

BEPPO LEVI

BEPPO LEVI

Abbaco da 1 a 20. Il primo libro d'aritmetica

Levi Editore, Parma, pp.60 (1922)

illustrazioni di ELLEBI

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Levi_1922_1>



Pezzo L. 3,50



BEPPOLEVI

BBACO

DA

1

A

20



B. LEVI editore
PARMA

Illustrazioni di ELLEBI

Omaggio a...
BEPPPO LEVI



DA 1 A 20

IL PRIMO LIBRO D'ARITMETICA



B. LEVI



editore



PARMA

PROPRIETÀ ARTISTICA E LETTERARIA

DALL'OFFICINA DELL'ANONIMA FERDINANDO ZAFFERRI - PARMA

PROEMIO

Il presente libretto vorrebbe rompere più di una tradizione. E se, per il bambino, ho tentato di farne veramente il primo libro di aritmetica, - rompendo con ciò la tradizione che considera la più elementare iniziazione matematica come esclusivamente orale -; esso vorrebbe, per l'insegnante, essere qualcosa di più e di diverso. Vorrebbe essere un richiamo ed un suggerimento contro pregiudizi che, riguardo all'aritmetica e alla matematica in generale, dominano nella didattica corrente; direi di più - (in quanto il presente libretto si innesta a un programma di pedagogia matematica al quale spero poter dare svolgimento) dominano il pensiero comune delle persone colte. ==
= Onde al lettore adulto, all'insegnante, mi occorre rivolgere una preghiera: che, se per avventura qualche particolare del libro gli paresse contrario a idee e precetti accolti ormai come fondamento pedagogico incontrovertito, voglia ad essi rinunciare momentaneamente, e proseguire la lettura con animo benevolo. Io spero e credo che ben presto sottenterà la convinzione. ==
= Ad ogni modo mi è parso necessario di illustrare il concetto informatore del libro e lo svolgimento di esso, mediante alcune note didattiche; le quali, per non turbare l'armonia del lavoro, ho raccolte nelle ultime pagine. E se in queste il lettore troverà qualche lunghezza, e forse anche qualche leggero spunto polemico, me ne voglia grazia, accusandone il desiderio e la ricerca di prevenire facili equivoci nell'interpretazione del mio pensiero.

COMMIATO

Nell'abbandonare al pubblico questo tenuissimo fra i lavori miei, nel quale pure ho posto tanto e vario affetto, ch'io dica agli altri bimbi che lo leggeranno, i nomi di Voi, che siete il centro della mia vita:

==GIULIO, che prima mi facesti nascere il pensiero di dare, per essi, un poco di quanto giornalmente formava per te l'intelletto paterno.

==LAURA, che questo volumetto amasti chiamare il tuo libro.

==Dolce e ridente pupa nostra, EMILIA, che balbetti appena, eppur tanto presto lo terrai fra le mani.

==E che io esprima un ringraziamento alla ANONIMA FERDINANDO ZAFFERRI e alla Maestranza di essa per le cure poste alla riuscita di questo lavoro, per molti rispetti nuovo.

- 1 - Ecco, kimbi, un cesto d'ova.
- 2 - Toi, la chioccia che le cova.
- 3 - I pulcini ormai son nati.
- 4 - E galletti or diventati.

- 5 - Gallo alfin superbo e fiero
Della corte tien l'impeto.



1 2 3 4 5

1 2 3 4 5
uno due tre quattro cinque

6 7 8 9
sei sette otto nove

dopo 1 viene 2  dopo 2 viene 3

 dopo 3 viene 4 

dopo 4 viene 5  dopo 5 viene 6

 dopo 6 viene 7 

dopo 7 viene 8  dopo 8 viene 9

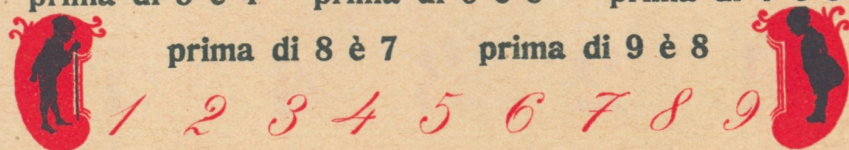


prima di 2 vi è 1 prima di 3 vi è 2

prima di 4 vi è 3

prima di 5 è 4 prima di 6 è 5 prima di 7 è 6

prima di 8 è 7 prima di 9 è 8



Nino à 3 anni


dopo 3 viene 4


l'anno venturo

Nino



à 4 anni; à un anno
di più.



1 2 3 4

dopo 3 viene 4

4 è uno più di 3

$$3 + 1 = 4$$

3 più 1 fa 4  3 più 1 eguale 4



prima di 4 vi è 3  3 è uno meno di 4

1 2 3 4 5 6



Anna à 5 anni,
io ne
ò 6



6 viene dopo 5

Io ò 1 anno più di Anna

$$5 + 1 = 6$$

5 più 1 eguale 6



Da 8 giorni Anna à la bambola nuova

dopo 8 viene 9

domani saranno 9 giorni; sarà un giorno di più.

$$8 + 1 = 9$$



Nino

Leo



Anna

sono 3 bambini.



Un
bimbo di
più fa 4
bimbi.



Nino Leo

Anna Emilia

sono 4 bambini.



Pollice indice e medio sono 3 dita.

Un dito di più fa 4 dita.



Pollice indice medio e anulare sono 4 dita.



3 dita di una mano e 1 dell'altra sono ancora 4 dita



Piero giuoca alle costruzioni:
egli aveva 8 mattoncini,
ma la mamma glie ne
porse ancora 1;

$$8 + 1 = 9.$$

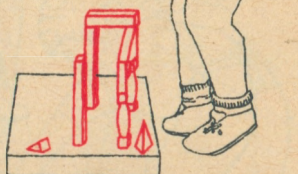
Piero giuoca con 9 mattoncini.



Piero à 8 noci; Gino ne à 1:

$$8 + 1 = 9.$$

I due bimbi insieme àno 9 noci.



Dopo 3 viene 4  4 è 1 più di 3

$$3 + 1 = 4$$

Dopo 8 viene 9  9 è 1 più di 8

$$8 + 1 = 9$$



Dopo 2 viene 3  3 è 1 più di 2

$$2 + 1 = 3$$

Dopo 1 viene 2  1 + 1 = 2



+ si legge **più**



= si legge **eguale**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$$1 + 1 = 2$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3 + 1 = 4$$

$$4 + 1 = 5$$

$$5 + 1 = 6$$

$$6 + 1 = 7$$

$$7 + 1 = 8$$

$$8 + 1 = 9$$

$$9 + 1 = 10$$



10

dieci

11

undici

12

dodici

13

tredici

14

quattordici

15

quindici

16

sedici

17

diciassette

18

diciotto

19

dicianove

20

venti

$$10 + 1 = 11$$

$$11 + 1 = 12$$

$$12 + 1 = 13$$

$$13 + 1 = 14$$

$$14 + 1 = 15$$

$$15 + 1 = 16$$

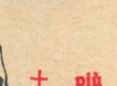
$$16 + 1 = 17$$

$$17 + 1 = 18$$

$$18 + 1 = 19$$

$$19 + 1 = 20$$

= eguale





3 bambini stanno giocando in giardino: arriva di corsa Piero; e così saranno 4. Ma anche Maria viene dietro correndo; e **saranno 5.**

Sono ora 2 bambini di più: sono 5 bambini che giocano.



dopo 3 viene 4  **dopo 4 viene 5**

5 è 2 più di 3

$$3 + 2 = 5$$

3 più 2 fa 5  3 più 2 eguale 5

Lia à 4 anni.



L'anno venturo ne avrà 5;

l'anno dopo ne avrà 6

e verrà a scuola.

Ancora 2 anni

e poi Lia verrà in prima.



Dopo 4 viene 5  **dopo 5 viene 6**
4 + 2 = 6



dopo un numero viene un altro, 
dopo questo viene un altro,
e io dico **più 2.**

Dopo 7 viene 8  **dopo 8 viene 9**
7 + 2 = 9



4 + 2 viene dopo 4 + 1

7 + 2 viene dopo 7 + 1

2 viene dopo 1



4 + 2 viene dopo 4 + 1

3 + 2 viene dopo 3 + 1

2 + 2 viene dopo 2 + 1



4 + 1 = 5 4 + 2 = 6

3 + 1 = 4 3 + 2 = 5 2 + 1 = 3 2 + 2 = 4

1 + 1 = 2 1 + 2 = 3 6 + 1 = 7 6 + 2 = 8

9 + 1 = 10 9 + 2 = 11



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

1 + 2 = 3 2 + 2 = 4 3 + 2 = 5

4 + 2 = 6 5 + 2 = 7 6 + 2 = 8

7 + 2 = 9 8 + 2 = 10 9 + 2 = 11



pagina 10

dopo 1 viene 2



dopo 2 viene 3



dopo 4 + 1 viene 4 + 2



dopo 4 + 2 viene 4 + 3

4 + 2 = 6

dopo 6 viene 7

4 + 3 = 7



4 + 1 = 5



4 + 2 = 6



4 + 3 = 7



dopo 3 + 2 viene 3 + 3

3 + 2 = 5

dopo 5 viene 6

3 + 3 = 6



3 + 1 = 4



3 + 2 = 5



3 + 3 = 6



7 + 2 = 9

dopo 9 viene 10

7 + 3 = 10

pagina 11

$$\begin{array}{lll} 1 + 3 = 4 & 2 + 3 = 5 & 3 + 3 = 6 \\ 4 + 3 = 7 & 5 + 3 = 8 & 6 + 3 = 9 \\ 7 + 3 = 10 & 8 + 3 = 11 & 9 + 3 = 12 \end{array}$$



Nel giardino stavano giocando 4 bambini;
giunsero di corsa Piero e Maria e così furono
2 bambini di più furono $4 + 2$ bambini,
 furono 6.

E Tonino, che era rimasto a guardare da lontano,
venne a giocare esso pure, e così entrò nel giuoco
 ancora

1 bambino di più furono 7 bambini.

$$4 + 2 = 6$$

dopo 6 viene 7

dopo $4 + 2$ viene $4 + 3$

$$4 + 3 = 7.$$

4 bambini giocavano prima nel giardino;
3 nuovi sono ora venuti.



Ora giocano

$$4 \text{ bambini} + 3 \text{ bambini} = 7 \text{ bambini.}$$

Un pastorello conduceva al pascolo 4 pecore; un
vicino lo pregò di guardare anche le sue 3.

$$4 \text{ pecore} + 3 \text{ pecore} = 7 \text{ pecore.}$$

Così il pastorello ebbe da custodire 7 pecore:



Nell'aia della cascina vi sono 4 galline e 3 anitre;
sono in tutto

$$4 + 3 = 7 \text{ animali da cortile.}$$



Dopo 1 viene 2 dopo 2 viene 3 dopo 3 viene 4

Il numero dopo $6 + 1$ è $6 + 2$



Il numero dopo $6 + 2$ è $6 + 3$



Il numero dopo $6 + 3$ è $6 + 4$

$$6 + 3 = 9$$

dopo 9 viene 10

$$6 + 4 = 10$$

6 + 4 viene dopo 6 + 3

3 + 4 viene dopo 3 + 3

1 + 3 = 4 1 + 4 = 5 3 + 3 = 6 3 + 4 = 7

7 + 3 = 10 7 + 4 = 11

1 + 4 = 5 2 + 4 = 6 3 + 4 = 7
4 + 4 = 8 5 + 4 = 9 6 + 4 = 10
7 + 4 = 11 8 + 4 = 12 9 + 4 = 13

5 viene dopo 4

1 + 5 viene dopo 1 + 4

3 + 5 = 8 1 + 5 = 6 8 + 5 = 13

1 + 5 = 6 2 + 5 = 7 3 + 5 = 8
4 + 5 = 9 5 + 5 = 10 6 + 5 = 11
7 + 5 = 12 8 + 5 = 13 9 + 5 = 14

Ed ora, qual è quel bambino che non sa fare + 6?

6 viene dopo 5

4 + 6 viene dopo 4 + 5

e + 7? e + 8? e + 9? e + 10?

4 + 5 = 9 4 + 6 = 10 4 + 7 = 11 4 + 8 = 12
4 + 9 = 13 4 + 10 = 14

SOMMA e ADDIZIONE

$$4 + 3 = 7$$

7 è la somma di 4 e 3

dicendo $4 + 3 = 7$ ò fatto un'addizione

$$2 + 8 = 10$$

ò fatto l'addizione $2 + 8 = 10$

la somma di 2 e 8 è 10.

Ed ora rileggiamo:



Alla pagina 6 abbiamo contato i mattoncini di Piero.
Piero aveva 8 mattoncini, la mamma gli ne diede ancora 1: così Piero ne ebbe 9:

$$8 + 1 = 9:$$

ne ebbe la somma di 8 e 1.



Alla pagina 8 abbiamo contato i bambini nel giardino.
Nel giardino giocavano 3 bambini, 2 nuovi ne sono arrivati: così furono in giardino

la somma

3 + 2 bambini.



Alla pagina 13 abbiamo contato le pecorine.

Un pastorello guardava 4 pecore: 3 altre glie ne furono aggiunte; il pastorello dovette così guardare la somma $4 + 3$ pecorine.



Sentite ancora:

Laura ed Emilia hanno raccolto delle nocciole. Giunte a casa, Laura mette sul tavolo 6 nocciole, Emilia 3. Trovano così la somma $6 + 3 = 9$ nocciole.



Ma Emilia fruga in fondo in fondo alla sua tasca, e ne fa venir fuori ancora una nocciola. Emilia aveva dunque raccolta 1 nocciola

di più.

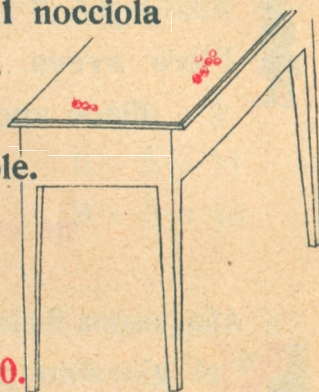
Aveva raccolte 4 nocciole.

Le due bimbe insieme àno

una nocciola di più di $6 + 3$.

Ne hanno la somma $6 + 4 = 10$.

Buone sorelline, ne fanno parti uguali: sapete voi quante nocciole toccheranno a ciascuna? Se non lo sapete, lo diremo fra poco.



Il quaderno di Giulio costa 7 soldi, la matita ne costa 9. Stamane la mamma per mandare a scuola il suo bambino dovette spendere la somma $7 + 9 = 16$ soldi.



Lia à 4 anni. Fra 2 anni verrà in prima: avrà la somma di 4 e 2 anni.

Fra 3 anni avrà un anno di più, avrà $4 + 3$ anni.

Fra 6 anni sarà già una ragazzina grande:

avrà $4 + 6$ anni;

avrà 10 anni, e avrà finita la sua quarta elementare.



Sono le 8; fra 5 ore si pranza.

A che ora si pranza stamattina?

Alle $8 + 5 = 13$.



Vogliamo scrivere tutte le addizioni di due numeri che àno per somma 10:

$$9 + 1 = 10$$

$$8 + 2 = 10$$

$$7 + 3 = 10$$

$$6 + 4 = 10$$

$$5 + 5 = 10$$

$$4 + 6 = 10$$

$$3 + 7 = 10$$

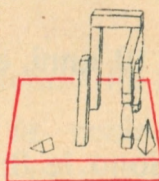
$$2 + 8 = 10$$

$$1 + 9 = 10$$

NUMERI e CIFRE

Le parole si scrivono colle lettere dell'alfabeto.
Per scrivere una parola ci vogliono diverse lettere.
Poche parole si scrivono con una sola lettera. Sono

a	così diciamo	a te, a me
à	diciamo	Gigi à fame
e	diciamo	libro e quaderno
è	diciamo	Piero è buono
i	diciamo	i bambini giuocano
o	diciamo	venga Anna o Lia
ò	diciamo	ò lavorato



Tutte le altre lettere non sono parole:

u b c non sono parole



I numeri si scrivono con le cifre.

Le cifre sono

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

0 si chiama **zero**

1 2 3 4 5 6 7 8 9
sono anche numeri. **Soltanto 0 non è un numero,**
ma serve per scrivere dei numeri: **10 20**



10 11 12 15 20

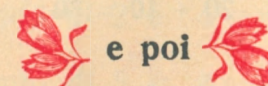


sono numeri di due cifre. Vi sono anche dei numeri
che si scrivono con 3, con 4, con molte cifre.



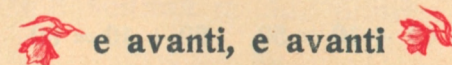
Dopo 20 vengono altri numeri, che si scrivono
con due cifre

20 venti	21 ventuno	22 ventidue	23 ventitre	24 ventiquattro	25 venticinque
26 ventisei	27 ventisette	28 ventotto	29 ventinove	30 trenta	



e poi

31 trentuno	32 trentadue	33 trentatre	e avanti fino a	39 trentanove	40 quaranta
41 quarantuno	42 quarantadue	fini a	50 cinquanta		



e avanti, e avanti

51 cinquantuno	fini a	60 sessanta	61 fini a	70 settanta	71 fini a	80 ottanta
81 novanta	fini a	90 cento	91 fini a	100		

100 à 3 cifre.

Rileggiamo la pagina 7

Dopo 10 viene 11

$$10 + 1 = 11$$

$$11 + 1 = 12 \quad \text{dunque} \quad 10 + 2 = 12$$

$$12 + 1 = 13 \quad \text{dunque} \quad 10 + 3 = 13$$

$$13 + 1 = 14 \quad 10 + 4 = 14$$

$$10 + 5 = 15 \quad 10 + 6 = 16 \quad 10 + 7 = 17$$

$$10 + 8 = 18 \quad 10 + 9 = 19 \quad 10 + 10 = 20$$



Dopo 20 viene 21

$$20 + 1 = 21$$

$$21 + 1 = 22 \quad 20 + 2 = 22$$

$$20 + 3 = 23$$

$$20 + 4 = 24 \quad 20 + 5 = 25 \quad 20 + 9 = 29$$

$$20 + 10 = 30$$



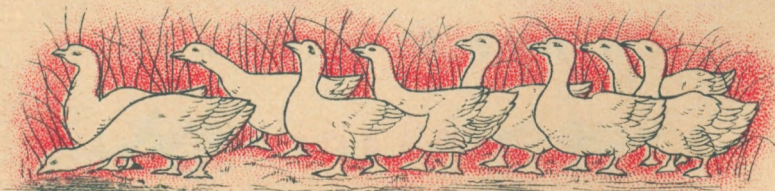
$$50 + 1 = 51 \quad 70 + 2 = 72 \quad 40 + 3 = 43 \quad 90 + 4 = 94$$

$$30 + 7 = 37 \quad 60 + 8 = 68 \quad 80 + 9 = 89$$



$$30 + 10 = 40 \quad 40 + 10 = 50 \quad 50 + 10 = 60 \quad 60 + 10 = 70$$

$$70 + 10 = 80 \quad 80 + 10 = 90 \quad 90 + 10 = 100$$



IL DOPPIO

Un quinterno di carta costa 8 soldi: per comprarne due dovrò spendere 2 volte 8 soldi:

8 soldi + 8 soldi  il doppio di 8 soldi

$$8 + 8 = 16:$$

dovrò spendere 16 soldi.



 Il doppio di un numero è la somma di questo numero più il medesimo numero.

$$1 + 1 = 2 \equiv \text{il doppio di 1 è } 2 \equiv \text{due volte 1 fa } 2$$

$$2 + 2 = 4 \equiv \text{il doppio di 2 è } 4 \equiv \text{due volte 2 fa } 4$$

$$3 + 3 = 6 \equiv \text{il doppio di 3 è } 6 \equiv \text{due volte 3 fa } 6$$

$$8 + 8 = 16 \equiv \text{il doppio di 8 è } 16 \equiv \text{due volte 8 fa } 16$$

Doppio è una somma di due numeri uguali.



La mosca à 3 zampe per lato;
in tutto à 2 volte 3 zampe:

due volte 3 fa 6.

Le mosche àno 6 zampe.



2 volte 3 fa 6



3 moltiplicato 2 fa 6

$$3 \times 2 = 6$$

2 volte 1 fa 2

$$1 \times 2 = 2$$

1 moltiplicato 2 eguale 2



2 volte 8 fa 16

$$8 \times 2 = 16$$

8 moltiplicato 2 eguale 16

In una mano abbiamo 5 dita: in tutte due le mani abbiamo 2 volte 5 dita:

$$5 + 5 = 10, \quad 5 \times 2 = 10:$$

nelle mani abbiamo 10 dita.

Anche in ciascun piede abbiamo 5 dita, e nei due piedi abbiamo 10 dita.

Fra mani e piedi abbiamo 2 volte 10 dita:

$$10 + 10 = 20, \quad 10 \times 2 = 20.$$

Abbiamo in tutto 20 dita.



$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$6 \times 2 = 12$$

$$7 \times 2 = 14$$

$$8 \times 2 = 16$$

$$9 \times 2 = 18$$

$$10 \times 2 = 20$$



Il baco da seta à 8 zampe per lato; à in tutto 2 volte 8 zampe;

$$8 \times 2 = 16.$$

Molti bruchi àno 16 zampe.



Avete mai contato i vostri dentini?

Nella mascella di sotto vi sono davanti 4 incisivi: qualche bambino ne à già perduto qualcuno, ma torneranno. Da una parte e dall'altra degli incisivi vi è un dentino più piccolo e più aguzzo; è 1 canino. Più dietro, da ciascuna parte, 2 denti più tondi: sono 2 premolari. E poi? Molti di voi àno già messo un altro dentone più grosso, dietro a questi; un molare: ma non tutti l'avete messo, e non lo contiamo. Non abbiamo nemmeno contato quelli che mancano.

Quanti denti sono dunque nella bocca di un bambino?



Nella mascella di sotto ci sono

2 volte 1 canino, 2 canini;

poi

2 volte 2 premolari:

$$2 \times 2 = 4 \text{ premolari.}$$

In tutto

$$2 \text{ canini} + 4 \text{ premolari} = 6 \text{ denti}$$

$$6 \text{ denti} + 4 \text{ incisivi} = 10 \text{ denti}$$

10 denti nella mascella inferiore; 10 pure nella mascella di sopra.

Nella bocca di un bambino vi sono il doppio di 10 denti

$$10 \times 2 = 20.$$

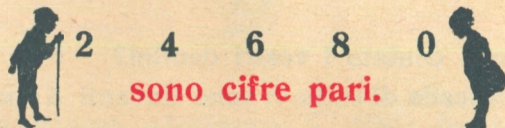


Vi sono 20 denti, o qualcuno di più.



NUMERI PARI e NUMERI DISPARI

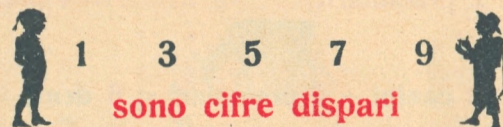
Il doppio di 1 è **2**, il doppio di 2 è **4**, il doppio di 3 è **6**, il doppio di 4 è **8**, il doppio di 5 è **10**.



Il doppio di 6 è **12**, il doppio di 7 è **14**, il doppio di 8 è **16**, il doppio di 9 è **18**, il doppio di 10 è **20**.

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20
sono numeri pari.				
22	24	26	28	30
32	34	36	38	40
sono anche numeri pari				

Tutti i doppi sono numeri pari.



1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
sono numeri dispari.				



$2 + 2 = 4$	$4 + 2 = 6$	$6 + 2 = 8$	$8 + 2 = 10$	$10 + 2 = 12$
$2 + 4 = 6$	$4 + 4 = 8$	$6 + 4 = 10$	$8 + 4 = 12$	$10 + 4 = 14$
$2 + 6 = 8$	$4 + 6 = 10$	$6 + 6 = 12$	$8 + 6 = 14$	$10 + 6 = 16$
$2 + 8 = 10$	$4 + 8 = 12$	$6 + 8 = 14$	$8 + 8 = 16$	$10 + 8 = 18$
$2 + 10 = 12$	$4 + 10 = 14$	$6 + 10 = 16$	$8 + 10 = 18$	$10 + 10 = 20$

La somma di due numeri pari è un numero pari.



$2 + 1 = 3$	$4 + 1 = 5$	$6 + 1 = 7$	$8 + 1 = 9$	$10 + 1 = 11$
$2 + 3 = 5$	$4 + 3 = 7$	$6 + 3 = 9$	$8 + 3 = 11$	$10 + 3 = 13$
$2 + 5 = 7$	$4 + 5 = 9$	$6 + 5 = 11$	$8 + 5 = 13$	$10 + 5 = 15$
$2 + 7 = 9$	$4 + 7 = 11$	$6 + 7 = 13$	$8 + 7 = 15$	$10 + 7 = 17$
$2 + 9 = 11$	$4 + 9 = 13$	$6 + 9 = 15$	$8 + 9 = 17$	$10 + 9 = 19$



$1 + 2 = 3$	$3 + 2 = 5$	$5 + 2 = 7$	$7 + 2 = 9$	$9 + 2 = 11$
$1 + 4 = 5$	$3 + 4 = 7$	$5 + 4 = 9$	$7 + 4 = 11$	$9 + 4 = 13$
$1 + 6 = 7$	$3 + 6 = 9$	$5 + 6 = 11$	$7 + 6 = 13$	$9 + 6 = 15$
$1 + 8 = 9$	$3 + 8 = 11$	$5 + 8 = 13$	$7 + 8 = 15$	$9 + 8 = 17$
$1 + 10 = 11$	$3 + 10 = 13$	$5 + 10 = 15$	$7 + 10 = 17$	$9 + 10 = 19$

La somma di un numero pari e di un numero dispari è un numero dispari.



$1 + 1 = 2$	$3 + 1 = 4$	$5 + 1 = 6$	$7 + 1 = 8$	$9 + 1 = 10$
$1 + 3 = 4$	$3 + 3 = 6$	$5 + 3 = 8$	$7 + 3 = 10$	$9 + 3 = 12$
$1 + 5 = 6$	$3 + 5 = 8$	$5 + 5 = 10$	$7 + 5 = 12$	$9 + 5 = 14$
$1 + 7 = 8$	$3 + 7 = 10$	$5 + 7 = 12$	$7 + 7 = 14$	$9 + 7 = 16$
$1 + 9 = 10$	$3 + 9 = 12$	$5 + 9 = 14$	$7 + 9 = 16$	$9 + 9 = 18$

La somma di due numeri dispari è un numero pari.



Ho chiesto a Gino quanto fa la somma di 6 e 8; mi ha risposto 15.

Ha detto bene?

No, perchè 6 e 8 sono pari, e 15 è dispari.

$$6 + 8 = 14.$$

E ha detto bene Tonino dicendo che $6 + 5 = 12$?

Nemmeno perchè 6 è pari e 5 è dispari, e perciò $6 + 5$ è dispari; invece che 12 è pari.

$$6 + 5 = 11.$$

E dice bene Piero dicendo $5 + 9 = 14$?

5 e 9 sono dispari, e perciò la loro somma deve essere pari; 14 è pari, e perciò non posso dire di no.

Ci penso un po'. Piero à proprio ragione,

$$5 + 9 = 14.$$

Ma se avesse detto $5 + 9 = 12$?

Anche 12 è pari,
ma $5 + 9$ non
è 12.



Stamane mi sono fermato a guardare certi sgorbi che qualcuno aveva disegnato col carbone sul marciapiede. Stava scritto:

$$5 + 7 = 12 \quad 4 + 9 = 12 \quad 6 + 8 = 12$$

$$7 + 8 = 15 \quad 7 + 9 = 15$$

Erano giuste queste addizioni?

La prima della prima riga e la prima della seconda riga erano giuste; le altre no.

È impossibile che $4 + 9 = 12$, perchè 4 è pari, 9 è dispari, e la somma di un numero pari e uno dispari non può essere pari; come è 12:

$$4 + 9 = 13.$$

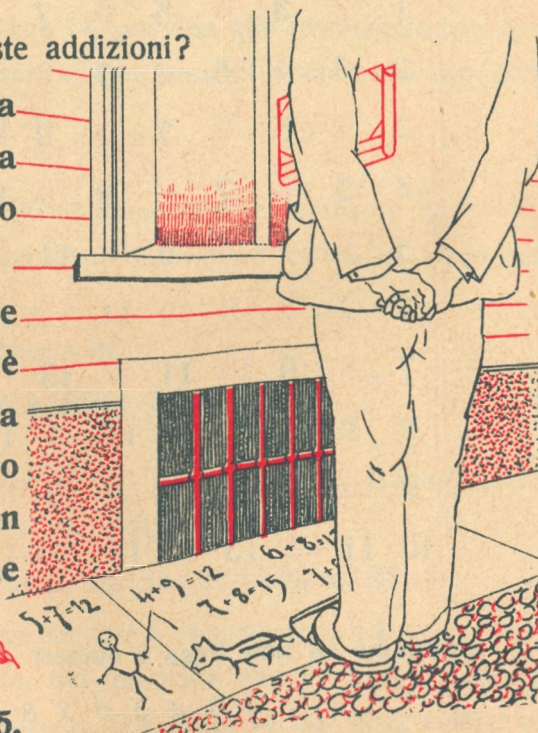
Non è certo $7 + 9 = 15$,

perchè la somma di due numeri dispari è pari:

$$7 + 9 = 16.$$

6 e 8 sono pari, e la loro somma deve essere pari, ma non è 12:

$$6 + 8 = 14.$$



LA TAVOLA DELL'ADDIZIONE

Eccovi un giochetto che vi insegnerà molte cose.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

Scriviamo su una linea i numeri

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Sotto questa linea scriviamone un'altra coi numeri

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11,

mettendo però il primo 1, un poco in fuori, come vedete nella figura qui di sopra; e così mettiamo 2 sotto 1, 3 sotto 2, e così di seguito: sotto 10 resterà scritto 11.

Scriviamo ancora, sotto a questa linea, un'altra coi numeri a cominciare da 2; ma questo 2 lo mettiamo pure in fuori, sotto l'1 della seconda linea. Arriviamo fino a 12.

Sotto a questa, scriviamo poi un'altra linea di numeri a cominciare da 3; finiremo con 13.

E così continuiamo, scrivendo ancora una linea che incomincia con 4 e finisce con 14, poi una che incomincia con 5; e avanti, finché avremo scritto una linea di numeri che comincia con 10, e arriva fino a 20.



Coi numeri da 1 a 20 abbiamo così riempito **un quadrato**: io vi ho scritto i numeri l'uno in nero e l'altro in rosso per far più bella la figura.

Questa figura si chiama la

 TAVOLA DELL'ADDIZIONE. 

Intorno intorno, **lungo i lati del quadrato**, stanno scritti l'un dopo l'altro i numeri da 1 fino a 20:

 1 2 3 fino a 10 11 12 fino a 20 

e poi di nuovo gli stessi numeri a ritroso, fino ad 1.

In **un vertice**, in alto, del quadrato non c'è nessun numero e perciò vi abbiám messo un fiorellino; in due altri vertici vi è 10 e 10, e nel vertice che resta vi è 20.

Una **diagonale** del quadrato è tutta di 10 e nella stessa direzione di questa diagonale stanno in fila sempre numeri uguali. Nell'altra **diagonale** sono tutti i doppi

 2, 4, 6, e avanti fino a 20. 

Dentro al quadrato i numeri si sono messi in colonne: una colonna incomincia con 1, e continua 2 3 fino a 11; la colonna seguente ha in capo 2, e continua 3 4 fino a 12; e così di seguito; le altre colonne incominciano con 3, con 4, e avanti; l'ultima ha in capo 10.



Sulla linea che incomincia con 1, questo 1 è sotto al fiorellino; poi si trova 2, cioè $1+1$, sotto 1;



poi 3, cioè $1+2$, sotto 2;

$4=1+3$ sotto 3, e così avanti:

sotto 10 sta $11=1+10$.

Sulla linea che incomincia con 2 troviamo poi $3=2+1$ nella colonna di 1; $4=2+2$ nella colonna del 2; e così di seguito.

E così sulle altre linee: per esempio, in quella che incomincia con 4, vi è $5=4+1$ nella colonna di 1, $6=4+2$ nella colonna del 2, $9=4+5$ nella colonna del 5.



Dunque



Ogni linea della TAVOLA incomincia con uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; ognuno degli altri numeri della linea è la somma di questo primo numero col numero scritto più minuto sopra, in alto della colonna.

Sulla TAVOLA DELL'ADDIZIONE noi troviamo così tutte le somme di due numeri qualunque presi fra 1 e 10.

Voglio per esempio la somma $8+4$.

Sulla linea che incomincia con 8 cerco il numero che sta sulla colonna del 4: esso è 12.



Trovo così $8+4=12$.

Cercate voi $7+8$.

$7+8=15$.



A molte cose può servire la TAVOLA DELL'ADDIZIONE.

Io cerco due numeri la cui somma sia 7.

Sulla TAVOLA ci sono molti 7: ne prendo uno qualunque: uno, per esempio, è sulla riga che incomincia con 2; ed è nella colonna che ha 5 in alto.

Dunque $7=2+5$.

E noi possiamo leggere tutte le addizioni che hanno per somma 7; sono

$1+6=7$ $2+5=7$ $3+4=7$ $4+3=7$ $5+2=7$ $6+1=7$



Ricordate che avevamo già scritto alla pagina 17 le addizioni che hanno la somma 10? Sulla TAVOLA DELL'ADDIZIONE le ritrovate tutte facilmente.



Sopra ogni linea della TAVOLA DELL'ADDIZIONE i numeri crescono di +1 per volta da sinistra a destra, diminuiscono invece se si va da destra a sinistra. Sopra ogni colonna i numeri crescono di +1 per volta dall'alto al basso: naturalmente diminuiscono se invece si sale dal basso all'alto.

Leggo sulla TAVOLA

$$5 + 7 = 12;$$

e allora, quanto sarà $5 + 8$? Sulla riga del 5 debbo spostarmi a destra, dalla colonna del 7 a quella dell'8; dunque $5 + 8 = 13$.

E quanto sarà $6 + 7$? Sulla colonna del 7 debbo scendere in giù, passando sulla riga del 6; dunque $6 + 7 = 13$.


$$4 + 3 = 7.$$

Quanto sarà $6 + 3$? Dalla riga del 4 scendo di 2 righe, a quella del 6; anche la somma cresce di 2:

$$6 + 3 = 7 + 2 = 9.$$

E quanto sarà $4 + 6$? Dalla colonna del 3 passo a quella del 6; mi sposto a destra di 3 colonne; anche la somma cresce di 3:

$$4 + 6 = 7 + 3 = 10.$$



I numeri che si sommano in un'addizione si chiamano
gli addendi.



Quando uno degli addendi cresce,
di altrettanto cresce anche la somma.




$$3 + 3 = 6.$$

Quanto è $5 + 3$? Il primo addendo è cresciuto di 2:

$$5 + 3 = 6 + 2 = 8.$$

E quanto è $3 + 5$? Il secondo addendo è cresciuto di 2:

$$3 + 5 = 6 + 2 = 8.$$

La somma $5 + 3$ è uguale alla somma $3 + 5$.

E sarà sempre così.

Nel fare la somma di due numeri non importa
quale dei due addendi si prenda prima.

$$2 + 2 = 4$$

$$3 + 2 = 4 + 1 = 5$$

$$2 + 3 = 4 + 1 = 5$$



Piero à 3 noci e Maria ne à 2.



Quante noci ànno insieme Piero e Maria?

E quante Maria e Piero?

$$3 + 2.$$

$$2 + 3.$$



$$3 + 2 = 2 + 3.$$



Ricordate la pagina 20?

$$10 + 4 = 14$$

$$10 + 9 = 19.$$

Allora, anche

$$4 + 10 = 14$$

$$9 + 10 = 19.$$

E $4 + 9$?

9 è prima di 10, $4 + 9$ è prima di $4 + 10$

$$4 + 9 = 13.$$



E così



$9 + 9$ è prima di $9 + 10$, è 18,

$6 + 9$ è prima di $6 + 10$, è 15.

La TAVOLA DELL'ADDIZIONE è così fatta che basta ricordarne molto poco, e subito la si ricorda tutta.  È facile, per esempio, ricordare i doppi, che sono tutti numeri pari:

2 4 6 8 10 12 14 16 18

Quanto è $5 + 6$?

$$5 + 5 = 10 \quad 5 + 6 = 11.$$



Voi ricordate anche le addizioni che danno somma 10.

E allora: quanto è $7 + 5$?

$$7 + 3 = 10 \quad 5 = 3 + 2 \quad 7 + 5 = 10 + 2 = 12;$$

e quanto è $6 + 7$?

$$6 + 4 = 10 \quad 7 = 4 + 3 \quad 6 + 7 = 10 + 3 = 13.$$



A ben pensarci, di tutta la TAVOLA DELL'ADDIZIONE c'è dunque anche di troppo a ricordare questo po':

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2			4			7			10	
3				6		8		10		
4					8		10			
5						10				

e cioè

$$2 + 2 = 4 \quad 3 + 3 = 6 \quad 4 + 4 = 8 \quad 5 + 5 = 10$$

$$2 + 8 = 10 \quad 3 + 7 = 10 \quad 4 + 6 = 10$$

$$2 + 5 = 7 \quad 3 + 5 = 8$$

DIFFERENZA e SOTTRAZIONE

Pierino deve fare il suo compito: à già copiato 5 righe; ne deve copiare ancora 3; quanto è lungo il compito di Pierino?

5 righe Pierino à già copiate, 3 ancora nè copierà,

$$5 + 3 = 8.$$

Il compito di Pierino è dunque lungo 8 righe.



Tonino deve copiare, per compito, 7 righe del libro; ne à già copiate 5: quante righe deve ancora copiare?

5 righe Tonino à già copiato;

$$5 + 2 = 7:$$

se ancora egli copia 2 righe, ne avrà copiate in tutto 7 ed avrà finito il suo compito.

Tonino non ha più che 2 righe da copiare.



Manca 2 a 5 per giungere a 7

$$5 \text{ è } 7 \text{ meno } 2$$

$$5 = 7 - 2$$

- si legge **meno**.





Il 13 del mese è il compleanno di Maria: e Maria conta i giorni, perchè pensa che la mamma le farà qualche regaluccio. Oggi è il 6 del mese; quanti giorni dovrà attendere il suo compleanno?

$$13 = 6 + 7$$

6 giorni del mese con oggi sono passati, 7 altri passeranno presto ed in tutto

faranno 13.

Al compleanno di Maria mancano 7 giorni:

$$6 = 13 - 7$$

$$13 = 6 + 7$$

$$6 = 13 - 7$$



$$13 = 7 + 6$$

$$7 = 13 - 6$$

$$7 = 5 + 2$$

$$5 = 7 - 2$$

$$2 = 7 - 5$$



6 è la differenza fra 13 e 7

7 è la differenza fra 13 e 6

la differenza fra 7 e 5 è 2

la differenza fra 7 e 2 è 5

$$14 - 4 = 10$$



$$14 - 10 = 4$$



Per finire il suo compito Tonino deve copiare 2 righe. E queste 2 righe sono la differenza fra 7 righe, ch'era tutto il suo compito, e 5 righe, che à già copiato.

Per giungere al suo compleanno Maria deve attendere 7 giorni, che sono la differenza fra 13 giorni del mese e 6 giorni che sono già passati.

Ora sentite:

Maria aveva 9 soldi; ne ha spesi 4 per comprare una penna; quanti soldi le restano?

Restano a Maria tanti soldi che, sommati coi 4 soldi che ha spesi, facciano 9 soldi. Le resta la differenza fra 9 soldi e 4 soldi:

$$9 - 4 = 5$$

$$9 = 4 + 5$$

Le restano 5 soldi.



Dicendo $9 - 4 = 5$ faccio una sottrazione.

$$13 - 6 = 7$$

$$13 - 7 = 6$$

$$7 - 2 = 5$$

sono altre sottrazioni.

Facendo la sottrazione si ha la differenza.



Per fare la sottrazione basta ricordare la



TAVOLA DELL'ADDIZIONE.



Quanto è $9 - 4$? Sulla TAVOLA DELL'ADDIZIONE cerchiamo la linea che incomincia con 4 e cerchiamo in essa il 9. Il 9 c'è, ed in capo alla colonna dove è il 9 troviamo 5; dunque

$$9 = 4 + 5$$

$$9 - 4 = 5.$$

E quanto è $15 - 7$? Sulla linea del 7 c'è 15, ed in capo alla colonna di questo 15 c'è 8:

$$15 - 7 = 8.$$



Se non si ricorda la TAVOLA DELL'ADDIZIONE,

si prova

Quanto è $15 - 7$?

Proviamo 9: $7 + 9 = 16$;

15 è meno di 16, dunque bisogna prendere meno di 9.

Proviamo 8: $7 + 8 = 15$.

Dunque $15 - 7 = 8$.



Se ricordate le addizioni che hanno per somma 10, ne sapete pur molto per fare la sottrazione.

Quanto è $15 - 7$?

$$15 \text{ è } 10 + 5 \quad 10 \text{ è } 7 + 3$$

dunque $15 = 7 + 8$ perchè $3 + 5 = 8$;

$$15 - 7 = 8.$$

Quanto è $17 - 8$?

$$17 = 10 + 7 \quad 10 = 8 + 2$$

$$10 - 8 = 2 \quad 17 - 8 = 2 + 7 = 9.$$



LA METÀ

Ricordate la storiella della pagina 16?

Laura à raccolto 6 nocciole; Emilia soltanto 4. In tutto hanno dunque raccolto 10 nocciole. Ed ora, da brave sorelline, fanno a metà; ne prendono 5 ciascuna.



$$5 + 5 = 10$$

Così si sono divise le 10 nocciole.



Enzo à 12 soldatini: li mette in fila, tanti a sinistra e tanti a destra. Ne mette 6 a sinistra e 6 a destra; perchè $6 + 6 = 12$; $6 \times 2 = 12$. Ora Enzo avvicina i suoi soldatini, uno di una fila e uno dell'altra e li fa marciare a due a due.

Sono 6 coppie.



5 è la metà di 10

6 è la metà di 12.

Invece di dire metà di 10, metà di 12 si dice pure

 **10 diviso 2, 12 diviso 2.** 

Il doppio di 6 è 12 la metà di 12 è 6

$$6 \times 2 = 12$$



$$12 : 2 = 6$$

6 moltiplicato 2 eguale 12

12 diviso 2 eguale 6



: si legge **diviso**

$$2 : 2 = 1 \quad 4 : 2 = 2 \quad 6 : 2 = 3 \quad 8 : 2 = 4$$

$$10 : 2 = 5 \quad 12 : 2 = 6 \quad 14 : 2 = 7 \quad 16 : 2 = 8$$

$$18 : 2 = 9$$

$$20 : 2 = 10$$

perchè

$$1 \times 2 = 2 \quad 2 \times 2 = 4 \quad 3 \times 2 = 6 \quad 4 \times 2 = 8 \quad 5 \times 2 = 10$$

$$6 \times 2 = 12 \quad 7 \times 2 = 14 \quad 8 \times 2 = 16 \quad 9 \times 2 = 18 \quad 10 \times 2 = 20$$

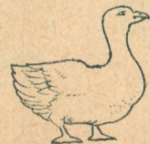


Giulio à speso 14 soldi per comprare due quaderni. Quanto costa un quaderno solo?

2 quaderni costano il doppio di un quaderno

1 quaderno costa la metà di due quaderni

costa la metà di 14 soldi.



$$14 : 2 = 7$$

Un quaderno costa 7 soldi.



Un giardiniere voleva abbellire il suo giardino; pensò: ho qui tante piantine; ne metto la metà di qua e la metà di là e faccio un bel vialino. E il giardiniere contò le piantine; erano giusto 17.

17 non è doppio di nessun numero:

$$8 \times 2 = 16$$

$$9 \times 2 = 18.$$

Il giardiniere mise 8 piante per ciascun lato del suo viale: 8 di qua e 8 di là fa 16; gli restò una pianticella, che mise in un'aiuola di fronte.

La pianta non si può dividere.



Lina e Carletto hanno 9 fichi; vogliono fare a metà. Ma 9 non è doppio di nessun numero:

$$4 \times 2 = 8$$

$$5 \times 2 = 10.$$

Lina e Carletto prendono 4 fichi ciascuno, e così si sono divisi 8 fichi; ne resta 1, che dividono a metà.

Lina e Carletto hanno ciascuno 4 fichi e mezzo.



Ho 1 lira.  Come fare per pagarne mezza?

Cambieremo la lira in soldi: 1 lira vale 20 soldi.

$$20 : 2 = 10;$$

mezza lira sono 10 soldi.



**I numeri pari hanno la metà,
i numeri dispari non hanno metà.**

Ma vi son cose che si possono dividere a metà,
anche se una sola:  si può prendere
la metà di un pane,  la metà di una mela,
la metà di un fico;

 non si può prendere 
la metà di un bambino,  la metà di una pianta,
la metà di un soldo.

Nemanco la metà di una lira non si potrebbe prendere, se
la lira non si cambiasse in soldi.

La lira vale 20 soldi; la metà di 1 lira vale 10 soldi.



Se abbiamo un certo numero di cose e ne vogliamo fare
metà, potremo sempre farlo, se il numero è pari, perchè ba-
sterà mettere tante cose di qua e tante di là: ma se il nu-
mero delle cose è dispari, dopo averne messe tante di qua e
tante di là, ce ne resterà ancora una, come la pianta del giar-
diniere, e come il fico di Lina e Carletto; se la cosa si può
dividere, faremo metà anche di quella, come Lina e Carletto
hanno fatto col loro fico; ma se la cosa rimasta non si può
dividere, ci accontenteremo di metterla da parte, come ha
fatto il giardiniere della piantina.

Noi diciamo allora:

resta una cosa che non si può dividere.

E così si dice che

Quando si divide per 2 un numero dispari
si ha il **resto 1**.

$$16 : 2 = 8$$

17 : 2 dà 8 col resto 1;



ma la metà di 17 pani sono 8 pani e mezzo, perchè il pane
che resta mettendone 8 di qua e 8 di là, si può dividere.



Si dice che

8 è il quoziente di 16 : 2 e di 17 : 2.

E così

6 è il quoziente di 12 : 2 e di 13 : 2

$$6 \times 2 = 12$$

$$12 + 1 = 13$$



13 : 2 dà il quoziente 6 col resto 1.



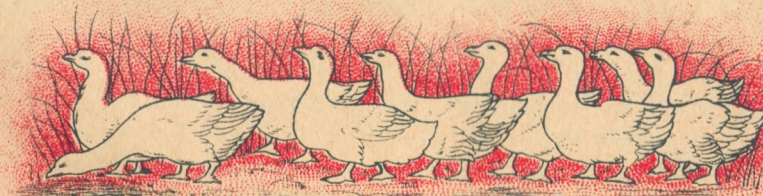
E così ancora 

4 è il quoziente di 8 : 2 e di 9 : 2,

ma 9 : 2 dà il resto 1;

il quoziente di 18 : 2 e di 19 : 2 è 9,

ma 19 : 2 dà il resto 1.





1 2 3 4 5

ILLUSTRAZIONI DIDATTICHE

È ammesso universalmente dai padagogisti che fondamento della nozione di numero sia il *conteggio* di gruppi d'oggetti; che quindi a tale conteggio si debba insistentemente ricondurre il bambino, affinché dei singoli numeri egli si formi una *nozione* cosciente. Eppure l'aritmetica nasce realmente solo quando l'uomo abbandona il conteggio concreto per sostituirlo con un conteggio virtuale, con la *rappresentazione*: si dice che taluni popoli incivili non sappiano contare al di là del 4: e quelli compiono i loro scambi quaterna per quaterna; quelli contano e non fanno aritmetica; noi numeriamo a milioni perchè facciamo aritmetica e non contiamo. Mi pare basti questa osservazione per mostrare che esiste veramente nel nostro spirito una facoltà che non è l'atto materiale di contare, facoltà che la scuola deve educare, e non mortificare per andare alla ricerca di una immaginaria cognizione completa e cosciente. Discutere qui in che cosa consista questa facoltà sarebbe vano e fuor di luogo: essa è quella che presiede in generale alla formazione delle nozioni matematiche: come tale la si chiama abitualmente astrazione, ma forse appunto tale nome è ciò che induce il preconconcetto sperimentalista (ed in parte ne è giustificato); perchè l'astrarre presuppone un concreto dal quale si astrae. Sarebbe certo più esatto chiamarla, come dissi, una facoltà di rappresentazione; rappresentazione della complessa realtà sopra schemi elementari preordinati nella natura medesima della nostra mente.



Lo schema che sta a fondamento dell'aritmetica è la *successione dei numeri interi*: così il primo insegnamento aritmetico incomincia dopo che il bambino sa ripetere una certa estensione di tale successione: quanto ampia questa estensione è inutile precisare; perchè per le primissime lezioni essa potrebbe anche limitarsi ai primi cinque o sei numeri; ma certo, come si ripeterà tosto, essa dovrà estendersi presto almeno fino al 20. E al 20 potrebbe fermarsi per le esigenze di un primo insegnamento, già abbastanza lungo (un primo anno di studio); ma non inutilmente essa potrà pure prestissimo estendersi oltre, per es. fino al 100. I bambini che si presentano alla prima ele-

mentare posseggono di solito questa conoscenza, anche più innanzi di quanto sia necessario, pel solo fatto dei loro sei anni di vita, per esser venuti a contatto con altri bimbi, per aver giuocato con essi; perchè insomma essa deriva da un movimento spontaneo dell'intelligenza che si sviluppa. Comunque, l'acquisto di questa conoscenza preliminare può essere fatto come semplice esercizio mnemonico: «ritenere una successione di parole, in un ordine determinato», del tutto simile alle filastrocche di cui i bambini si diletano.

Dunque un ritorno all'antico? un ritorno ai metodi vieti e condannati, quando una classe di 40 o 50 allievi intonava in coro 1 2 3, e avanti magari fino a 500? Non precisamente: un ritorno a ciò che di buono vi era nel vecchio e che l'entusiasmo innovatore della nuova pedagogia ha spazzato via col meno buono.

Per l'appunto la «filastrocca» non dovrà mai proseguirsi tanto da mutarsi in soporifero andazzo; per le prime lezioni non dovrà superare il 9 e potrà, come dianzi dicevo, fermarsi anche assai prima. L'essenziale è questo: *che con uno, con due numeri isolati, non si fa dell'aritmetica*; dell'aritmetica si fa solo colla successione dei numeri. Volentieri mi valgo qui di un parallelo suggeritomi da una valente insegnante di pedagogia per mostrare come il procedimento non sia tanto diffforme da quello che si segue - precisamente in opposizione ad antichi metodi meccanici - per l'insegnamento del sillabario: in questo si è abbandonato il procedimento sillabico per portare il bambino all'analisi dei suoni nelle parole; allo stesso modo noi non possiamo snaturare, sillabandola, la successione dei numeri.

Nè io dico con ciò che siano da ripudiare gli esercizi che tendono a connettere il nome dei primi numeri col riconoscimento di un corrispondente gruppo di oggetti o di segni; indubbiamente il bambino avrà dovuto imparare, come fatto di vocabolario, a esprimere e a comprendere proposizioni come «una mela» «due noci» «tre bambini» ecc.; ma si tratta, come dissi, veramente di vocabolario, allo stesso piano di quando il bambino dice «la mia mamma»; con questa osservazione: che per i numeri, come per ogni altra parola, questo significato, dirò così, - letterario - è il risultato e la sintesi di tutto quanto il corredo di conoscenze del bambino (o dell'uomo, è tutt'uno); cosicchè esso sarà discretamente preciso finchè si tratta dei primi numeri uno due tre, mentre, allontanandosi da questi, si farà via via più incerto; verso il cinque o il sei questo significato - letterario - si ridurrà, nella mente del bambino, a poco di differente dal significato del «molti», e non resterà dapprincipio altro che la successione; un più preciso significato verrà maturando, anche e principalmente per effetto degli svolgimenti aritmetici che seguiranno.

Molti consigli didattici usano darsi per estendere quanto possibile la in-

tuizione di gruppi di oggetti rappresentanti i primi numeri interi e (forse perchè si crede alla definizione della matematica come scienza della quantità e della grandezza) si ritiene con questo di svolgere i preliminari della cultura matematica: non è affatto; tali esercizi hanno tutt'altra utilità: quella - per dir vero assai più affine alla ginnastica che all'aritmetica - di tendere a sviluppare particolari attitudini sensoriali, particolarmente visive. Agli effetti della intuizione e della cultura aritmetica sono sforzi completamente vani, sia perchè nella loro unilateralità essi diminuiscono anzichè accrescere la intuizione numerica; sia perchè - e questa è una prova dell'asserto - chi si ostinasse a voler connettere ad ogni numero un'idea di grandezza o di gruppo, e, per timore del verbalismo, si rifiutasse di procedere quando viene a mancargli tale sostegno, non oltrepasserebbe certo di molto il 4 o il 5. (Si osservi che, nelle figure del giuoco del domino, dove un occhio appena esperto riconosce il numero a vista fino al 9, ciò avviene, non già per effetto di una nozione di grandezza, bensì per una corrispondenza stabilita fra il numero e la figura).

È dunque proprio coi *nomi dei numeri* nel loro ordine, che incomincia l'aritmetica; una aritmetica, già dissi dianzi, ha incominciato ad esistere per l'umanità, ed incomincia ad esistere per l'individuo soltanto quando il numero - parola o segno - ha incominciato a prendere una esistenza intellettuale autonoma, indipendente da qualsiasi rappresentazione concomitante, e la mente ha acquistata la fiducia di poter operare (calcolare) con tali segni senza domandarsene ad ogni istante la momentanea, occasionale, raffigurazione concreta.

Insisto. Se l'insegnante vuole avviare il fanciullo ad una vera educazione matematica, s'egli vuole contribuire ad eliminare quei malintesi che fanno apparire, a molti giovani, la matematica il più ostico ed il più vano fra gli studi (i due sentimenti non sono indipendenti, perchè la mancanza di interesse è primissima causa di difficoltà), ad eliminare ancora quei malintesi che, protrandosi al di là della scuola, inducono anche in persone altrimenti coltissime le più assurde concezioni riguardo al contenuto e allo scopo della matematica; occorre che egli liberi anzitutto se stesso dai residui di tali malintesi; occorre che egli non concepisca la matematica - sia essa aritmetica ovvero geometria - in primo luogo come strumento per la determinazione di grandezze e di forme, e nemmeno (ciò che pure è stato fatto anche da matematici) che egli vi veda come caratteristica la deduzione logica (poichè in tal caso egli sarebbe, con ragione, portato a considerare come prematura alla prima età una qualsiasi introduzione ad essa); occorre invece che egli la consideri, quale essa è, come *l'espressione*, l'estrinsecazione di una particolare at-

tività dello spirito: la consideri quindi, in questo senso, di natura eminentemente estetica, e assimilabile sotto molti rispetti all'attività artistica. L'attività sperimentale può essere occasione alla formazione di concetti matematici; ma non ne è la radice propria, la quale deve piuttosto ricercarsi in intuizioni di coordinamento, di unità, di uniformità, di simmetria.

Così i numeri interi sono una serie tipo, in cui si esplica una certa intuizione di successione: in essa trovano rappresentazione e riferimento talune successioni sperimentali, precisamente in quanto possono esse vedersi riflesse in tale intuizione; ma non v'ha nessuna ragione per considerare l'una di esse piuttosto che l'altra come il fondamento sperimentale della nozione di numero: non l'esame di gruppi di oggetti, piuttosto che considerazione di grandezze estensive (lunghezze, ad es.) ovvero l'applicazione della nozione temporale del prima e del poi. A volta a volta ciascuno di questi atti mentali potrà essere l'occasione per l'estrinsecazione della nozione di numero, ma non mai l'occasione unica, bensì le varie e multiformi che lo spirito sintetizza nel loro elemento comune: perciò, anche nell'insegnamento, noi dovremo richiamare alla mente, a volta a volta, ciascuna di queste immagini, come mezzo di integrazione della nozione numerica nei singoli suoi momenti, non come mezzo di scoperta e di formazione; allo stesso modo che, se il sibilo del vento, il mormorio del ruscello, il canto degli uccelli possono essere le occasioni varie che possono eccitare l'estrinsecazione della intuizione musicale, non penserebbe certo il maestro di musica di ricondurre l'allievo a queste prime e ingenue impressioni per farvi scoprire le note o il ritmo.



Il libro incomincia dunque col presentare la successione dei primi numeri: quanto estesa non importa, come già osservai; ma il bambino di 6 anni non ha difficoltà a raggiungere il 9: ciò che importa, l'ho pure già detto, è che non si presentino isolatamente, come cose per sé stanti, uno o due numeri; ed importa pure che non si devii l'attenzione del fanciullo colla presentazione di gruppi di oggetti per ciascun numero. Per mostrare a quale aberrazione possa condurre il pregiudizio dell'insegnamento concreto, io non posso a meno di ricordare a questo proposito un brano delle NOTE SPIEGATIVE AI PROGRAMMI PER LE SCUOLE ELEMENTARI: « si raccomanda al maestro che, nella presentazione di più unità concrete, le singole unità siano non soltanto omogenee, ma anche approssimativamente uguali... e ciò perchè l'intuizione si accosti di più al concetto matematico di unità, mentre ripugna al semplice istinto logico l'assumere sotto lo stesso concetto di unità per es. un grande

foglio ed un pezzettino di carta » Ma che! io credo fermamente che se tale ripugnanza ha sentito chi scrisse quelle istruzioni, ciò non potè avvenire se non come moto riflesso dell'animo suo in conseguenza di un pregiudizio teorico: e se, partendo da tali principi, taluno pensasse di richiamare, con scopo didattico, l'attenzione del bambino sulla uguaglianza delle « unità », quegli dovrebbe giungere a togliere all'allievo la convinzione che la mosca ed il bue siano due animali! Proprio all'opposto, se mai, noi dovremo educare il nostro allievo a pensare che una cosa e un'altra cosa sono due cose, perchè col dire *una* abbiamo attribuito ad entrambe quel carattere di unità che, qualunque esse siano, le rende identiche, sotto questo aspetto.

(Io penso che la rappresentazione della pag. 1 presti largo elemento all'insegnante per trattenere piacevolmente il piccolo allievo sopra la nozione di successione; ora, si confronti il valore diverso che avrebbe la figura se la netta impressione di successione vi fosse sostituita con quella di uniformità, mediante pupattoli eguali!)

Nell'eseguire il primo esercizio della pagina 2, io raccomando di accentuare l'intuizione della successione mediante una lettura leggermente ritmata, dei 9 numeri; alla quale si dovrà subito far seguire, con una certa inflessione periodica della voce, il « dopo 1 viene 2, dopo 2 viene 3, ecc. ». Questa pura ripetizione, quando sia fatta con una certa musicalità, ma pur senza cantilena, interessa il fanciullo, evitando anche il tedio e la meccanicità.

Naturalmente, perchè lo scopo sia raggiunto, dovrà essere curata la continuità dello svolgimento del pensiero, fin da queste prime linee; non si dovrà leggerle e tirare via; ma si dovrà tornare sulla loro ripetizione quante volte sia necessario, anche mentre si prosegue negli esercizi seguenti.



E qui mi occorre una parentesi.

Lo scopo del libro sarebbe, come accennai nel proemio, quello di formare - direi - l'abecedario dell'aritmetica; sarebbe cioè che esso debba essere messo in mano al bambino, allo stesso modo che non si penserebbe di insegnare a leggere senza il sillabario. L'idea s'allontana alquanto dalla consuetudine pedagogica; onde è forse necessaria una parola di giustificazione.

Egli è certo che noi ragioniamo per un moto interno dello spirito; è certo che ottimi ragionatori ed ottimi calcolatori sono analfabeti; ed è perciò che giustamente anche i programmi ufficiali chiedono che si avvezzi il fanciullo al calcolo mentale: di qua, forse, il precetto invalso, che il primo insegnamento dell'aritmetica sia prevalentemente orale. Nondimeno un appoggio essen-

ziale allo svolgimento del nostro pensiero è il simbolo mediante il quale esso si estrinseca: e se non v'ha dubbio che la deduzione, il raziocinio, non ha forma sensibile, è pur vero che alla formazione della intuizione matematica presiedono, come accennai, elementi di coordinazione e di simmetria che più facilmente giungono alla mente attraverso sensazioni visive e uditive. D'altra parte anche il calcolatore analfabeta non calcola senza riferimenti esteriori, i quali costituiscono il suo simbolismo, non meno effettivo della scrittura, sebbene diverso.

Così, nel primo insegnamento matematico, la parola scritta come quella parlata sono aiuti essenziali. Tanto la rinuncia al maestro, quanto la rinuncia al libro (o all'equivalente del libro, alla tavola o alla lavagna) non sono senza danno.

Nel mio pensiero è dunque utile, se non necessario, che il bambino legga il suo abbaco il più presto possibile. Ho dovuto quindi prospettarmi, e cercare di risolvere la difficoltà inerente al fatto che, nella scuola almeno, deve consentirsi una certa simultaneità dei due insegnamenti della lettura e della numerazione. Se la soluzione adottata non è riuscita perfetta, io spero che sarà giudicata sufficiente allo scopo. Ed invero:

Le nove cifre 1, 2, ..., 9 sono nove segni che il bambino può ben imparare a riconoscere prontamente, e a nominare. Non credo si possa obiettare che il bambino dura una certa fatica a riconoscere e nominare le prime lettere: le difficoltà relative alle lettere (oltre forse a qualcuna di natura tipografica, connessa colle forme diverse che una stessa lettera assume nei diversi caratteri, ad es. a e A) dipendono essenzialmente dalla composizione e scomposizione dei suoni: finché ai bimbi si richiedesse solo di riconoscere «a e i o u», non sorgerebbe nessuna difficoltà: anzi la facilità iniziale di tale apprendimento era caratteristica del metodo sillabico.

Nelle righe seguenti sono sempre le stesse parole «dopo» e «viene» che si ripetono; il bimbo può bene imparare a riconoscerle nel loro complesso: ma sono anche ben pochi gli elementi grafici e fonici che vi ricorrono, onde senza sforzo, al più con qualche lieve rimaneggiamento nell'ordine dell'apprendimento delle singole lettere il bambino può esser messo prestissimoin grado di farne la lettura autonoma e cosciente.

Le difficoltà crescono ove si voglia passare alle linee seguenti della pag. 2, colla parola «prima»; ma a risolvere tale difficoltà si presta la lettura ciclica cui facevo cenno poc'anzi. Osservo anzi che queste righe, come sarà ancora ripetuto tosto, sono realmente inutili e si potrebbero sopprimere nei riguardi del metodo: esse hanno più che altro lo scopo di fissare l'attenzione del fanciullo sopra la correlazione delle parole «dopo» e «prima», la quale non

ha invero nulla a che fare coll'aritmetica: (appunto perchè correlative esse costituiscono logicamente un *dupplicato*, strettissimamente connesso alla forma verbale dell'espressione); e perseguono perciò anche, sotto un altro aspetto, lo scopo di richiamare l'attenzione sopra la successione. Nessun male quindi che la lettura di queste linee sia rimandata a più tardi, buona occasione per ritornare sopra all'esercizio medesimo. Ho accentuato il consiglio colla composizione in carattere minore.

Le cose ora dette valgono, come l'insegnante rileverà da sè stesso, anche per gli esercizi seguenti.



E poichè sono in questo argomento più strettamente di pratica didattica, voglio aggiungere poche parole su argomento affine. Il fanciullo dovrà proseguire presto nella conoscenza, e quindi nella lettura, dei numeri fino al 20: essa non presenta notevoli maggiori difficoltà della lettura delle nove cifre: si tratterebbe qui realmente della lettura di accoppiamenti di cifre (10, 11, 12,...), in cui si potrebbe dubitare di vedere riprodursi le difficoltà dianzi ricordate, relative alla lettura degli accoppiamenti di suoni (lettere), aggravate - si può pensare; poichè qui, coi numeri, non si tratta più di una contrazione di suoni i quali, pure contratti, conservano netta l'impronta della loro individualità; si tratta invece della coniazione di parole nuove, che coi segni hanno poco rapporto. Ritengo sia questo ciò che in realtà semplifica la cosa: il fanciullo non troverà maggior difficoltà nella lettura dei «segni composti» 10, 11, 12,... di quanta glie ne presenti la lettura degli aggruppamenti ch, gl, gn, ecc.; e l'esclusione di ogni significato fonico nell'accoppiamento potrà anzi facilitare la lettura, che non richiederà ancora il lavoro mentale connesso colla varia combinazione dei suoni dell'alfabeto. Occorre naturalmente che la difficoltà non sia creata dall'insegnante, col voler spiegare la corrispondenza fra il segno composto e la scomposizione del numero in decine ed unità: argomento questo che non è di lettura, bensì di aritmetica, e che deve essere riservato per molto più tardi.

Il bambino oltrepassa presto spontaneamente anche il numero 20, così nel conteggio come nella lettura. Qui va osservato che, per ragioni inerenti al sistema di numerazione e che risulteranno chiare nello svolgimento dell'insegnamento aritmetico, perde ogni importanza che il fanciullo acquisti questa conoscenza come successione, in modo immediato: anzi, poichè qualora si volesse assicurare la conoscenza in questa forma si sarebbe troppo facilmente

rali esse hanno valore) sopra un singolo caso - che, allo stato attuale delle conoscenze del bambino, non si potrebbe nemmeno dire *caso particolare* della nozione generale che si vuol fare emergere, poichè al momento attuale esso è veramente *caso unico*. Mi par giustificato il dubbio che tutto questo trastullamento intorno al 1 e al 2 possa essere piuttosto causa di una deformazione dell'educazione mentale del fanciullo, poichè lo pone di fronte ad un verbalismo irrazionale ed inesplicabile. A meglio chiarire l'osservazione mi permetterò un richiamo storico: è ben chiaro che il passaggio dalla scrittura (o, se si vuole, dalla nozione) $1+1$ alla 1×2 è perfettamente analogo al passaggio da $a \times a$, ad a^2 : or bene, non solo l'idea dell'esponente non è sorta negli algebristi che molto lentamente, ma, quel che qui importa, è sorta solo quando si dovettero considerare prodotti di molti fattori uguali (e particolarmente di un numero indeterminato di fattori uguali); cosicchè, ancora meno di due secoli fa, si trovano usate promiscuamente negli stessi scritti le due scritture aa e a^2 , dandosi la preferenza alla seconda solo quando spontaneamente il quadrato si presenta come caso particolare di un a^n .



Negli esercizi delle pag. 3-6 si cerca di dare posto, nella mente del bambino, allo schema deduttivo

dopo... viene... , ... più 1 è...

Qualche osservazione farò qui per la parte deduttiva formale; ritornerò tosto sopra al contenuto intuitivo dello schema. Formalmente esso non è che una definizione; esso è una traduzione (di una forma verbale in un'altra) che il fanciullo deve avvezzarsi ad eseguire con prontezza. Ma ciò che veramente importa è che esso schema si fissi in sintesi nella mente del fanciullo, in modo che la traduzione avvenga non solo pronta, ma spontanea. Occorre che alla applicazione esplicita dello schema ai singoli casi particolari si sostituisca la sua imitazione implicita, automatica. Ed è perciò che non ho abbondato eccessivamente nel numero degli esempi cui lo schema è applicato: potrà l'insegnante, ove lo creda necessario, farne ripetere l'applicazione ad altri casi; (nè è possibile dire quante volte essa possa rendersi necessaria dipendendo ciò dalla maggiore o minor prontezza dell'allievo); ma gli esempi del testo saranno spesso sufficienti, qualche volta anche di troppo. In seguito, occorre che il bambino prosegua nel dar risposta alla domanda « + 1 » per analogia, come mostrano i passaggi via via più concisi delle pagine 3-7, senza la illimitata ripetizione esplicita dello schema. Per analogia dico, e non per forza di memoria; (nell'analogia s'intende che, se il fanciullo non deve più

ripetere esplicitamente lo schema nei singoli casi, egli lo deve però costantemente vedere nella propria immaginazione: che altrimenti sarebbe stato meglio incominciare senz'altro dalla pag. 7. E, qualunque possa essere la repellenza del piccolo allievo, sarà sempre da evitare che l'esercizio di ripetizione formale dello schema si estenda a tutti i numeri; assai preferibile è di ripetere più volte gli stessi esempi. Perchè la illimitata ripetizione esplicita tende ad assopire la mente nella imitazione formale, la quale, per avere la forma di deduzione logica, non è perciò meno meccanica e dannosa di quello che sarebbe un'altro qualsiasi meccanicismo. Il pericolo non può nascere invece colla ripetizione degli identici esempi: poniamo pure che l'allievo giunga con essa alla pura ripetizione mnemonica: occorrerà pure che questa memoria si trasformi in un raziocinio, se l'alunno deve poi rispondere alla domanda del « + 1 » per numeri diversi, che non rinnovano gli stessi stimoli grafici e acustici!



Colgo volentieri questa occasione per enunciare subito un aforisma che può parere contraddittorio, ma che deve essere la norma di ogni insegnamento matematico. Si assegna abitualmente - e con ragione - all'insegnamento matematico il compito educativo di avvezzare l'intelletto a formarsi una chiara visione di tutte le fasi di un ragionamento, per riconoscerci ciò che è fondato e ciò che non è; ma per converso la matematica si distingue dalla semplice sillogistica per la natura più complessa dei suoi schemi deduttivi, ed è necessario che questi divengano elemento connaturato ed inconscio dell'intelletto, allo stesso modo che il più guardingo ragionatore non può obbligarci alla continua ed esplicita sillogizzazione, e allo stesso modo che sono patrimonio connaturato della mente le più elementari previsioni sperimentali (della sazietà dopo il pasto, del ristoro dopo il riposo). L'antimonia sta in ciò, che da una parte ci prefiggiamo un'abitudine di analisi, dove dall'altra dobbiamo chiedere che di tale analisi si raccolgano nella mente i risultati sotto forma di conoscenza. Ma l'antimonia è anche solo apparente: l'insegnamento matematico deve educare all'analisi come attitudine e come abitudine mentale, non come adattamento di un calco; mediante l'esempio e non colla ricetta; anche l'analisi, quando si riduce alla ripetuta applicazione a casi diversi e analoghi degli stessi *distinguo* e degli stessi *ergo*, è meccanicismo e non dà frutto: è da combattere l'automatica applicazione esplicita di schemi formali, mentre è da promuovere, come essenza medesima del nostro pensiero, quella implicita, per giustificata analogia.

Le osservazioni che precedono debbono ripetersi senz'altro per il passaggio dall'addizione $+1$ all'addizione $+2, +3, \dots$ fino al $+6, +7, \dots +10$. Lo schema formale che si deve indurre nella mente del bambino si esprimerebbe in modo generico

b' viene dopo b $a + b'$ viene dopo $a + b$.

Anche qui è da raccomandare che non si permetta al bambino di prendere il vezzo di fare tutta la strada sulla punta delle dita: « $5 + 4 ?$ » - « $5 + 1 = 6, + 1 = 7, + 1 = 8, + 1 = 9; 5 + 4 = 9$ »; di regola si può dire che non si deve spingere il bambino al $+4$ se non possiede il $+3$, in modo che alla nuova domanda possa rispondere con un passo solo. Ma poichè nella pratica non si possono evitare momenti di disattenzione e di amnesia, è da raccomandare almeno che, occorrendo fare la strada retrograda, s'induca il bambino a fermarsi in essa il più presto possibile. Gli si chiede per es. $5 + 7 ?$ Egli sa certamente $5 + 5 = 10$, e allora procederà subito a partire da questo punto: « $5 + 6 = 11, 5 + 7 = 12$ ». Sotto una forma sistematica e un po' differente, queste osservazioni si riprendono nel capitoletto della TAVOLA DELL'ADDIZIONE.

Voglio far notare che non a caso l'insegnamento della somma si è incominciato con $3 + 1$ e non con $1 + 1$, come parrebbe più naturale, e com'è abituale. Si potrebbe osservare per giustificazione che, poichè si vuol mettere in evidenza che il fatto essenziale del numero intero è la successione, non la rappresentazione di gruppi di più in più complessi, non v'ha più ragione per incominciare dall'1 piuttosto che da un altro punto qualunque della successione; ma v'ha realmente ragione per incominciare a una qualche distanza dall'1: ed essa è che nella somma i due addendi, rappresentati di fatto entrambi mediante numeri, hanno ufficio di concetti notevolmente diversi: effettivamente non è l'aggiunzione di 1 ad un numero qualunque ciò che noi dobbiamo far intuire e comprendere all'allievo, bensì è l'operare con $+1$, espressione equivalente a passare al numero successivo. Non si può nascondere che il simbolismo adottato dall'uso, al quale necessariamente non possiamo sottrarci, col rappresentare così collo stesso segno nozioni diverse, renda un poco grave questo primo passo. La difficoltà sarebbe accresciuta di molto se noi presentassimo al fanciullo, come prima espressione del genere, quella, simmetrica nell'apparenza quanto asimmetrica è nell'intuizione, $1 + 1$.

Nel testo ho tentato solo di sfuggita di porre in maggiore evidenza questa asimmetria collo scrivere in cifra il primo addendo e la somma, in lettere il secondo addendo « uno » (è l'unico modo che resti a nostra disposizione per dare una differenza grafica alla rappresentazione dei due concetti espressi nei numeri); senza insistervi però, sia per non aumentare la fatica del bambino nella lettura di parole, sia perchè ritengo che difficilmente il bambino possa cogliere questa sottigliezza: la identità verbale è di per sè sufficiente a rendere vano ogni tentativo di mantenere distinta in altra forma la *rappresentazione* dei due concetti.

Mi sia permesso di richiamare l'attenzione sopra un lieve particolare: Ho già fatto cenno che nell'associare nei primi esercizi la parola « prima » alla parola « dopo » non ho però voluto dare a tale correlazione importanza aritmetica. Riterrei cioè inopportuno il tentare, come certo taluno potrebbe pensare, l'insegnamento della sottrazione in modo simmetrico all'addizione partendo dalla considerazione della relazione espressa dal « prima ». Non voglio diffondermi nella giustificazione di questa osservazione la quale risulta da un insieme di ragioni sistematiche relative alla introduzione delle « operazioni inverse » alle quali farò ancora cenno fra poco.

Il passaggio dalla nozione ordinale del numero intero alla nozione cardinale (numero come rappresentante il gruppo, la quantità) si fa attraverso la interpretazione della operazione di « *passaggio al numero successivo* » in quella di « *aggiunzione di un oggetto ad un gruppo cui si è già attribuito un numero* ». Non è d'altronde questo altro se non un caso particolare del procedimento generale per cui la *successione dei numeri interi*, preordinata come già dissi nella nostra intelligenza, raggiunge le applicazioni: ogniqualvolta una certa operazione, applicata ad un oggetto qualsiasi, genera un nuovo oggetto cui l'operazione medesima può applicarsi, e così di seguito con risultati sempre nuovi, noi interpretiamo in tale operazione il passaggio da un intero al successivo, e, assegnato ad uno degli oggetti considerati il numero 1, noi veniamo ad aver assegnato un numero intero a ciascuno degli oggetti successivamente generati.

Ed è questa la sola vera nozione che noi abbiamo di numero cardinale, perchè, come già dissi, nessuno di noi annette veramente un'idea di grandezza determinata ai singoli numeri interi; bensì - appena ci allontaniamo un poco dai primissimi numeri - la presunta nozione cardinale altro non è se non l'intuizione di una relazione ordinale rispetto alla detta operazione di aggiunzione.

A questo pensiero si informano i semplici problemi del testo destinati a dare contenuto intuitivo allo schema formale

dopo ... viene più 1 è ... ,

nei quali, dapprima l'idea di successione è spontanea nella nozione temporale (pag. 3, 4), per divenire poi convenzionale nell'ordinamento di gruppi (pag. 5, 6).

Si noti che, anche qui, per la formazione della nozione cardinale di « numero intero », non diviene più nè necessario nè utile incominciare dal numero 1, perchè non è già che tale nozione noi dobbiamo associare alla impossibile intuizione di gruppi di oggetti più e più ampi; bensì noi dobbiamo associarla alla intuizione della relazione fra gruppi rappresentati da numeri consecutivi di differire fra loro per l'aggiunzione di un elemento.

Per la prima volta alla pag. 9 introduco un enunciato astratto: « Dopo un numero viene un altro, dopo questo viene un altro, ed io dico *più 2* »: la forma, in quanto proposizione matematica, non ne è certo classica; ma spero più adatta alla mente infantile che non sarebbe una più categorica; lo si potrebbe d'altronde eliminare senza guastare l'economia del libro, perchè non rinnovo in seguito (e non credo il caso di rinnovare) enunciati analoghi per il +3, +4, ecc.; altre enunciazioni però seguiranno ancora, che forse potranno parere a taluno teoriche ed astratte. Osservo che l'affermazione formale, fatta al momento e nella forma opportuni, non è sforzo di astrazione, ma coordinamento e riposo, e ciò per il bambino come per l'adulto. Non è raro sentire bambini parlare per enunciazioni generali e per precetti, perfettamente analoghi ai nostri discorsi filosofici e morali o alle nostre leggi fisiche: la differenza sta nel modo in cui la massima si forma; modo che nel fanciullo (al pari dell'uomo incolto) avviene per induzione e per analogie esteriori (e troppo spesso, a causa di un'istruzione mal diretta, per puro verbalismo): il fanciullo è essenzialmente osservatore, e l'aritmetica offre questa prerogativa, di permettere enunciati generali mediante la semplice constatazione (e perciò, come avviamento all'educazione matematica è realmente più elementare della geometria).

A proposito delle proposizioni che seguiranno, un logico potrebbe più d'una volta osservarmi ch'io non faccia distinzione fra *definizioni* (per le quali avrei dovuto preferire espressioni del tipo chiamo, dico, dirò) e *constatazioni*, *leggi*. Non è cosa, desidero avvertirlo, che mi sia sfuggita per trascuranza od equivoco; il bambino non fa ancora distinzione fra ciò che è costante per imposizione del mondo esteriore, o per conseguenza logica, e ciò che è costante per un atto della sua volontà. Io credo necessario seguirlo nella sua evoluzione mentale: l'importante non è di fare dell'esattezza, ma di non fare inesattezza od errore. Quello da cui mi sono astenuto e credo

necessario astenermi è l'enunciazione di regole.

Questo pensiero, che non ripugni, anzi sia gradito all'intelligenza infantile, qualche affermazione generale ottenuta mediante la semplice osservazione, ispira in più punti i capitoletti che seguono al primo insegnamento dell'addizione (pag. 15 e seg.): particolarmente quelli NUMERI PARI E NUMERI DISPARI, LA TAVOLA DELL'ADDIZIONE; essi sono anche il vero avviamento al calcolo mentale; perchè il calcolo mentale non consiste affatto in una pronta memoria dei risultati delle operazioni fondamentali sopra numeri più o meno semplici (per es. sopra i numeri di una cifra o sopra quelli minori di 20); esso consiste anzi essenzialmente nel ridurre al minimo lo sforzo mnemonico mediante l'osservazione ed il ragionamento. Ho già fatto notare che, quando si dice che molti analfabeti sono migliori calcolatori di chi usa la penna e la carta, non si dice che essi non adoperino per i loro calcoli riferimenti e rappresentazioni. Questi riferimenti possono in generale compiersi in modi svariati e quindi hanno spesso una forte impronta personale: ma errerebbe chi ne volesse indurre che, al riguardo, nessun suggerimento si debba dare al fanciullo, col fine di lasciar libera la via alla sua facoltà inventiva: se sopra la possibilità e sopra la varietà di tali riferimenti non richiamiamo la sua attenzione, diviene naturale che - a meno di casi di eccezionale iniziativa - egli si acquieti nelle forme regolari e pedestri del calcolo scritto. Perciò di tali suggerimenti sono ricchi (per quanto può esserlo un insegnamento infantile) questi capitoli, e particolarmente quello della TAVOLA DELL'ADDIZIONE, il quale, nella sua forma di pura constatazione e di riflessione, contiene veramente il germe di deduzioni matematiche, alle quali il fanciullo non avrà più difficoltà a dare, a suo tempo, l'espressione categorica.



E veniamo infine alle operazioni inverse (differenza e metà) e ai problemi relativi: poco ho da dire che non si veda con un po' di riflessione nella esposizione del testo: dirò solo che la risoluzione del problema inverso è spesso una piccola scoperta, una piccola divinazione (piccola o grande secondo la gravità del problema): non per nulla a nessuno verrebbe in mente di proporre come esercizio, sia pure ad uno studente liceale o universitario, per es. la risoluzione dell'equazione di 3° grado. Perciò credo sconsigliabile di pretendere talora minuti ragionamenti dove la verifica è la miglior dimostrazione (in particolare, per la sottrazione, sconsigliabile il conteggio a ritroso, il quale ha anche contro di sé tutta la pratica della vita comune, e tende a dare al bambino un vezzo che sarà poi di ostacolo al facile apprendimento delle operazioni aritmetiche).

Occorre che fin da principio l'allievo impari che il tentativo, tentativo sorretto ben s'intende dall'intuito e dal raziocinio, è anch'esso un mezzo non disprezzabile di ricerca, talora il solo a nostra disposizione.

A proposito della sottrazione, all'insegnante non sfuggirà una sottigliezza che forse raramente è posta in rilievo, ma alla quale ho creduto nondimeno di dover dare risposta, per soddisfare la mente del bambino, non ancora trascinata, come spesso la nostra, dalle formole fatte. Quando noi chiediamo quante righe deve ancora scrivere Tonino se, dovendone copiare 7, ne ha già scritte 5, la risposta ovvia è « tante quanto 5 è in meno di 7 » ($5 = 7 - 2$); invece noi insegniamo a rispondere « $7 - 5 = 2$ ». Non dunque per solo lusso ho accoppiato le uguaglianze come

$$13 - 7 = 6 \quad 13 - 6 = 7; \quad 7 - 5 = 2 \quad 7 - 2 = 5$$

Cosicchè, mentre - allontanandomi forse da qualche consuetudine - ho riservato per abbastanza tardi il rilievo della proprietà commutativa dell'addizione, ho creduto necessario di porre qui immediatamente questa, che invero formalmente le fa riscontro.