riduce alla forma

$$H = mK + m'K',$$

« dove K e K' sono due periodi elementari: il rapporto dei due periodi elementari « è complesso, a meno che non sia K' multiplo di K , nel quale caso (che corri- « sponde al caso di $\text{mod } \omega = 1$) si ha in sostanza un periodo unico; e la funzione « piglia tutti i valori di cui essa è suscettibile nel parallelogramma avente per ver- « tici i punti

$$mK + m'K', (m+1)K + m'K', mK + (m'+1)K', (m+1)K + (m'+1)K',$$

« e che si dirà parallelogramma elementare. »

Dai §§ 7 a 9 risulta che

V. « Una funzione ellittica diventa infinita, nulla, ed assume qualsiasi valore in « ogni parallelogramma elementare; essa ha tanti zeri quanti infiniti in ogni pa- « rallelogramma; essa diventa infinita almeno due volte in ogni parallelogramma. »

Si possono dividere le funzioni ellittiche in ordini, come le funzioni $\varphi(x)$, e non vi sono funzioni d'ordine inferiore al secondo.

Si possono poi introdurre funzioni aventi la proprietà

$$\theta(x + K) = -e^{(x+K)} \theta(x),$$

e analoghe alle $\tau(x)$, le quali serviranno per la costruzione effettiva delle funzioni ellittiche; e quindi dimostrare le proposizioni corrispondenti a quelle dei §§ 12 e seguenti, che suonano:

VI. « La somma dei p valori di x pei quali una funzione ellittica assume un certo valore entro un parallelogramma elementare, è costante qualunque sia questo valore, all'infuori di un multiplo dei periodi. »

VII. « Ogni funzione ellittica è legata alla sua derivata da un'equazione algebrica

$$F\left(E, \frac{dE}{dx}\right) = 0. »$$

VIII. « Ogni funzione ellittica d'ordine qualunque si esprime razionalmente per mezzo di una funzione ellittica del second'ordine e della sua derivata. »

IX. « Una funzione ellittica del second'ordine soddisfa ad un'equazione differenziale della forma

$$\frac{dE}{dx} = \sqrt{R(E)},$$

« dove $R(E)$ è un polinomio del 3° o 4° grado in E . »

X. « Se si danno alla variabile tre valori x_1, x_2, x_3 legati dalla relazione

$$x_3 = x_1 + x_2$$

« e posto $y = E(x)$, i valori corrispondenti di y saranno legati da un'equazione algebrica

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0;$$

« e più generalmente, se alla variabile si danno m valori $x_1, x_2, \dots, x_m$, legati dalla relazione

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = c,$$

« dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sono numeri razionali, si avrà fra i valori corrispondenti di y , cioè fra $y_1, y_2, \dots, y_m$ una relazione algebrica

$$F(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0. »$$

II.

Le funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica.

19. Essendo $y = f(x)$ una funzione monodroma, se, dati alla variabile tre valori x_1, x_2, x_3 legati da un'equazione lineare separatamente rispetto ad x_1, x_2 ed x_3 , e cioè della forma

$$(1) \quad a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_1 x_2 + a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_0 = 0,$$

i valori corrispondenti y_1, y_2, y_3 della funzione saranno legati da un'equazione algebrica di grado n al più rispetto ad y_1, y_2, y_3

$$(2) \quad F(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

si dirà che quest'equazione è *caratteristica* della funzione $y = f(x)$, rispetto all'equazione (1).

In una mia nota, gentilmente presentata al R. Istituto Lombardo di scienze e lettere dal chiar.^{mo} prof. Casorati, ed inserita nel t. XII, fasc. XIII dei Rendiconti di detto Istituto, ho dimostrato che le funzioni aventi un'equazione caratteristica soddisfano tutte ad equazioni funzionali della forma

$$(3) \quad f(x) = f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right),$$

dove i coefficienti a, b, c, d sono dati dalle seguenti formole:

$$(4) \quad \begin{cases} a = (a_3 a_1 - a'_2 a_0) \xi_\lambda \xi_\mu + (a_1 a'_1 - a_0 a'_0) \xi_\lambda + (a_3 a'_3 - a_2 a'_2) \xi_\mu + (a'_3 a'_1 - a_2 a'_0) \\ b = (a'_1 a'_2 - a'_0 a_3) (\xi_\lambda - \xi_\mu) \\ c = (a_0 a'_3 - a_1 a_2) (\xi_\lambda - \xi_\mu) \\ d = (a_3 a_1 - a'_2 a_0) \xi_\lambda \xi_\mu + (a_3 a'_3 - a_2 a'_2) \xi_\lambda + (a_1 a'_1 - a_0 a'_0) \xi_\mu + (a'_3 a'_1 - a_2 a'_0) \end{cases}$$

in cui ξ_λ, ξ_μ indicano due dei valori di x che fanno assumere ad y un determinato valore.

Ho pure dimostrato che con una trasformazione di variabili della forma

$$x = \frac{mz + m'}{z + 1}$$

è sempre possibile trasformare la $f(x)$ in una funzione $F(z)$ per la quale le equazioni funzionali (3) si riducono ad una delle forme

$$(5) \quad F(z) = F(z + \varpi) ,$$

oppure

$$(6) \quad F(z) = F(\alpha z) ,$$

forme irriducibili fra loro con trasformazione lineare.

Supporremo in ciò che segue la funzione $f(x)$ già trasformata, e quindi la sua equazione funzionale (3) già appartenente al tipo (5) o (6): e distingueremo 3 casi, secondo che la funzione avrà la proprietà (6) con $\text{mod } \alpha > 1$, o con $\text{mod } \alpha = 1$, o la proprietà (5).

20. La funzione $y = f(x)$ si supponga avere la proprietà espressa dall'equazione funzionale (6): sarà per conseguenza

$$(7) \quad b = 0 \quad , \quad c = 0 ,$$

cioè

$$(7) \quad a'_1 a'_2 - a'_0 a_3 = 0 \quad , \quad a_0 a'_3 - a_1 a_2 = 0 ,$$

e vogliamo esaminare se tale funzione è di quelle studiate nella prima parte, che hanno per proprietà caratteristica di non avere infiniti punti singolari, o ciò che è lo stesso, di non assumere uno stesso valore per un numero infinito di valori della variabile in una stessa corona elementare.

Incominciamo dall'osservare che se la funzione $y = f(x)$ ammettesse due moltiplicatori α ed α' tali che $\text{mod } \alpha > 1$ e $\text{mod } \alpha' > 1$, queste dovrebbero essere potenze di un solo moltiplicatore, perchè diversamente la funzione avrebbe moltiplicatori vicino quanto si vuole all'unità, e quindi (come dal § 5) non ammetterebbe in nessun punto x_0 uno sviluppo regolare in serie di potenze, cioè non sarebbe funzione analitica. Onde indicando con ω questo moltiplicatore più semplice di cui gli altri sono potenze, e con h un numero intero (positivo o negativo), si avrà

$$(8) \quad \frac{a}{a'} = \omega^h ,$$

ossia, posto per brevità

$$m_0 = a_3 a_1 - a'_2 a_0$$

$$m_1 = a_1 a'_1 - a_0 a'_0$$

$$m_2 = a_3 a'_3 - a_2 a'_2$$

$$m_3 = a'_1 a'_3 - a_2 a'_0 ,$$

la (8) si potrà anche scrivere

$$(9) \quad m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_1 \xi_\lambda + m_2 \xi_\mu + m_3 - \omega^h (m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_2 \xi_\lambda + m_1 \xi_\mu + m_3) = 0$$

21. Essendo y funzione analitica di x , viceversa sarà x funzione analitica polidroma di y e si potrà sempre determinare un campo T nel piano della variabile complessa y tale che ad ogni valore η di y dell'intorno di T corrispondano costantemente più di n valori distinti per x . Veniamo dunque a considerare, entro il campo T , $n + 1$ rami distinti della funzione x di y , i quali rami non ammettendo alcun punto di diramazione vengono a costituire come $n + 1$ funzioni distinte di y , che diremo

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}.$$

Se η è un punto del campo T in cui queste $n + 1$ funzioni non presentano alcuna singolarità e rimangono finite, esse si potranno sviluppare in serie di potenze intere e positive di $y - \eta$ convergenti tutte entro un determinato cerchio di centro η , che sarà tutto compreso entro il campo T ; questo cerchio verrà detto S , ed entro esso sarà:

$$\xi_r(y) = c_{r,0} + c_{r,1}(y - \eta) + c_{r,2}(y - \eta)^2 + \dots, \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n + 1).$$

Per ogni valore di y preso entro il campo T , ed in particolare entro il cerchio S , corrisponderanno due valori ξ_λ e ξ_μ ed un numero intero h che verificheranno certamente l'eguaglianza (9) (*); ma i valori degl'indici λ, μ e dell'esponente h potranno essi variare al variare di y ? Le considerazioni qui appresso hanno per oggetto di rispondere a questa domanda, importante per ciò che segue.

Se nel primo membro della (9) sostituiamo alle ξ_λ, ξ_μ i rispettivi sviluppi in serie e combiniamo gl'indici λ e μ in tutti i modi possibili, avremo $n(n + 1)$ serie di potenze convergenti entro il cerchio S ; siano queste

$$(10) \quad P_{\lambda\mu}(y - \eta; h),$$

dove h è un numero intero indeterminato. (Giova notare che prendendo tutte le disposizioni degli indici λ e μ , cioè prendendo $P_{\lambda\mu}$ come diverso da $P_{\mu\lambda}$, il caso di h negativo viene incluso in virtù della forma speciale del 1° membro dell'∞ (9).) Ad ogni valore di y dell'interno del cerchio corrisponde un valore di h pel quale una delle $n(n + 1)$ serie (10) si annulla necessariamente.

Ciò posto, non si avrà contemporaneamente

$$m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_1 \xi_\lambda + m_2 \xi_\mu + m_3 = 0, \quad m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_2 \xi_\lambda + m_1 \xi_\mu + m_3 = 0,$$

(*) V. la nota citata dei Rendiconti dell'Istituto Lombardo.

perchè ne risulterebbe

$$(m_1 - m_2)(\xi_\lambda - \xi_\mu) = 0,$$

ossia

$$m_1 = m_2,$$

che è in contraddizione colla (8), oppure

$$\xi_\lambda = \xi_\mu;$$

che è inammissibile. Dunque tutte le $n(n+1)$ espressioni

$$(11) \quad m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_2 \xi_\lambda + m_1 \xi_\mu + m_3$$

non saranno zero identicamente, perchè allora non si potrebbe annullare alcuna delle (10): e considereremo le $P_{\lambda\mu}$ corrispondenti a quelle combinazioni di indici per cui le (11) non sono identicamente nulle.

Considerando quelle espressioni (11) che non sono *identicamente* nulle, (cioè per qualunque valore di y preso entro S), esisterà per ciascuna di esse, che è una serie di potenze di $y - \eta$, un cerchio di raggio finito e tanto piccolo che entro esso la serie corrispondente non si annulli mai, o si annulli al più nel solo posto η : determiniamo il minimo di questi cerchi e descriviamo con raggio inferiore alla metà del raggio di questo cerchio minimo un nuovo cerchio che sia tutto contenuto in esso: diciamo σ questo nuovo cerchio, η_0 il suo centro; η_0 si dovrà evidentemente riguardare come appartenente ad S . Per nessun punto dell'interno del cerchio σ si annullerà una delle serie (11) e non diventerà neanche infinitesimo il valore di essa espressione: perciò il valore di h corrispondente ad ogni punto y dell'interno di σ non sarà mai infinito e si potrà assegnare un numero intero H maggiore di qualsiasi h .

Considerando allora le

$$Hn(n+1)$$

serie

$$(12) \quad P_{\lambda\mu}(y - \eta; h),$$

dove h invece di essere indeterminato ammette ora gli H valori

$$1, 2, 3, \dots, H,$$

potremo trasformare tutte queste serie in serie di potenze di $y - \eta_0$, convergenti entro tutto il cerchio σ . Per il teorema già richiamato sulla teoria delle Fun-

zioni, esiste per ciascuna di queste serie un cerchio di centro η_0 e di raggio finito entro cui la serie medesima non si annulla mai o si annulla al più nel centro η_0 : e se prendiamo il minimo σ_0 di questi cerchi, che pur è di raggio finito, in un punto y_0 di σ_0 alcuna delle serie (12) si può annullare, a meno di non essere identicamente zero. Ma questo è contro ciò che sappiamo, che anche per $y = y_0$ una delle (12) si deve annullare; dunque una delle (12) sarà identicamente nulla in tutto σ_0 e quindi in tutto S, e perciò si avrà una coppia determinata λ, μ ed un intero determinato h pel quale, per ogni valore di y sarà

$$m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_1 \xi_\lambda + m_2 \xi_\mu + m_3 - \omega^h (m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_2 \xi_\lambda + m_1 \xi_\mu + m_3) = 0.$$

22. A questo punto diamo agli $n + 1$ rami

$$\xi_1, \xi_2 \dots \dots \dots \xi_{n+1}$$

della funzione α di y , che fin qui erano qualunque, valori speciali: e cioè prendiamo i seguenti

$$\xi, \omega \xi, \omega^2 \xi, \dots \dots \dots \omega^n \xi,$$

dove ξ è un ramo qualunque della funzione; per quanto si è dimostrato, esisteranno tre numeri interi λ, μ, h tali che la (9) sia soddisfatta per qualunque valore di y preso in un certo campo; e nel caso attuale la (9) si riduce ad

$$(13) \quad (1 - \omega^h) m_0 \omega^{\lambda + \mu} \xi^2 + (m_1 \omega^\lambda + m_2 \omega^\mu - m_2 \omega^{h + \lambda} - m_1 \omega^{h + \mu}) \xi + m_3 (1 - \omega^h) = 0.$$

Ora, poichè questa eguaglianza dove λ, μ, h hanno valori costanti è soddisfatta per più di due valori di ξ , essa dovrà ridursi ad una identità, e quindi si avrà

$$(14) \quad \begin{cases} m_0 = 0 \\ m_1 (\omega^\lambda - \omega^{h + \mu}) + m_2 (\omega^\mu - \omega^{h + \lambda}) = 0 \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

e unendo la prima e l'ultima di queste colle (7) che già sappiamo dover essere verificate, troviamo tra i coefficienti a_i dell'equazione (1) le seguente quattro equazioni di condizione:

$$(15) \quad \begin{cases} a'_1 a'_2 - a'_0 a_3 = 0 \\ a_0 a'_3 - a_1 a_2 = 0 \\ a'_3 a'_1 - a'_0 a_2 = 0 \\ a_0 a'_2 - a_3 a_1 = 0: \end{cases}$$

e dobbiamo ora cercare quali conclusioni si possono ricavare da queste equazioni circa alla forma possibile per l'equazione (1).

23. Se si vuole che la definizione di equazione caratteristica abbia un significato, non bisogna che l'equazione (4) si possa scindere in un prodotto di due equazioni contenenti ciascuna meno di tre variabili. Quest'avvertenza si dovrà tener presente nella discussione che segue.

Di più m_1 è essenzialmente diverso da m_2 , cioè si ha

$$(16) \quad a_1 a'_1 - a_0 a'_0 - a_3 a'_3 + a_2 a'_2 > 0.$$

1.° Non possono essere tutti i coefficienti a_1 diversi da zero. Infatti ne risulterebbe

$$\frac{a_3}{a'_2} = \frac{a'_1}{a'_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_2}{a'_3} = k,$$

e la (1) diverrebbe:

$$(kx_1 + 1) (a_1 x_2 x_3 + a'_3 x_3 + a'_2 x_2 + a'_0) = 0,$$

il che è inammissibile per quanto si è detto.

2.° Non possono essere diverse da zero tutte le a_i che entrano in due qualunque dei binomi (15). Infatti nei primi due binomi entrano tutte le a_i , e se prendiamo il primo ed il terzo e supponiamo che le a_i che entrano in questi siano tutte diverse da zero, ne dovrà risultare

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_0 = 0,$$

e

$$\frac{a_3}{a'_2} = \frac{a'_1}{a'_0} = \frac{a_2}{a'_3} = k,$$

e la (1) si ridurrebbe a

$$(kx_1 + 1) (a'_3 x_3 + a'_2 x_2 + a'_0) = 0,$$

forma inammissibile come nel caso precedente.

3.° Non possono essere contemporaneamente diverse da zero neppure le a_i che entrano in uno solo dei binomi (15). Se fossero infatti

$$a'_1, a'_2, a'_0, a_3$$

diverse da zero, dovendo essere nulli per l'osservazione precedente tutti i sei prodotti

$$a_0 a'_3, a_1 a_2, a'_3 a'_1, a'_0 a_2, a_0 a'_2, a_3 a_1$$

ne risulterebbe

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a'_3 = 0 \quad , \quad a_0 = 0 \quad ,$$

e quindi sarebbe nullo il primo membro della (16), contro l'ipotesi.

Si è dunque condotti a concludere che

$$a'_1 a'_2 = a'_0 a_3 = a_0 a'_3 = a_1 a_2 = 0$$

$$a'_3 a'_1 = a'_0 a_2 = a_0 a'_2 = a_3 a_1 = 0 \quad ,$$

e dovendosi verificare la (16), almeno una delle coppie

$$a_i \quad , \quad a'_i \quad \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

dovrà essere diversa da zero.

Supponendo allora a_0 ed a'_0 diverse da zero, ne segue

$$(17) \quad \quad \quad a_3 = a'_3 = a_2 = a'_2 = 0 \quad ,$$

e la (1) si riduce ad

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 x_2 x_3 + a'_1 x_1 + a'_0 = 0 \quad ,$$

e supponendo invece a_2 ed a'_2 diverse da zero, viene

$$(18) \quad \quad \quad a_1 = a'_1 = a_0 = a'_0 = 0 \quad ,$$

e la (1) diventa

$$a_2 x_1 x_3 + a_3 x_1 x_2 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0 \quad .$$

24. Riprendendo le formole (4) nell'ipotesi che siano soddisfatte le (17), esse danno:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (a_1 a'_1 - a_0 a'_0) \xi_\lambda \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = (a_1 a'_1 - a_0 a'_0) \xi_\mu \end{array} \right. ,$$

e la (8) diventa

$$(19) \quad \quad \quad \frac{\xi_\lambda}{\xi_\mu} = \omega^h \quad ,$$

e scrivendo invece le (4) nell'ipotesi (18), si ha

$$\begin{cases} a = (a_3 a'_3 - a_2 a'_2) \xi_\mu \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = (a_3 a'_3 - a_2 a'_2) \xi_\lambda, \end{cases}$$

e la (8) dà allora

$$(19') \quad \frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda} = \omega^h,$$

e le formole (19) e (19') danno la risposta alla domanda propositaci a § 20, se cioè le funzioni $f(x)$ che hanno un'equazione caratteristica rispetto alla (1), ridotte con una trasformazione lineare ad avere la proprietà

$$f(x) = f(ax),$$

coincidono colle funzioni studiate nella prima parte di questo lavoro. Tali formole ci dicono infatti che se η è un valore che la funzione y di x assume per più di n valori di x , e per esempio per $n+1$ valori

$$\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{n+1},$$

fra questi $n+1$ se ne troveranno necessariamente due ξ_λ e ξ_μ , legati dalla relazione

$$\xi_\lambda = \omega^h \xi_\mu,$$

o, ciò che è lo stesso, la funzione non può assumere un valore qualsiasi per più di n valori non congruenti di x , e questo basta a dimostrare che essa appartiene alle funzioni $\varphi(x)$ definite al § 2. Viceversa al § 17 si è dimostrato che ogni funzione $\varphi(x)$ ammette un'equazione caratteristica (*).

(*) Non si è fatto uso, nella discussione precedente, della seconda equazione delle (14); questa non dà infatti nulla di nuovo. Essendo $m_2 = 0$ p. e., essa si riduce ad

$$m_1 (\omega^\lambda - \omega^{h+\mu}) = 0,$$

e non potendo essere $m_1 = 0$, ne risulta $\lambda = h + \mu$, il che è dato anche dalla (19) quando si ponga

$$\xi_\lambda = \omega^\lambda \xi, \quad \xi_\mu = \omega^\mu \xi.$$

25. Abbiassi ora una funzione $y = f(x)$ colla proprietà espressa dall'equazione funzionale (5), cioè periodica: sarà necessariamente

$$c = 0 \quad , \quad a = d ,$$

ossia

$$(20) \quad \begin{cases} a_0 a'_3 - a_1 a_2 = 0 \\ a_1 a'_1 - a_0 a'_0 - a_3 a'_3 + a_2 a'_2 = 0 . \end{cases}$$

La funzione $y = f(x)$ monodroma non può avere più di due periodi elementari, ai quali si riconducono tutti gli altri: indicandoli con K e K' e con h ed h' numeri interi qualunque, potremo porre

$$\frac{b}{d} = h K + h' K'$$

o, ritenendo le notazioni introdotte a § 20, coll'avvertenza che ora $m_1 = m_2$, e ponendo di più

$$n_0 = a'_1 a'_2 - a'_0 a_3 ,$$

avremo

$$(21) \quad n_0(\xi_\lambda - \xi_\mu) - (hK + h'K') (m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_1 (\xi_\lambda + \xi_\mu) + m_3) = 0 .$$

Ciò posto, un ragionamento del tutto analogo a quello dei §§ 21 e seguenti ci persuaderà che deve esistere una coppia determinata di valori per gl'indici λ e μ , e due numeri interi corrispondenti h ed h' , pei quali l'eguaglianza (21) è soddisfatta per tutti i valori di y compresi entro un certo campo, cioè pei quali quest'eguaglianza si riduce ad una identità. Prendendo allora, in luogo dei rami qualunque

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n+1}$$

della funzione x di y , i particolari

$$\xi , \xi + K , \xi + 2K , \dots \xi + nK ,$$

dove ξ è un ramo qualunque, si avranno valori determinati λ , μ , h , h' pei quali la (21), in cui ora

$$\xi_\lambda = \xi + \lambda K \quad , \quad \xi_\mu = \xi + \mu K ,$$

è soddisfatta per tutti i valori di y contenuti entro un certo campo, e ordinando la (21) essa si riduce ad

$$m_0 \xi^2 + \{m_0 K(\lambda + \mu) + 2m_1\} \xi + m_1 K(\lambda + \mu) + m_3 - \frac{n_0(\lambda - \mu)K}{hK + h'K'} = 0.$$

Ma se questa è soddisfatta per più di due valori di ξ , come è per l'appunto il caso, essa si riduce ad una identità, cioè deve essere

$$(22) \quad \begin{cases} m_0 = 0 \\ m_1 = 0 \\ m_3 = \frac{n_0(\lambda - \mu)K}{hK + h'K'} \end{cases},$$

e sostituendo questi risultati nelle (4) troviamo, tenendo conto delle (20),

$$\begin{cases} a = m_3 \\ b = n_0(\xi_\lambda - \xi_\mu) \\ c = 0 \\ d = m_3 \end{cases},$$

da cui

$$\frac{b}{d} = \frac{n_0(\xi_\lambda - \xi_\mu)}{m_3} = hK + h'K';$$

e quest'ultima formola dimostra che se η è un valore qualunque di y che la funzione $y = f(x)$ assume per più di n valori di x , p. es. per

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1},$$

fra questi $n + 1$ valori se ne trovano necessariamente due, ξ_λ e ξ_μ , legati dalla relazione

$$\xi_\lambda = \xi_\mu + c,$$

o, ciò che è lo stesso, la funzione non può assumere un valore qualsiasi per più di n valori che non differiscono fra loro per multipli dei periodi. Con ciò è dimo-

strato che se la funzione $y=f(x)$ è semplicemente periodica, essa si esprime in funzione razionale di una esponenziale, e se è doppiamente periodica, essa è di quelle che conservano per tutti i valori finiti di x il carattere razionale, cioè di quelle che abbiamo dette ellittiche.

26. Si può cercare quale deve essere la forma dell'equazione (1) nel caso che la funzione $y=f(x)$ sia periodica; e perciò bisogna ricordare che i coefficienti a_i sono legati dalle relazioni (20) e (22), cioè:

$$(23) \quad \begin{cases} a_0 a'_3 - a_1 a_2 = 0 \\ a_3 a_1 - a'_2 a_0 = 0 \\ a_1 a'_1 - a_0 a'_0 = 0 \\ a_3 a'_3 - a_2 a'_2 = 0, \end{cases}$$

ma nel tempo stesso i binomii

$$(24) \quad \begin{cases} a'_3 a'_1 - a_2 a'_0 \\ a'_1 a'_2 - a_3 a'_0 \end{cases}$$

devono essere diversi da zero.

Non tutti i coefficienti a_i possono essere diversi da zero: in fatti si potrebbe scrivere, se ciò fosse,

$$\frac{a_3}{a'_2} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_2}{a'_3} = \frac{a'_1}{a'_0} = h,$$

e si giungerebbe a scomporre l'equazione (1) in altre contenenti meno di tre variabili, il che è inammissibile; così non possono essere diversi da zero i coefficienti a_i nei tre primi binomi (23). Non possono neanche essere diversi da zero i coefficienti a_i che entrano nei primi due binomii (23), perchè in tal caso dovrebbero essere zero a'_1 e a'_0 , e quindi i binomii (24) non sarebbero diversi da zero, contro l'ipotesi. Deve dunque essere

$$a_0 a'_3 = a_1 a_2 = a_1 a_3 = a_0 a'_2 = 0.$$

Ciò premesso, distingueremo due casi:

1.º Sia a_0 diverso da zero. Allora dovrà essere

$$a'_3 = a'_2 = 0,$$

e con queste

$$a_1 = 0, \quad \text{o} \quad a_2 = a_3 = 0.$$

Ma se $a_2 = a_3 = 0$, sono nulli i binomii (24), e se $a_1 = 0$, dalla 3^a delle (23) segue $a'_0 = 0$, e sono pure nulli i binomii (24), contro l'ipotesi: è dunque inammissibile l'ipotesi a_0 diverso da zero.

2.° Sia invece $a_0 = 0$. Con questo può essere

$$a_1 = 0, \text{ oppure } a_2 = a_3 = a'_1 = 0.$$

Ma in quest'ultima ipotesi segue che le (24) si annullano: dobbiamo quindi ammettere la prima ipotesi, e l'equazione (1) prende la forma

$$a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + a'_0 = 0$$

colla condizione

$$a_2a'_2 - a_3a'_3 = 0,$$

e ponendo

$$\frac{a_2}{a'_3} = \frac{a_3}{a'_2} = k$$

viene

$$(a'_3x_3 + a'_2x_2)(kx_1 + 1) + a'_1x_1 + a'_0 = 0.$$

Si osservi per ultimo che essendo

$$\frac{b}{d} = hK + h'K'$$

il numero k sarà necessariamente razionale, come risulta dalla terza delle (22); può essere anche

$$k = 0,$$

ed allora l'equazione (1) prende la forma più semplice

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + a'_0 = 0.$$

27. Dalla nota citata (inserita nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo) e dai §§ 19 e seg. di questo lavoro risulta che ogni funzione che ammette un'equazione caratteristica ammette anche equazioni funzionali della forma

$$(3) \quad f(x) = f\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right),$$

dove a, b, c, d , sono composti coi coefficienti a_i dell'equazione (1) e con due valori ξ_λ, ξ_μ , che si trovano sempre fra $n + 1$ valori ξ di x che fanno assumere ad $y = f(x)$ un determinato valore η . Di queste equazioni funzionali ne potremo dunque avere diverse, e anzi infinite, perchè si può scegliere comunque il valore η e per uno stesso valore di η potranno esistere più coppie ξ_λ, ξ_μ che daranno luogo a tali equazioni.

Ora è dimostrato (Nota citata, § III) che se l'espressione

$$\delta = -4(a'_1 a'_2 - a'_0 a_3)(a_1 a_2 - a_0 a'_3) + (a_0 a'_0 + a_3 a'_3 - a_1 a'_1 - a_2 a'_2)^2$$

è nulla, tutte queste equazioni si possono ridurre a relazioni di periodicità sostituendo alla variabile x una variabile z colla posizione

$$x = \frac{mz + m'}{z + 1}$$

e considerando la y come funzione di z ; se invece δ è diverso da zero, si può fare la sostituzione in modo che sia in tutte le equazioni (3) $b = 0$ e $c = 0$, e si viene così ad avere tutte le equazioni funzionali nella forma

$$f(x) = f(\omega_\eta x),$$

indicando con ω_η la quantità $\frac{a}{d}$ il cui valore dipende dal valore scelto per η .

Or bene, se una sola delle ω_η è tale che il suo modulo differisca dall'unità, si è nel caso contemplato a §§ 20 e seg. e valgono tutte le conclusioni ivi ottenute: il caso che ci rimane da esaminare è quello in cui tutte le ω_η hanno il loro modulo eguale all'unità.

Intanto sappiamo doversi escludere il caso in cui le ω_η sono della forma

$$e^{2\pi s i},$$

dove s è un numero reale che può diventare piccolo quanto si vuole, e così il caso in cui s è un numero incommensurabile, perchè abbiamo dimostrato (§ 3) che in simili casi la funzione non ammetterebbe in alcun punto x uno sviluppo in serie di potenze di x , cioè non sarebbe una funzione analitica nel senso stabilito. Se dunque la funzione $f(x)$ ha tutti i suoi moltiplicatori ω_η col modulo uguale ad uno, si può asserire che essi saranno tutti della forma

$$\omega_\eta = e^{\frac{2h\pi i}{k}},$$

dove h e k sono numeri interi primi fra loro. Ed il numero k non potrà diventare grande quanto si vuole, perchè altrimenti prendendo l'intero μ in modo che sia

$$\mu h \equiv 1 \pmod{k}$$

il che è sempre possibile, si avrebbe

$$\omega_\eta^\mu = e^{\frac{2\pi i}{h}}$$

cioè un moltiplicatore della forma $e^{2s\pi i}$ con s infinitesimo, il che non è possibile.

Dunque tutte le possibili ω_η saranno potenze intere delle seguenti quantità, in numero finito

$$e^{\frac{2\pi i}{k_1}}, e^{\frac{2\pi i}{k_2}}, e^{\frac{2\pi i}{k_3}}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{k_p}},$$

e quindi saranno potenze di una sola

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}},$$

dove k è il minimo multiplo dei numeri interi $k_1, k_2, \dots, k_p$. Da ciò risulta che nel caso che ora esaminiamo, i moltiplicatori della funzione saranno in numero finito, ed avranno i $k - 1$ valori

$$e^{\frac{2\pi i}{k}}, e^{\frac{4\pi i}{k}}, e^{\frac{6\pi i}{k}}, \dots, e^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}.$$

Ma per ogni valore di η (preso entro un certo campo) esistono due valori ξ_λ, ξ_μ pei quali

$$\frac{a}{d} = \omega_\eta,$$

cioè (v. formole (4))

$$m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_1 \xi_\lambda + m_2 \xi_\mu + m_3 - \omega_\eta (m_0 \xi_\lambda \xi_\mu + m_2 \xi_\lambda + m_1 \xi_\mu + m_3) = 0;$$

posto il primo membro di questa equazione eguale a

$$P(\xi_\lambda, \xi_\mu; h),$$

dove h è l'esponente

$$1, 2, 3, \dots, 0, k - 1,$$

che bisogna dare ad ω per ottenere ω_η , per ogni valore di η entro un certo campo esisteranno due valori ξ_λ, ξ_μ pei quali una delle P sarà nulla.

Ciò posto, essendo y funzione analitica di x , viceversa x è funzione analitica di y e si potrà sempre prendere nel piano della variabile complessa y , un campo T entro il quale non esiste alcun punto di diramazione per $n + 1$ rami

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$$

della funzione x : e nell'intorno di un punto η del campo T gli $n + 1$ rami di funzione si possono sviluppare in altrettante serie di potenze di $y - \eta$, convergenti entro cerchi determinati. Sostituendo nella P a ξ_λ, ξ_μ questi sviluppi, la P si svilupperà pure in serie di potenze, e dando ad h i $k - 1$ valori

$$1, 2, 3, \dots, k - 1$$

e a λ, μ i valori $1, 2, 3, \dots, n + 1$, avremo rappresentato con

$$P(\xi_\lambda, \xi_\mu; h)$$

serie di potenze convergenti entro un certo cerchio di centro η , in numero di

$$n(n + 1) (k - 1).$$

Ora se nessuna di queste serie è nulla identicamente, esisterà per ciascuna di esse, e quindi per tutte, un cerchio di centro η e di raggio ϵ tanto piccolo che entro esso cerchio tutte le P siano sempre diverse da zero: questo non essendo, perchè per ogni valore η anche dell'interno del cerchio ϵ si annulla una P, risulta che deve esistere un sistema di indici λ, μ ed un numero intero h per cui sarà

$$P(\xi_\lambda, \xi_\mu; h) = 0$$

per tutti i valori di y compresi entro un certo campo, e quindi per tutti i valori non singolari di y . Si può dunque concludere che posto

$$\xi_\mu = \frac{(\omega_\eta m_2 - m_1)\xi_\lambda - m_3(1 - \omega_\eta)}{m_0(1 - \omega_\eta)\xi_\lambda + m_2 - \omega_\eta m_1}$$

per quel determinato ω_η , sarà

$$f(\xi_\mu) = f(\xi_\lambda),$$

ossia che la funzione $y = f(x)$ avrà l'equazione funzionale

$$f(x) = f\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right),$$

posto

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \omega_\eta m_2 - m_1 \\ \beta = -m_3(1 - \omega_\eta) \\ \gamma = m_0(1 - \omega_\eta) \\ \delta = m_2 - \omega_\eta m_1. \end{array} \right.$$

Se indichiamo

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \text{ con } \theta x, \quad \frac{\alpha \theta x + \beta}{\gamma \theta x + \delta} \text{ con } \theta^2 x,$$

ad ogni posto x corrispondono posti θx , $\theta^2 x$, . . . in cui la funzione riprende lo stesso valore. Se questi sono costantemente in numero finito, la funzione sarà razionale: se in numero infinito, la funzione si potrà ricondurre da capo alle $\varphi(x)$ o alle funzioni ellittiche, secondo che sarà

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma$$

diverso da zero o nullo.

28. Riassumendo, troviamo che tutte le funzioni monodrome aventi un'equazione caratteristica sono riducibili con una trasformazione lineare

a funzioni razionali $R(x)$,

a funzioni $\varphi(x)$,

a funzioni razionali di una esponenziale $R(e^{ax})$

o a funzione ellittiche $\varphi(e^{ax})$,

e che le forme più generali di tali funzioni sono le seguenti:

$$R(x), \quad \varphi\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right), \quad R\left(e^{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right), \quad \varphi\left(e^{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right),$$

dove R è simbolo di funzione razionale, e φ è il simbolo delle funzioni definite a § 2.

Settembre 1879.